Чернівецький державний університет
ім. Ю.Федьковича

На правах рукопису

Кондур Оксана Созонтівна

ДОСЛІДЖЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЗОБРАЖЕННЯ ТА ГРАНИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ РОЗВ'ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

01.01.02 — диференційні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Чернівці - 1995

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі математичного моделювання Чернівецького державного університету ім. Ю.Федьковича

Науковий керівник — доктор фіз.- мат. наук, професор Івасишен С.Д.

Офіційні опоненти — доктор фіз.- мат. наук, професор Ейдельман С.Д.,

кандидат фіз.- мат. наук, доцент Крехівський В.В.

Провідна організація — Інститут математики НАН України

Захист відбудеться "28" жовтня 1995 р. о 10 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 07.01.04 Чернівецькому державному університеті за адресою : 274012, Чернівці - 12, вул. Університетська, 28, математичний факультет

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці ЧДУ за адресою : вул. Лесі Українки, 23

Автореферат розіслано "26" вересня 1995 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради А.М.Салов'як

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

АКТУАЛЬНІСТЬ ТЕМИ. У теорії гармонічних функцій добре відомі класичні результати про зображення гармонічних функцій у вигляді інтеграла Пуассона, про множини їх граничних значень, про їх граничну поведінку. Ці результати узагальнювалися на розв'язки деяких класів параболічних рівнянь і систем рівнянь у працях ряду вітчизняних та зарубіжних математиків, зокрема Д.В.Уіддера, М.Кшижанського, Р.Гюнтера, Д.Г.Аронсона, Р.Джонсона, Ж.Шабровського, Н.А.Ватсона, С.Д.Ейдельмана і Т.Г.Плетньової, С.Д.Івасишена, М.Л.Горбачука і В.І.Горбачук, І.М.Петрушка та ін. Однак необхідної ясності й повноти досі немає. Залишаються актуальними такі питання:

1) виділити якомога ширші класи систем рівнянь, а також класи їх розв'язків, для яких правильні результати про зображення інтегралами Пуассона;

2) якнайповніше вивчити граничну поведінку розв'язків різних класів параболічних систем при наближенні до початкової гіперплощини;

3) знайти необхідні та достатні умови, за яких розв'язки мають граничні значення, описати множини цих значень.

Дослідженню зазначених питань і присвячена дисертаційна робота.

МЕТОЮ РОБОТИ є відшукання умов, за яких класичні розв'язки параболічних систем, визначені в шарі чи в циліндричній області, зображуються у вигляді інтегралів Пуассона елементів деяких вагових просторів і ці простори є множинами початкових значень даних розв'язків, а також з'ясування, в якому сенсі задовольняються початкові умови.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕНЬ. Методика доведень істотно використовує властивості матриць Гріна, зокрема при дослідженні інтегралів Пуассона, нормальність задач, при якій має місце формула Гріна, елементи теорії лінійних функціоналів.

НАУКОВА НОВИЗНА. I. Досліджено елементи матриці Гріна задачі Коші для загальної параболічної за Петровським системи у відповідності з гладкістю коефіцієнтів системи.

2. Для такої системи у випадку рівних порядків рівнянь описано клас класичних розв'язків у шарі, які зображуються у вигляді інтегралів Пуассона функцій спеціальних вагових просторів, і з'ясовано, в якому розумінні дані розв'язки задовольняють початкові умови.

3. Досліджено інтегральне зображення та описано множини початкових значень розв'язків рівномірно параболічної за Петровським системи, які визначені в циліндричній області і на бічній межі задовольняють однорідні нормальні крайові умови.

4. Одержані результати узагальнено на випадок параболічної системи з оператором Бесселя та параболічної системи з розривними в середині області коефіцієнтами і з заданими однорідними нормальними умовами спряження на поверхні розриву коефіцієнтів.

5. Одержано формулу Гріна для нормальної параболічної крайової задачі з оператором Бесселя.

ТЕОРЕТИЧНА І ПРАКТИЧНА ЦІННІСТЬ. Дисертація має теоретичний характер. Результати роботи можуть бути використані при дослідженні коректної розв'язності та властивостей розв'язків задачі Коші і крайових задач для квазілінійних параболічних систем, а також вивченні математичних моделей конкретних фізичних процесів, які описуються параболічними системами.

