НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

ЕЛЕЕВ Валерий Абдурахманович

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

01.01.02. - дифференциальные уравнения
01.01.03. - математическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Киев - 1995

Диссертация есть рукопись
Работа выполнена на мате[...]
Балкарского госуниверсите[...]

Научный консультант - доктор физико - математических наук, профессор, академик РАЕ и АМАН Нахушев А.М.

Официальные оппоненты: - доктор физико - математических наук, профессор Барановский Ф.Т.

- доктор физико - математических наук, профессор Ройтберг Я.А.

- доктор физико-математических наук, профессор Солдатов А.П.

Ведущая организация - Институт прикладных проблем математики и механики НАН Украины (г.Львов)

Защита диссертации состоится "17" октября 1995 году в 15 часов на заседании специализированного Совета Д. 01. 66. 02. при Институте математики НАН Украины по адресу: 252601, Киев 4, ГСП, ул. Терещеновская, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института.

Автореферат разослан "15" сентября 1995г.

Ученый секретарь специализированного совета Лучка А.Ю.

Актуальность темы. В силу своей исключительной прикладной важности теория уравнений смешанного типа в настоящее время стала одной из центральных проблем современной теории уравнений с частными производными.

В математической литературе имеются многочисленные работы отечественных и зарубежных авторов, в которых для уравнений смешанного типа исследуются основные краевые задачи (задачи Трикоми и Геллерстедта, общая смешанная задача Бицадзе, задача Франкля) и ставится ряд новых задач. Достаточно полная библиография по теории краевых задач для уравнений смешанного типа содержатся в монографиях А.В.Бицадзе,[1] Л.Берса,[2] М.С.Салахитдинова,[3] М.М.Смирнова,[4] а также в докторской диссертации А.М.Нахушева.[5]

Далее в работах А.В.Бицадзе, К.И.Бабенко, В.Н.Врагова, Н.И.Гайдая, Д.К.Гвазава, В.П.Диденко, М.М.Зайнулабидова, Т.Ш.Кальменова, Г.Д.Каратопраклиева, М.Мередова, Е.И.Моисеева, А.М.Нахушева, М.С.Салахитдинова, М.М.Смирнова, Р.И.Сохадзе, С.М.Пономарева, А.Хасанова и др. были исследованы как основные краевые задачи, так и целый ряд новых краевых задач для уравнений смешанного типа на плоскости и в пространстве.

---

1) Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. Итоги науки. Изд. АН СССР, 1959.

2) Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М., ИЛ, 1961.

3) Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент, "ФАН", УзССР, 1974.

4) Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М., "Наука", 1970.

5) Нахушев А.М. К теории линейных краевых задач для гиперболических и смешанных уравнений второго порядка. Докт. дис. (библ. Института математики СО АН СССР), 1971.

Во всех этих работах исследовались в основном локальные краевые задачи для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа, как с одной, так и с двумя параллельными или перпендикулярными линиями изменения типа в плоскости и пространстве.

Что касается нелокальных краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений и краевых задач для уравнений смешанного, смешанно - составного, смешанно-нагруженного гиперболо-параболического типа, то им посвящено сравнительно мало работ. Между тем эти уравнения так же, как эллиптико-гиперболические, лежат в основе математических моделей различных природных явлений. Локальные и нелокальные краевые задачи для таких уравнений встречаются, например, при изучении движения малосжимаемой жидкости в канале, окруженном пористой средой, в теории распространения электромагнитного поля в неоднородной среде, состоящей из диэлектрика и проводящей среды, и в ряде других областей физики. Так, в канале гидродинамическое давление жидкости удовлетворяет волновому уравнению, а в пористой среде - уравнению фильтрации, которое в данном случае совпадает с уравнением диффузии. При этом на границе канала выполняются некоторые условия сопряжения. Аналогичная ситуация имеет место для магнитной напряженности электромагнитного поля в указанной выше среде. Распространение установившихся волн в стратифицированной жидкости, занимающей неограниченную область, когда частота установившихся колебаний ω меньше частоты Вейсяля-Брента, уравнение для амплитуды установившихся колебаний является уравнением гипербоического типа, а если частота установившихся колебаний ω совпадает с частотой Вейсяля- Брента, то происходит параболическое вырождение. Многие математические модели тепло- и массобмена в капиллярно-пористых средах, пластовых систем, формирования температурного поля в системе, составленной из теплоизолированных с боковой поверхности, ограниченного и полуограниченного стержней с различными теплофизическими свойствами сводятся к краевым задачам для смешанных гиперболо-параболических уравнений, вообще говоря, с разрывными коэффициентами.