НА ЗАХИСТ ВИНОСИТЬСЯ:

- структура матриці Гріна задачі Коші для загальної параболічної за Петровським системи;

- характеризація класу розв'язків однорідної параболічної за Петровським системи рівнянь довільних рівних порядків, які зображуються у вигляді інтегралів Пуассона функцій спеціальних вагових просторів Соболева;

- інтегральне зображення, гранична поведінка та множини початкових значень визначених у циліндричній області розв'язків рівномірно параболічної за Петровським системи першого порядку по t , які на бічній межі циліндра задовольняють однорідні нормальні крайові умови;

- інтегральне зображення, гранична поведінка та множини початкових значень визначених у циліндричній області розв'язків параболічної системи з оператором Бесселя та розв'язків параболічної системи з розривними в середині області коефіцієнтами у випадку однорідних нормальних крайових умов на бічній межі циліндра та однорідних нормальних умов спряження на поверхні розриву коефіцієнтів.

АПРОБАЦІЯ РОБОТИ. Основні результати дисертації доповідались і обговорювались на:

- Всеукраїнській науковій конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (Дрогобич, 26 січня 1994 р.);

- Всеукраїнській конференції "Сучасні фізико-математичні дослідження молодих науковців вузів України"(Київ, І квітня 1994 р.);

- Міжнародній математичній конференції, присвяченій пам'яті Ганса Гана (Чернівці, 13 жовтня 1994 р.);

- виїзному засіданні Відділення математики та секції математики Західного наукового центру НАН України (Луцьк, 25 травня 1995 р.);

- конференції пам'яті академіка Михайла Кравчука в Чернівецькому університеті (Чернівці, 11 листопада 1992 р.);

- науковій конференції, присвяченій 120-річчю Чернівецького університету (Чернівці, 5 травня 1995 р.);

- науковому семінарі математичного факультету Чернівецького університету (Чернівці, І грудня 1992 р., науковий керівник семінару - проф. С.Д.Івасишен);

- наукових семінарах Чернівецького відділу ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, кафедри математичного моделювання Чернівецького університету (Чернівці, 1991-1995 рр.).

ПУБЛІКАЦІЇ. Основні результати дисертації опубліковані в 7 роботах, список яких подано в кінці реферату. Особисто дисертанткою вивчено елементи матриці Гріна задачі Коші для загальної параболічної за Петровським системи в залежності від гладкості коефіцієнтів; одержано формулу Гріна для нормальної параболічної крайової задачі з оператором Бесселя; досліджено інтегральне зображення та граничну поведінку розв'язків загальної параболічної за Петровським системи, коли порядки рівнянь довільні та рівні, і визначених у циліндричних областях розв'язків параболічних систем першого порядку по t у випадку, коли задані однорідні нормальні крайові умови на бічній межі циліндра, а також однорідні нормальні умови спряження, якщо коефіцієнти системи розривні.

СТРУКТУРА І ОБСЯГ РОБОТИ. Дисертація складається із вступу, двох розділів і списку літератури. У першому розділі два параграфи, в другому - три. Параграфи розбиті на пункти. Обсяг дисертації - 155 машинописних сторінок, з них 8 сторінок займає список літератури, який містить 59 найменувань.

ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У <u>вступі</u> обгрунтовується актуальність теми роботи, визначається мета дисертації, дається стислий огляд літератури та коротко викладається зміст роботи.

<u>Список основних позначень</u> містить ті позначення, які є загальними для всієї дисертації.

У <u>першому розділі</u> вивчаються властивості розв'язків заданої в шарі $\Pi_{(0,T]} \equiv (0,T] \times \mathbb{R}^n$ загальної параболічної за Петровським системи N рівнянь

$$D_t^{n_i} u_i(t,x) - \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{2bk_0+|k| \le 2bn_j \\ (k_0 < n_j)}} a_{k_0 k}(t,x) D_t^{k_0} D_x^{k} u_j(t,x) = f_i(t,x),$$
$$1 \le i \le N. \qquad (\mathrm{I})$$

Припускається, що виконуються наступні умови.

<u>Умова А</u>. Система (I) рівномірно параболічна за Петровським у шарі $\Pi_{[0,T]}$.

<u>Умова Б</u>. Коефіцієнти системи обмежені, задовольняють

рівномірну умову Гельдера по x з показником $\alpha\in(0,1)$, неперервні по t, при цьому неперервність по t коефіцієнтів $a^{ij}_{k_0k}$, $2bk_0+|k|=2bn_j$, $1\le i,j\le N$, рівномірна по $x\in\mathbb{R}^n$.

За цих умов існує фундаментальна матриця розв'язків (ФМР) Z задачі Коші для системи (I).

У § I досліджуються елементи матриці Гріна (МГ) задачі Коші для системи (I) з початковими умовами

$$D_t^{\mu-1}u_l(t,x)\big|_{t=0}=\varphi_l^{(\mu)}(x),\ x\in\mathbb{R}^n,\qquad \mu=1,\dots,n_l,\ 1\le l\le N. \tag{2}$$

При цьому використовуються ще такі умови.

Умова В. Коефіцієнти системи (I) мають неперервні та обмежені похідні $D_t^{k_0}D_x^k a^{ij}_{k_0k}$, $2bk_0+|k|\le 2bn_j$, $1\le i,j\le N$, які задовольняють рівномірну умову Гельдера по x.

Умова Г. $n_1=n_2=\dots=n_N\equiv m$.

У п. I.I наведені властивості ФМР Z та матриць $Z^{(\mu)}$, $\mu=1,\dots,m$,

$$Z^{(\mu)}(t,x;\tau,\xi)\equiv(-D_\tau)^{m-\mu}Z(t,x;\tau,\xi)-$$

$$\sum_{\substack{2bk_0+|k|\le \ell(\mu)\\(k_0\le m-\mu)}}(-1)^{k_0+|k|}D_\tau^{k_0}D_\xi^k\big(Z(t,x;\tau,\xi)a_{k_0+\mu,k}(\tau,\xi)\big),\ \mu=1,\dots,m-1,$$

$$Z^{(m)}(t,x;\tau,\xi)\equiv Z(t,x;\tau,\xi),$$
$$0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

де $\ell(\mu)\equiv 2b(m-\mu)$, $\mu=1,\dots,m$. Майже всі ці властивості доведені в ряді праць С.Д.Ейдельмана.

У п. I.2 дається означення МГ та доводиться теорема, яка описує її структуру.

Означення. МГ задачі Коші (I);(2) називається матриця $G=(G_0,G_1,\dots,G_N)$, $G_0=(G_0^{is})_{i,s=1}^N$, $G_j=(G_j^{i\mu})_{i=1,\mu=1}^{N,\ n_j}$, така, що розв'язки цієї задачі для довільних гладких і фінітних функцій $f=(f_1,\dots,f_N)'$ та

$$\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_N)', \ \Phi_j = (\varphi_j^{(1)}, \dots, \varphi_j^{(n_j)})', \ 1 \le j \le N$$

зображуються у вигляді

$$u(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+ \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} G_j(t,x;\xi) \Phi_j(\xi) d\xi, \ (t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

де $u = (u_1, \dots, u_N)'$. Тут і далі штрих означає транспонування.

Теорема I.I. Елементи МГ задачі Коші (I),(2) є такими:

а) якщо виконуються умови А і Б, то $G_0 = Z$, а матриці G_j, $1 \le j \le N$, є, взагалі кажучи, лінійними комбінаціями похідних від узагальнених функцій;

б) якщо виконуються умови А,Б,В, то $G_0 = Z$, а G_j, $1 \le j \le N$, виражаються через похідні від Z та коефіцієнтів системи;

в) нехай виконуються умови А,Б,В,Г, тоді $G_0 = Z$, а G_j, $1 \le j \le N$, виражаються через матриці $Z^{(\mu)}$, $\mu = 1, \dots, m$, таким чином:

$$G_j^{i\mu}(t,x;\xi) = Z_{ij}^{(\mu)}(t,x;0,\xi),$$

$$t \in (0,T], \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \mu = 1, \dots, m, \ 1 \le i,j \le N.$$

У § 2 розглядається задача Коші (I),(2) у випадку, коли система (I) однорідна ($f = 0$) і порядки її рівнянь рівні. Її матричний запис такий:

$$D_t^m u(t,x) - \sum_{\substack{2bk_0 + |k| \le 2bm \\ (k_0 < m)}} a_{k_0 k}(t,x) D_t^{k_0} D_x^k u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{3}$$

$$D_t^{\mu-1} u(t,x)\big|_{t=0} = \varphi^{(\mu)}(x), \ x \in \mathbb{R}^n, \ \mu = 1, \dots, m, \tag{4}$$

де $\varphi^{(\mu)} \equiv (\varphi_1^{(\mu)}, \dots, \varphi_N^{(\mu)})'$, $\mu = 1, \dots, m$. МГ цієї задачі породжує інтеграл Пуассона функції $\Phi = (\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(m)})$:

$$(P\Phi)(t,x)=\sum_{\mu=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^n} Z^{(\mu)}(t,x;0,\xi)\varphi^{(\mu)}(\xi)\,d\xi\,,$$
$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}\,. \tag{5}$$