За последние годы существенно повысился интерес к нагруженным уравнениям и их приложениям. Исследован ряд важнейших задач для основных типов нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных и даны их приложения к долгосрочному прогнозу почвенной влаги и динамики грунтовых вод, установлена существенная взаимосвязь между нелокальными задачами и нагруженными уравнениями.

В связи с этим тема диссертации является актуальной и необходимым этапом исследования как локальных, так и нелокальных краевых задач в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Цель работы. Основная цель работы состоит в постановке и исследовании локальных и нелокальных краевых задач для вырождающихся гиперболического, смешанного, смешанно-составного, смешанно- нагруженного гиперболо-параболического типов уравнений второго и третьего порядка с двумя независимыми переменными.

Общая методика исследования. Единственность решения краевых задач со смещением (по терминалогии А.М.Нахушева) для гиперболических с одновременным вырождением типа и порядка, смешанного, смешанно-составного, смешанно-нагруженного гиперболо-параболического типов уравнений устанавливается с помощью аналога известного принципа экстремума А.В.Бицадзе, а существование - методом эквивалентной редукции к интегральным уравнениям Вольтерра или Фредгольма второго рода или же к сингулярным интегральным уравнениям нормального типа. В случае задачи Трикоми и обобщенной задачи Трикоми для смешанных гиперболо-параболических уравнений как с вырождением первого рода, так и с одновременным вырождением типа и порядка, единственность решения доказывается методом энергетических неравенств, являющегося существенным обобщением методов К.О.Фридрихса и А.М.Нахушева. Существование решения этих задач доказывается как методом "интегралов энергии" так и редукцией к уравнениям Фредгольма второго и третьего родов или же к сингулярным интегральным уравнениям нормального типа.

<u>Состояние вопроса.</u> Впервые краевые задачи со смещением для вырождающихся гиперболических и смешанных эллиптико-гиперболических уравнений были сформулированы и исследованы в 1969-1972 г.г. А.В.Бицадзе и А.М.Нахушевым. Затем теория этих задач как для вырождающихся гиперболических первого и второго родов так и для модельных смешанных эллиптико-гиперболических уравнений была развита в работах Х.Г.Бжихатлова, С.К.Кумыковой, М.С.Салахитдинова, М.М.Смирнова, Megumi Saigo, М.Мирсабурова, А.К.Уринова. Что касается локальных и нелокальных краевых задач для смешанных гиперболо-параболических уравнений, то они рассматривались, в основном, в работах А.С.Бердышева, Х.Г.Бжихатлова, В.Н.Врагова, Т.Д.Джураева, Г.Д.Каратопраклиева, А.М.Нахушева, Н.Попиванова и К.Б.Сабитова.

Для уравнения

$$y^{2m}u_{xx} + yu_{yy} + \lambda u_y = 0,$$

где m - фиксированное натуральное число, а λ - заданная действительная постоянная, с одновременным вырождением типа и порядка, когда $(1-2m)/2 \leqslant \lambda < 1$ А.В.Бицадзе было показано, что задача Коши с данными на линии вырождения y=0, вообще говоря, не является корректной. В связи с этим им были предложены видоизмененные постановки задачи Коши и задачи со смещением.

Видоизменные задачи Коши для одного и систем вырождающихся гиперболических уравнений второго рода были также исследованы С.А.Терсеновым.

Вопрос корректной постановки видоизмененных задач Коши и задач со смещением, когда λ меняется вне полусегмента $1/2-m\leqslant\lambda<1$, оставался не решенным. Также не были изучены аналог задачи Трикоми, нелокальные краевые задачи и обобщенная задача Трикоми для общих смешанных, смешанно-составных, смешанно-нагруженных гиперболо- параболических уравнений, как с характеристической так и с нехарактеристической линией изменения типа.

<u>Научная новизна</u>. В работе полностью исследован вопрос однозначной разрешимости видоизмененных задач Коши и нелокальных краевых задач со смещением для гиперболического уравнения с одновременным вырождением типа и порядка на части границы. Доказаны теоремы единственности и существования решения нелокальных краевых задач для уравнений смешанного гиперболо-параболического типа с разрывными коэффициентами. Для широкого класса гиперболо-параболических операторов с нехарактеристической линией изменения типа получены априорные оценки, из которых в частности следует единственность регулярного решения аналога задачи Трикоми для уравнений смешанного, смешанно-составного, смешанно-нагруженного гиперболо-параболического типов.