Доведено, що $P\Phi$ є розв'язком задачі (3),(4), і з'ясовано, в якому розумінні (5) задовольняє початкові умови (4) у випадках, коли функція $\varphi^{(\mu)}$ є неперервно диференційовною до порядку $\ell(\mu)$, $\mu=1,\dots,m$, і коли $\varphi^{(\mu)}\in W_p^{\ell(\mu),a}$, $\mu=1,\dots,m$. Тут простір $W_p^{\ell,a}$, $1\le p\le\infty$, $\ell\ge 0$ ціле, складається з усіх вимірних за Лебегом функцій $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}_N$ ($\mathbb{C}_N$ - сукупність стовпчиків висоти N, елементи яких належать до $\mathbb{C}$), які мають узагальнені похідні до порядку ℓ і для яких скінченна норма

$$\|\varphi\|_p^{\ell,a}\equiv\sum_{|k|\le\ell}\|D^k\varphi(\cdot)\Psi_1(0,a,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\,,$$

де $\Psi_\alpha(t,a,x)\equiv\exp\{-\alpha k(t,a)|x|^q\}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $k(t,a)\equiv c_0a[c_0^{2b-1}-a^{2b-1}t]^{1-q}$, $q\equiv\frac{2b}{2b-1}$, c_0 і a - деякі невід'ємні числа такі, що $T<(\frac{c_0}{a})^{2b-1}$, $0<c_0<c$, c - стала з оцінок для матриць $Z^{(\mu)}$, $\mu=1,\dots,m$.

Для вимірної по x функції $u:\Pi_{[0,T]}\to\mathbb{C}_N$, яка має узагальнені похідні по x до порядку ℓ, при кожному $t\in[0,T]$ означимо норми

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\ell,k(t,a)}\equiv\sum_{|k|\le\ell}\|D^k u(t,\cdot)\Psi_1(t,a,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},\ 1\le p\le\infty.$$

<u>Лема 2.2</u>. Якщо $\Phi\in\prod_{\mu=1}^{m}W_p^{\ell(\mu),a}$, $1\le p\le\infty$, то функція (5) є розв'язком задачі Коші (3),(4) таким, що

$$\exists C>0\ \forall t\in(0,T]:$$
$$\|D_t^{k_0-1}(P\Phi)(t,\cdot)\|_p^{\ell(k_0),k(t,a)}\le C\sum_{\mu=1}^{m}\|\varphi^{(\mu)}\|_p^{\ell(\mu),a},$$
$$k_0=1,\dots,m; \tag{6}$$

Причому, якщо $1\le p<\infty$, то

$$\lim_{t\to 0+} \| D_t^{k_0-1}(P\Phi)(t,\cdot)-\varphi^{(k_0)}(\cdot)\|_p^{\ell(k_0),k(t,a)} = 0,$$
$$k_0=1,\dots,m, \tag{7}$$

а при $p=\infty$

$$\forall \psi \in \dot{W}_1^{\ell(k_0),-k(T,a)}:$$

$$\sum_{|k|\le \ell(k_0)} \int_{\mathbb{R}^n} (D_t^{k_0-1}(P\Phi)(t,x))' D_x^k \overline{\psi(x)}\,dx \xrightarrow[t\to 0+]{}$$

$$\longrightarrow \sum_{|k|\le \ell(k_0)} \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi^{(k_0)}(x))' D_x^k \overline{\psi(x)}\,dx,\ k_0=1,\dots,m. \tag{8}$$

Властивості розв'язків задачі (3),(4) описують наступні твердження, які є основними в цьому параграфі.

Теорема 2.I. Нехай для системи (3) виконуються умови А, Б,В і $1\le p\le\infty$. Тоді для будь-якої функції

$$\Phi \in \prod_{\mu=1}^{m} W_p^{\ell(\mu),a}$$

формулою (5) визначається єдиний розв'язок системи (3) у шарі $\Pi_{(0,T]}$, який задовольняє умови (6)-(8).

Теорема 2.2. Нехай для системи (3) виконуються умови А, Б,В, $1<p\le\infty$ і U_p - клас усіх класичних розв'язків u: $\Pi_{(0,T]}\to\mathbb{C}_N$ системи (3), які задовольняють умову

$$\|u\|_{U_p} \equiv \sup_{t\in(0,T]} \sum_{\mu=1}^{m} \|D_t^{\mu-1} u(t,\cdot)\|_p^{\ell(\mu),k(t,a)} < \infty.$$

Клас U_p, $1<p\le\infty$, складається тільки з функцій, які є інтегралами Пуассона (5) елементів $\Phi=(\varphi^{(1)},\dots,\varphi^{(m)})$, де $\varphi^{(\mu)}\in W_p^{\ell(\mu),a}$, $\mu=1,\dots,m$. Оператор P при цьому здійснює ізоморфізм між просторами $\prod_{\mu=1}^{m} W_p^{\ell(\mu),a}$ і U_p.

Якщо $\Phi\in\prod_{\mu=1}^{m} W_p^{\ell(\mu),a}$ і $u\in U_p$ - відповідні елементи, то u задовольняє початкові умови (4) в такому сенсі: якщо $1<p<\infty$, то виконуються (7), а для $p=\infty$ - співвідношення (8).

Зауважимо, що аналогічні результати одержані С.Д.Івасишеним для $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи першого порядку по t, тобто коли $m=1$. Задача (3),(4) з $\varphi^{(\mu)}\in L_p^a\equiv W_p^{0,a}$, $1\le p\le\infty$, вивчалась С.Д.Ейдельманом.

Другий розділ присвячений дослідженню інтегрального зображення та граничної поведінки при $t\to 0$ визначених у циліндричній області $Q\equiv(0,T]\times\Omega$, де $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ - обмежена або необмежена область з межею S, розв'язків параболічної системи першого порядку по t

$$\mathcal{A}u(t,x)=0, \tag{9}$$

які на бічній межі $\Gamma\equiv(0,T]\times S$ циліндра Q задовольняють нормальні крайові умови

$$\mathcal{B}u(t,x)\Big|_{\Gamma}=0. \tag{10}$$

При цьому умови на нижній основі циліндра Q або відсутні, або задаються за допомогою елементів φ з простору $\Phi^a_{p,\mu}$, $1\le p\le\infty$,

$$u(t,x)\big|_{t=0}=\varphi(x),\ x\in\Omega. \tag{11}$$

Простір $\Phi^a_{p,\mu}\equiv\begin{cases}L^a_{p,\mu}(\Omega),\ 1<p\le\infty,\\ M^a(\Omega),\ p=1,\end{cases}$ де $L^a_{p,\mu}(\Omega)$ - це простір усіх вимірних за Лебегом функцій φ: $\Omega\to\mathbb{C}_N$ із скінченною нормою

$$\|\varphi\|^a_{p,\mu}\equiv\|\varphi(\cdot)\Psi_1(0,a,\cdot)\|_{L_p(\Omega,d\mu)}$$

(μ - деяка міра, задана на σ-алгебрі вимірних за Лебегом множин простору $\mathbb{R}^n$); $M^a(\Omega)$ - сукупність усіх σ-адитивних функцій $\varphi:\mathcal{B}(\Omega)\to\mathbb{C}_N$ ($\mathcal{B}(\Omega)$ - σ-алгебра борельових підмножин області Ω) таких, що

$$\|\varphi\|^a\equiv\int_\Omega\Psi_1(0,a,x)\,d|\varphi|(x)<\infty,$$

$|\varphi|$ - повна варіація φ. Зауважимо, що простір $L^a_{1,\mu}(\Omega)$

вкладається у простір $M^{a}(\Omega)$. Для обмеженої області Ω вважається, що $a=0$ і $\Psi_{\alpha}(0,a,x)=1,\ x\in\Omega$.

Для вимірної за Лебегом по x функції $\mu:\overline{\overline{Q}}\to\mathbb{C}_N$, $\overline{\overline{Q}}\equiv[0,T]\times\overline{\Omega}$, означимо норми

$$\|u(t,\cdot)\|_{p,\mu}^{k(t,a)}\equiv\|u(t,\cdot)\Psi_1(t,a,\cdot)\|_{L_p(\Omega,d\mu)},\ 1\le p\le\infty.$$

Припустимо, що задача (9),(10) рівномірно параболічна, при цьому

$$A=ID_t^1-\sum_{|k|\le 2b}a_k(t,x)D_x^k,$$

$$B=\begin{pmatrix}B_1\\ \cdots\\ B_{bN}\end{pmatrix},\ B_j=\sum_{|k|\le r_j}b_{jk}(t,x)D_x^k,\ 0\le r_j<2b,\ 1\le j\le bN.$$

Тоді міра μ - це міра Лебега.