<u>Практическая и теоретическая ценность.</u> Результаты работы представляют математический интерес. Они могут найти широкое применение при математическом моделировании процессов движения малосжимаемой жидкости в канале и распространении электромагнитного поля в неоднородной среде, а также в теории тепло-массообмена в капиллярно-пористых средах, пластовых систем , формировании температурного поля

в системах, составленных из теплоизолированных с боковых поверхностей, составленных из ограниченных, ограниченного и полуограниченного стержней с различными теплофизическими свойствами, особенно в задачах долгосрочного прогнозирования водно-солевого режима на мелиорируемых площадях.

<u>Апробация работы.</u> Результаты диссертации докладывались и обсуждались на объединенном научно-исследовательском семинаре по современному анализу Кабардино-Балкарского госуниверситета (КБГУ) (руководитель-заслуженный деятель науки КБР, профессор Нахушев А.М.); на всесоюзном семинаре по уравнениям смешанного типа и родственным проблемам функционального анализа в г.Нальчике, 1976г. (руководитель-член-корреспондент РАН Бицадзе А.В.); на республиканском симпозиуме по дифференциальным уравнениям в г.Ашхабаде, 1978г. (руководитель-академик АН УзССР Салахитдинов М.С.); на ежегодных конференциях профессорско-преподавательского состава математического факультета и сотрудников НИИ прикладной математики и механики КБГУ в г. Нальчике 1978-1989 г.г. (руководитель-заслуженный деятель науки КБР, профессор Нахушев А.М.); на объединенных научно-исследовательских семинарах по уравнениям смешанного типа и их приложениям к моделированию и автоматизации проектирования мелиоративных и водохозяйственных систем в г. Нальчике, 1981 г. (руководитель - член-корреспондент РАН Бицадзе А.В.);

Нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений смешанного типа и родственные проблемы непрерывного анализа в г.Нальчике, 1982 (руководитель заслуженный деятель науки КБР, профессор Нахушев А.М.); методы математического моделирования в системах автоматизированого проектирования и планирования в г.Нальчике, 1983 г; САПР и АСПР в меллиорации в г.Нальчике, 1985 (руководитель заслуженный деятель науки КБР, профессор Нахушев А.М.); нелокальные задачи для уравнений в частных производных и их приложения к моделированию и автоматизации проектирования сложных систем в г.Нальчике, 1986г.(руководитель - член-корреспондент РАН Бицадзе А.В.), нелокальные задачи и их приложения к автоматизированным системам в г.Нальчике, 1989 (руководитель - член-корреспондент РАН Бицадзе А.В.); на заседаниях школы-семинара по нелинейным краевым задачам математической физики и их приложениям, 1990-1993 (руководитель - академик НАН Украины Митропольский Ю.А.), школы семинара по современным проблемам анализа и математическому моделированию в г.Нальчике, 1994 (руководитель - заслуженный деятель науки КБР, профессор Нахушев А.М.).

Публикация. По теме диссертации опубликовано 33 работы.

Объем работы. Диссертация объемом 266 машинописных страниц состоит из введения и четырех глав, разбитых на 14 параграфов. Библиография содержит 158 наименований.

ГЛАВА I

§1. Рассмотрим уравнение

$$y^{2m}u_{xx} + yu_{yy} + \lambda u_y = 0, \qquad (1)$$

где m и λ определены выше.

В этом параграфе ставятся и исследуются некоторые видоизмененные задачи Коши для уравнения (1), когда λ меняется вне полусегмента $1/2-m\leqslant\lambda<1$.