Однорідна матриця Гріна (ОМГ) G_0 цієї задачі породжує інтеграл Пуассона елемента $\varphi\in\Phi_{p,\mu}^{a}$, $1\le p\le\infty$,

$$(P\varphi)(t,x)=\int_{\Omega}G_0(t,x;0,\xi)\times\begin{cases}\varphi(\xi)\,d\mu(\xi), & 1<p\le\infty,\\ d\varphi(\xi), & p=1,\end{cases}$$

$$(t,x)\in Q. \qquad (12)$$

За допомогою властивостей ОМГ G_0, які встановлені в працях С.Д.Ейдельмана і С.Д.Івасишена, досліджуються властивості інтеграла Пуассона (12), на підставі яких одержуються такі властивості розв'язків задачі (9)-(11):

1) клас $U_{p,\mu}$, $1\le p\le\infty$, усіх розв'язків $u:Q\to\mathbb{C}_N$ задачі (9),(10) в $\overline{Q}\equiv(0,T]\times\overline{\Omega}$, які задовольняють умову

$$\|u\|_{U_{p,\mu}}\equiv\sup_{t\in(0,T]}\|u(t,\cdot)\|_{p,\mu}^{k(t,a)}<\infty, \qquad (13)$$

складається тільки з функцій, які є інтегралами Пуассона (12) елементів $\varphi\in\Phi_{p,\mu}^{a}$;

2) Оператор P здійснює ізоморфізм між просторами $\Phi_{p,\mu}^{a}$ і $U_{p,\mu}$;

3) якщо $\varphi \in \Phi^{a}_{p,\mu}$ і $u \in U_{p,\mu}$ - відповідні елементи, то u задовольняє умову (11) в такому сенсі:

при $1<p<\infty$ $\lim\limits_{t\to 0+} \|u(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|^{k(t,a)}_{p,\mu}=0$,

при $p=\infty$ $\forall \psi \in L^{-k(T,a)}_{1,\mu}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega}(u(t,x))'\overline{\psi(x)}\,dx \xrightarrow[t\to 0+]{} \int_{\Omega}\varphi'(x)\overline{\psi(x)}\,dx,$$

при $p=1$ $\forall \psi \in C^{-k(T,a)}_{0}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega}\psi'(x)\overline{u(t,x)}\,dx \xrightarrow[t\to 0+]{} \int_{\Omega}\psi'(x)\,d\overline{\varphi(x)},$$

де $L^{-k(T,a)}_{1,\mu}(\Omega)$ та $C^{-k(T,a)}_{0}(\Omega)$ - простори відповідно вимірних за Лебегом та неперервних функцій $\psi:\Omega\to\mathbb{C}_N$, для яких виконуються відповідно умови $\|\psi(\cdot)\Psi_{-1}(T,a,\cdot)\|_{L_1(\Omega,d\mu)}<\infty$ та $|\psi(x)|\Psi_{-1}(T,a,x)\xrightarrow[|x|\to\infty]{}0$;

4) умова (13) є необхідною і достатньою для того, щоб розв'язок u зображувався в інтегральному вигляді (12), а також для того, щоб простори $\Phi^{a}_{p,\mu}$, $1\le p\le\infty$, були множинами початкових значень розв'язків задачі (9)-(11) в $\overline{Q}$.

У § 4 розглядається випадок, коли (9)-(11) є нормальною параболічною крайовою задачею з оператором Бесселя $B_{x_n}\equiv \equiv D^2_{x_n}+\frac{2\nu+1}{x_n}D^1_{x_n}$, $x_n>0$, $\nu\ge-\frac{1}{2}$, в області вигляду $Q\equiv(0,T]\times\Omega'\times(0,\infty)$, де Ω' - область у $\mathbb{R}^{n-1}$ з межею S', тобто область $\Omega\equiv\Omega'\times(0,\infty)$ - це циліндр у півпросторі $\mathbb{R}^n_+\equiv\{x\in\mathbb{R}^n \mid x_n>0\}$, бічна межа якого S, а основа $S^0\equiv\{(x',0)\mid x'\in\Omega'\}$. Диференціальні вирази $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}_j$ мають вигляд

$$\mathcal{A}=I D^1_t-\sum_{|k'|+2\ell\le 2b} a_{k'\ell}(t,x)D^{k'}_{x'}B^{\ell}_{x_n},$$

$$\mathcal{B}_j=\sum_{|k'|+2\ell\le r_j} b^{k'\ell}_{j}(t,x)D^{k'}_{x'}B^{\ell}_{x_n},\quad 1\le j\le bN,$$

де $x'=(x_1,\dots,x_{n-1})$ – точка з $\mathbb{R}^{n-1}$, $k'=(k_1,\dots,k_{n-1})$ – $(n-1)$-вимірний мультиіндекс, а $a_{k'\ell}$ – квадратні матриці порядку N, $b^{k}_{j\ell}$ – матриці-рядки довжиною N, числа $r_1,\dots,r_{bN}$ такі ж, як у § 3. Поряд з умовами (10) на $\Gamma^0\equiv(0,T]\times S^0$ задається умова

$$D^1_{x_n}u(t,x)\big|_{\Gamma^0}=0. \tag{14}$$

ОМГ G_0 задачі з оператором Бесселя (9)-(11),(14) побудована і вивчена у працях В.В.Крехівського та М.І.Матійчука. ОМГ G_0 породжує інтеграл Пуассона (12) елемента $\varphi\in\Phi^{a}_{p,\mu}$, $1\le p\le\infty$. При цьому μ є мірою, визначеною на σ-алгебрі вимірних за Лебегом множин $A\subset\mathbb{R}^n$ і зв'язаною з мірою Лебега формулою $\mu(A)=\int_A x_n^{2\nu+1}\,dx$.