Пусть Ω - конечная односвязная область плоскости независимых переменных x, y, ограниченная характеристиками AC и BC уравнения (1), выходящими из точки $C(1/2,\ y_c)$, $y_c<0$ и отрезком $J\equiv AB$: $0\leqslant x\leqslant 1$, $y=0$. Имеет место следующая

Теорема 1.1. Существует единственное регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

1) если $-2m<\lambda<1/2-m$, $\tau(x)\in C^3(J)$, $\nu(x)\in C^2(J)$, то $u(x,0)=\tau(x)$,

$$\lim_{y\to-0} (-y)^{\lambda}[u_y(x,y)-\omega_0(x,y)] = \nu(x);$$

2) если $\lambda=1$, $\tau(x)$, $\nu(x)\in C^2(J)$, то

$$\lim_{y\to-0} u(x,y)/[\log(-y)\tfrac{2m+1}{2}] = \tau(x);$$

$$\lim_{y\to-0} (-y)\log^2(-y)\tfrac{2m+1}{2}\{[u(x,y)-\omega_1(x,y)]/[\log(-y)\tfrac{2m+1}{2}]\}'_y = \nu(x);$$

3) если $\lambda=-2m+(2m+1)(-n-\gamma+1/2)$, $|\gamma|<1/2$, $n=0,1,2,\dots$, то

$u(x,0) = \tau(x)$, $\lim\limits_{y\to-0} (-y)^{\lambda}[u(x,y)-\omega_2(x,y)]'_y = \nu(x)$, или $u(x,0) = \tau(x)$,

$\lim\limits_{y\to-0} (-y)^{-(2m+1)n-2m}[u(x,y)-\omega_3(x,y)]'_y = \nu(x)$, когда $\lambda=-(2m+1)n-2m$ и

$\tau(x) \in C^{2n+4}(J)$, $\nu(x) \in C^2(J)$;

4) если $\lambda>1$, $\tau(x)\in C^{2n+4}(J)$, $\nu(x)\in C^2(J)$, то $\lim\limits_{y\to-0} (-y)^{\lambda-1}u(x,y)=\tau(x)$,

$\lim\limits_{y\to-0} (-y)^{2-\lambda}\{[(-y)^{\lambda-1}u(x,y)]'_y-\omega^0_{\lambda}(x,y)\} = \nu(x)$, когда $m+3/2<\lambda<2+2m$ и

$\lim\limits_{y\to-0} (-y)^{\lambda-1}u(x,y)=\tau(x)$, $\lim\limits_{y\to-0} (-y)^{2-\lambda}[(-y)^{\lambda-1}u(x,y)-\omega_{\lambda}(x,y)]'_y = \nu(x)$,

когда $\lambda=1+(2m+1)(n+1/2-\gamma)$ или $\lambda=(2m+1)(n+2)-2m$, где

$$\omega_0(x,y) = \rho_0(-y)^{\frac{2m-1}{2}} \int_0^1 \tau'(\xi)[t(1-t)]^{\beta_0-1/2}(1-2t)dt,$$

$$\omega_1(x,y) = \int_0^1 \tau(\xi)[t(1-t)]^{-1/2}\log[\tfrac{1}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} t(1-t)]dt,$$

$$\omega_2(x,y)=\sum_{k=0}^{n+1}P_k(n,\gamma)\,\frac{(-y)^{(2m+1)k}}{(2m+1)^{2k}}\int_0^1 F^{(2k)}(\xi)[t(1-t)]^{k+\gamma}dt,$$

$$\omega_3(x,y)=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{æ_k}{(2m+1)^{2k}}(-y)^{(2m+1)k}\int_0^1 F^{(2k+1)}(\xi)[t(1-t)]^{k+1/2}dt+ \quad (2)$$

$$+\frac{(-y)^{(n+1)(2m+1)/(2n+1)!!2^{3(n+1)}}}{(2m+1)^{2(n+1)!!}}\int_0^1 F^{(2n+1)}(\xi)[t(1-t)]^{n+1/2}dt\ \times$$

$$\times\ log\Big[\frac{1}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}t(1-t)\Big]dt,\quad \xi=x-\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}(1-2t),$$

$$\omega_\lambda^0(x,y)=\rho_1(-y)^{\frac{2m-1}{2}}\int_0^1\tau'(\xi)(1-2t)[t(1-t)]^{3/2-\beta_0}dt,$$

$$\omega_\lambda(x,y)=æ^0\omega_2(x,y),\quad \text{если } \lambda=1+(2m+1)(n+1/2-\gamma);$$

и, наконец, $\omega_\lambda(x,y)=æ^0\omega_3(x,y)$, если $\lambda=(2m+1)(n+2)-2m$; ρ_0, ρ_1, $æ^0$, $æ^k$, $P_k(n,\gamma)$ – известные постоянные.

§2. В этом параграфе исследуются краевые задачи со смещением на характеристической части границы, являющиеся непосредственными обобщениями задачи Дарбу для уравнения (1).

Задача 2.1. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами: 1) $u(x,y)\in C(\bar\Omega)\cap C^1(\Omega\cup J)$; 2) $u(x,y)$ – регулярное в области Ω решение уравнения (1) удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(x,0)=\tau(x),\ \forall x\in\bar J,$$

$$\alpha(x)D_{0x}^{3/2-\beta_0}u[\theta_0(x)]+\beta(x)D_{x1}^{3/2-\beta_0}u[\theta_1(x)]=\delta(x),\ \forall x\in\bar J, \quad (3)$$

где $\beta_0=(2m+\lambda)/(2m+1)$, $\tau(x)\in C^1(\bar J)\cap C^5(J)$,

$$\alpha(x),\ \beta(x),\ \delta(x)\in C(\bar J)\cap C^2(J),\ \alpha(x)x^{1/2-\beta_0}+\beta(x)(1-x)^{1/2-\beta_0}\neq 0,$$

$$\forall x \in \bar{J}, \quad -2m<\lambda<1/2-m,$$

$$\theta_0(x) = \frac{x}{2} - i\left(\frac{2m+1}{4}x\right)^{\frac{2}{2m+1}}, \quad \theta_1(x) = \frac{1+x}{2} i\left(\frac{2m+1}{4}(1-x)\right)^{\frac{2}{2m+1}},$$

$D^{l}_{0x}(D^{l}_{x1})$ - оператор дробного интегрирования от 0 до x, (от x до 1) порядка $-l$ при $l<0$ и обобщенного в смысле Лиувилля, диффренцирования порядка l при $l>0$.

Задача 2.2. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup J)$, причем функция

$$\lim_{y\to-0} (-y)^{\lambda}[u(x,y)-\omega_2(x,y)]'_y = \nu(x) \in C^2(J);$$

2) $u(x,y)$ - регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (3) и

$$\alpha(x)D^{\rho}_{0x}x^{\mu_1}u[\theta_0(x)] + \beta(x)D^{\rho}_{x1}(1-x)^{\mu_1}u[\theta_1(x)] = \delta(x)$$

$\forall x \in J$, где $\tau(x) \in C^{p+1}(\bar{J}) \cap C^{2n+p+5}(J)$,

$\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\delta(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J)$, $\alpha(x)x^{n-\gamma}+\beta(x)$ x

x $(1-x)^{n-\gamma} \neq 0$, $\forall x \in \bar{J}$, $\lambda=(2m+1)(-n+1/2+\gamma)-2m$,

$-1/2<\gamma<1/2$, $n=0,1,2,\ldots,\rho=1+n-\gamma$, $\mu_1=1-2(\gamma-n)-2(1-\lambda)/(2m+1)$,

p - целая часть числа $\rho \geqslant p$, $\omega_2(x,y)$ определяется формулой (2).

Задача 2.3. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{\Omega} \setminus \bar{J})$;

2) $u(x,y)$ - регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{y\to-0} \frac{u(x,y)}{\log(-y)^{\frac{2m+1}{2}}} = \tau(x),$$

$$\alpha(x)D^{1/2}_{0x}\{u[\theta_0(x)] - v_1[\theta_0(x)]\} +$$

$$+\beta(x)D_{x1}^{1/2}\{u[\theta_1(x)] - \upsilon_2[\theta_1(x)]\} = \delta(x),\ \forall x\in J,$$

где

$$\upsilon_1(x,y) = \int_0^1 \tau(\xi)[t(1-t)]^{-1/2}\log\frac{1-t}{4}\,dt,$$

$$\upsilon_2(x,y) = \int_0^1 \tau(\xi)[t(1-t)]^{-1/2}\log\frac{t}{4}dt,\ \lambda=1,$$

$$\tau(x)\in C^1(\bar{J})\cap C^2(J),\ \alpha(x),\ \beta(x),\ \delta(x)\in C(\bar{J})\cap C^2(J),$$

$$(1-x)^{1/2}\alpha(x) + x^{1/2}\beta(x) \neq 0,\quad \forall x\in\bar{J}.$$

Опираясь на известные свойства операторов D_{0x}^{l}, D_{x1}^{l} доказаны единственность и существование решения задач 2.1, 2.2, 2.3.