За допомогою тієї ж методики, яка використовується у § 3, встановлені такі ж властивості 1)-4) для задачі (9)-(11),(14) з оператором Бесселя. Відмітимо, що при їх доведенні використовується формула Гріна. Для задачі Коші (3), (4) вона виведена С.Д.Ейдельманом, для рівномірно параболічної задачі (9)-(11) з § 3 - С.Д.Івасишеним, а для задачі спряження з § 5 - М.М.Дрінь. У дисертаційній роботі доведено, що вона має місце і для задачі з оператором Бесселя.

У § 5 задача (9)-(11) є задачею спряження: область Ω розділена поверхнею $S^1\subset\mathbb{R}^{n-1}$ на дві підобласті Ω^1 і Ω^2, причому $S^1\cap S=\varnothing$, і поверхня $\Gamma^1\equiv(0,T]\times S^1$ є поверхнею розриву коефіцієнтів системи (9), яка розглядається в $Q\setminus\Gamma^1$,

$$\mathcal{A}u(t,x)=\begin{cases}\mathcal{A}^1u^1(t,x)=0,\ (t,x)\in Q^1,\\ \mathcal{A}^2u^2(t,x)=0,\ (t,x)\in Q^2,\end{cases}$$

$$\mathcal{A}^i=ID^1_t-\sum_{|k|\le 2b}a^i_k(t,x)D^k_x,$$

$Q^i\equiv(0,T]\times\Omega^i$, u^i – звуження функції u на i-ту підобласть, $i=1,2$; крайові умови (10) такого ж вигляду, як і в § 3; на Γ^1 задаються ще умови спряження

$$\sum_{i=1}^{2} \mathscr{C}_j^i u^i(t,x)\Big|_{\Gamma^1} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{|k|\le s_j} c_{jk}^i(t,x) D_x^k u^i(t,x)\Big|_{\Gamma^1} = 0,$$

$$0 \le s_j < 2b,\ 1 \le j \le 2bN. \tag{I5}$$

ОМГ $G_0 = (G_{01}, G_{02})$, $G'_{0i} = (G_{0i}^1, G_{0i}^2)$, $i=1, 2$, цієї задачі побудована і вивчена у працях С.Д.Івасишена та С.Д.Ейдельмана, деякі її властивості встановлені М.М.Дрінь.

Нехай $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix} \in \Phi_{p,\mu}^\alpha$, $1 \le p \le \infty$, де μ – міра Лебега. Це означає, що $\varphi^i \in L_{p,\mu}^\alpha(\Omega^i)$ при $1 < p \le \infty$ та $\varphi^i \in M^\alpha(\Omega^i)$ при $p = 1$, при цьому

$$\|\varphi\|_{\Phi_{p,\mu}^\alpha} \equiv \begin{cases} \sum_{i=1}^{2} \|\varphi^i\|_{p,\mu}^\alpha, & 1 < p \le \infty, \\ \sum_{i=1}^{2} \|\varphi^i\|^\alpha, & p = 1. \end{cases}$$

Інтегралом Пуассона елемента $\varphi \in \Phi_{p,\mu}^\alpha$, $1 \le p \le \infty$, називається функція

$$(P\varphi)(t,x) = \begin{cases} (P_1\varphi)(t,x), & (t,x) \in Q^1, \\ (P_2\varphi)(t,x), & (t,x) \in Q^2, \end{cases} \tag{I6}$$

$$(P_i\varphi)(t,x) = \sum_{j=1}^{2} \int_{\Omega^j} G_{0i}^j(t,x;0,\xi) \times \begin{cases} \varphi^j(\xi)\,d\xi, & 1 < p \le \infty, \\ d\varphi^j(\xi), & p = 1. \end{cases} \tag{I7}$$

У п.5.2–5.4 за допомогою методики з § 3 з урахуванням властивостей ОМГ G_0 та формул (I6),(I7) для інтеграла Пуассона елемента $\varphi \in \Phi_{p,\mu}^\alpha$, $1 \le p \le \infty$, встановлено властивості інтеграла Пуассона (I6) та розв'язків нормальної параболічної задачі спряження, які аналогічні відповідним властивостям з § 3.