§3. Рассмотрим уравнение смешанного гиперболо-параболического типа

$$0 = \begin{cases} |x|^p u_{yy} - |x|^q u_{xx} + \alpha u_x + \beta u_y,\ x<0, \\ u_{xx} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u,\ x>0, \end{cases} \tag{4}$$

где p, q – действительные неотрицательные числа в конечной односвязной смешанной области Ω плоскости независимых переменных x, y, ограниченной отрезками AB, BB_0, A_0B_0 прямых y=0, x=1, y=1 соответственно, и лежащих в полуплоскости x>0 и характеристиками AC и A_0C уравнения (4), выходящими из точки $C(x_c,1/2)$, $x_c<0$; Ω_1 и Ω_2 здесь и в дальнейшем обозначают параболическую и гиперболическую части области Ω; $I_0\equiv AB$, $I_1\equiv AA_0(BB_0)$ – единичные интервалы на осях y=0 и x=0 (x=1) соответственно.

Относительно коэффициентов уравнения (4) делаются следующие предположения: α, β – заданные действительные постоянные, $a,b\in C^{(1.h)}(\bar{\Omega}_1)$, $c\in C^{(0.h)}(\bar{\Omega}_1)$, причем $b<0$, $c\leq 0$.

В зависимости от значений p, q, α и β в этом параграфе рассматривается ряд краевых задач со смещением для уравнения (4).

Задача 3.1. Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (4) со следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$;

2) $u_y(0,y)=\tau'(y)$ при $y\to 0$ или I может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u\Big|_{AB} = \varphi_0(x),\ u\Big|_{BB_0} = \varphi_1(y),\quad \forall x \in \bar{I}_0,\quad y \in \bar{I}_1,$$

$$-\omega\lambda^2(y)y^{1/6}D^{5/6}_{0y}u[\theta_0(y)] + \omega\mu^2(y)(1-y)^{1/6}D^{5/6}_{y_1}u[\theta_1(y)] = \qquad (5)$$
$$= \gamma(y) + \omega\mu^2(y)(1-y)^{-2/3}u(0,1),\quad \forall y \in I_1,$$

где $p=1$, $q=0$, $\alpha=\beta=0$, $\omega=(4/3)^{1/3}\Gamma^2(5/6)/\pi\Gamma(2/3)$, $\varphi_0(x) \in C^1(\bar{I}_0)$, $\varphi_1(y)\in C(\bar{I}_1)$, $\varphi_0(1)=\varphi_1(0)$, $\lambda^2(y)$, $\mu^2(y)$ - дважды дифференцируемые функции, вторые производные которых удовлетворяют условию Гельдера, причем предполагается, что $\varphi_0(0)=0$,

$$\lambda^2(y) + \mu^2(y) = 1, \qquad (6)$$

$\theta_0(y)$, $\theta_1(y)$ - аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (4), выходящих из точки $(0,y)\in I_1$, с характеристиками AC, A_0C.

Пусть теперь $p=2m$, $q=1$, $\alpha=1/2-m$, $\beta=0$.

Задача 3.2. Найти регулярное в области Ω непрерывное в $\bar{\Omega}$ решение $u(x,y)$ уравнения (4), удовлетворяющее краевым условиям (5) задачи 3.1 и

$$-2\lambda^2(y)\ \frac{d}{dy}u[\theta_0(y)] + 2\mu^2(y)\ \frac{d}{dy}u[\theta_1(y)] = \gamma(y),\ \forall y\in I_1,$$

$$\lim_{x\to -0}(-x)^{\frac{1-2m}{2}}\ u_x(x,y) = \lim_{x\to +0} u_x(x,y).$$

Задача 3.3. Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (4)со свойствами 1), 2) задачи 3.1, удовлетворяющее условиям (5) и

$$\lambda(y)D_{0y}^{1-\varepsilon}u[\theta_0(y)] + \mu(y)D_{y1}^{1-\varepsilon}u[\theta_1(y)] = \gamma(y) +$$

$$+ \rho_0\mu(y)(1-y)^{1-\varepsilon}u(0,1), \quad \varepsilon=m/(2m+4), \ \varphi_0(x)\in C^1(\bar{I}_0),$$

$$\varphi_1(y)\in C(\bar{I}_1), \ \lambda(y) = y^{\rho_1}\lambda^*(y), \ \mu(y) = y^{\rho_2}\mu^*(y), \ \rho_1>1, \ \rho_2>1/2-\varepsilon, \quad (5_1)$$

$$\rho_0=\Gamma(1-\varepsilon)/[(m+2)/4]^{1-2\varepsilon}\Gamma(2-2\varepsilon), \quad p=m, \ \alpha=\beta=q=0,$$

$$[(1-y)^{\varepsilon}\lambda(y)-y^{\varepsilon}\mu(y)\cos 2\varepsilon\pi]^2 + [y^{\varepsilon}\mu(y)\sin 2\varepsilon\pi]^2 \neq 0, \ \forall y\in\bar{I}_1.$$