Зауважимо, що подібність одержаних результатів у § 3–5 і методики їх доведень зумовлена подібністю властивостей однорідних матриць Гріна крайових задач, які розглядаються, та конструкцій відповідних інтегралів Пуассона. Тому аналогічні результати можна одержати і у випадку нелокальної параболічної крайової задачі.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ І ВИСНОВКИ

Досліджено структуру МГ задачі Коші для загальної параболічної за Петровським системи. Елементи МГ є лінійними комбінаціями похідних від узагальнених або звичайних функцій в залежності від гладкості коефіцієнтів системи.

Для параболічної за Петровським системи у випадку довільних рівних порядків рівнянь знайдено необхідні та достатні умови зображення розв'язків, визначених у шарі, у вигляді інтегралів Пуассона функцій спеціальних вагових просторів Соболева та досліджено їх граничну поведінку при $t \to 0$.

Знайдено необхідні та достатні умови, за яких розв'язки нормальної рівномірно параболічної крайової задачі зображуються у вигляді інтегралів Пуассона елементів вагових L_p - просторів чи просторів узагальнених мір з вагою. При цьому ці простори є множинами початкових значень даних розв'язків.

Одержані результати узагальнено на випадок крайової задачі з оператором Бесселя та нормальної задачі спряження в циліндричних областях.

Доведено формулу Гріна для нормальної параболічної крайової задачі з оператором Бесселя.

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ДИСЕРТАЦІЇ ОПУБЛІКОВАНІ В РОБОТАХ:

1. Кондур О.С. Нормальні параболічні крайові задачі для систем з розривними коефіцієнтами // Доп. АН України.- 1994.- № 12.- С. 18-22.

2. Івасишен С.Д., Кондур О.С. Про інтегральне зображення розв'язків нормальних параболічних крайових задач // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр.- Київ: Ін-т математики АН України, 1993.- Вип. 4.- С. 82-96.

3. Кондур О.С. Про розв'язки параболічних систем довільних порядків // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: Сб. науч. тр.- Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994.- С. I06-I07.

4. Івасишен С.Д., Кондур О.С. Про матрицю Гріна задачі Коші для загальної параболічної за Петровським системи // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана.- Чернівці: Рута, 1995.- С. II9-I4I.

5. Кондур О.С., Ивасишен С.Д. Свойства интегралов Пуассона для параболических граничних задач // Черновиц. ун-т.- Черновцы, I992.- 35 с.- Деп в УкрИНТЭИ 26.I0.92, № I738-Ук92.

6. Кондур О.С. Про інтегральне зображення розв'язків параболічних систем довільних порядків // Матеріали наукової конференції викладачів, співробітників та студентів, присвяченої I20-річчю заснування Чернівецького університету (4-6 травня I995 р.). Том 2. Фізико-математичні науки. Чернівці: Рута, I995.- С. 9I.

7. Кондур О.С. Про інтеграли Пуассона для нормальних параболічних крайових задач з оператором Бесселя // Всеукраїнська наукова конференція "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (25-27 січня I994 р., Дрогобич): Тези доповідей.- Київ, I994.- С. 7I.

Kondur O.S. Investigation of the integral representation and boundary properties of the solutions of the parabolic systems. Manuscript. Thesis for a degree of Candidate of Science (Ph.D) in Physics and Mathematics, speciality 01.01.02 - Differential Equations. Chernivtsi State University, Chernivtsi, 1995.

The properties of the classic solution of the parabolic systems, which are determinated in stripe or cylindrical domain, are investigated. The neccessary and sufficient conditions due to the fact that these solutions are represented in the form of Poisson's integrals of elements of special weighting spaces are found. These spaces are sets of the initial value of these solutions.

Кондур О.С. Исследование интегрального представления и граничных свойств решений параболических систем. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения. Черновицкий государственный университет, Черновцы, 1995.

Исследуются свойства классических решений параболических систем, определенных в слое или цилиндрической области. Найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых эти решения представимы в виде интегралов Пуассона элементов специальных весовых пространств. Доказано, что эти пространства есть множествами начальных значений рассматриваемых решений.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: параболічна система, нормальна параболічна крайова задача, матриця Гріна задачі Коші, однорідна матриця Гріна крайової задачі, інтегральне зображення, інтеграл Пуассона.

Підписано до друку 15.09.95.
Формат 60х84/16. Папір друкарський.
Друк офсетний. Ум.друк.арк. 1,0.
Обл.-вид.арк. 1,0. Тираж 100 прим.
Зам. 269.

Друкарня видавництва "Рута" Чернівецького держуніверситету
274012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2

445989