Задача 3.4. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (4) со свойствами 1), 2) задачи 3.1, удовлетворяющее условиям (5) и

$$\lambda(y)D_{0y}^{\frac{3-\beta}{4}}u[\theta_0(y)] + \mu(y)D_{y1}^{\frac{3+\beta}{4}}u[\theta_1(y)] =$$

$$= \gamma(y) + \mu(y)(1-y)^{-\frac{3+\beta}{4}}u(0,1)/[\Gamma(1-\beta)/4],$$

где

$$\lambda^2(y) + \mu^2(y)\neq 0, \quad \forall y\in\bar{I}_1, \quad \lambda(y)=y^{\rho_1}\lambda^*(y), \quad \mu(y)=y^{\rho_2}\mu^*(y),$$

$$\rho_1>1/2, \ \rho_2>\beta/4, \ \lambda,\mu,\gamma\in C^{(2,h)}(I_1), \quad (5_2)$$

$$\varkappa(y) = \lambda(y)(1-y)^{\frac{1+\beta}{4}}/[\Gamma(3+\beta)/4] + \mu(y)y^{\frac{1-\beta}{4}}/[\Gamma(3-\beta)/4]\neq 0,$$

$$p=2, \ q=0, \ \alpha=0, \ |\beta|<1. \quad (5_3)$$

Задача 3.5. Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (4) со следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{\Omega}\setminus\bar{I}_1)$;

2) $u_y(0,y)=\tau'(y)$ может обращаться в бесконечность логарифмического порядка на концах интервала I_1;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет условию (5) и

$$\lim_{x\to-0} u(x,y)\log(-x)^{(2m+1)/2} = \lim_{x\to+0} u(x,y)$$

$$\lim_{x\to-0} (-x)\log^2(-x)^{(2m+1)/2}\ \{[u(x,y)-\omega(x,y)]/\log(-x)^{(2m+1)/2}\}_x = \lim_{x\to+0} u_x;$$

$$\lambda(y)D_{0y}^{1/2}[u(\theta_0(y)) - \omega_0(\theta_0(y))] + \mu(y)D_{y1}^{1/2}[u(\theta_1(y)) - \omega_1(\theta_1(y))]=\gamma(y),$$

где

$$\omega(x,y) = \int_0^1 \tau(\xi)[t(1-t)]^{-1/2}\log[\frac{(-x)^{\frac{2m+1}{4}}}{2m+1}t(1-t)]dt,$$

$$\omega_0(x,y) = \int_0^1 \tau(\xi)[t(1-t)]^{-1/2}\log(1-t)/4dt,$$

$$\omega_1(x,y) = \int_0^1 \tau(\xi)[t(1-t)]^{-1/2}\log t/4dt,$$

$$\xi = y- \frac{2(1-2t)}{2m+1}(-x)^{\frac{2m+1}{4}},\ \lambda(y),\ \mu(y),\ \gamma(y)\in C(\bar{I}_1)\cap C^2(I_1),$$

$$(1-y)^{1/2}\lambda(y) + y^{1/2}\mu(y) \neq 0,\ \forall y\in\bar{I}_1.$$

Единственность решения доказывается на основе следующего принципа экстремума:

решение $u(x,y)$ задачи 3.1 при $\gamma(y)\equiv0$ принимает положительный максимум и отрицательный минимум в $\bar{\Omega}_1$ на $AB \cup BB_0$;

пусть $\gamma(y)\equiv0$ и $\lambda(y)\mu(y)\geqslant0$, $\forall y\in\bar{I}_1$, тогда положительный максимум и отрицательный минимум решения $u(x,y)$ задачи 3.3 в $\bar{\Omega}_1$ достигается лишь на $AB\cup BB_0$;

если $\gamma(y)\equiv0$, $\lambda(y)<0$, $\mu(y)>0$, $æ((y)>0$ или $\lambda(y)>0$, $\mu(y)<0$, $æ(y)<0$, то положительный максимум и отрицательный минимум решения $u(x,y)$ задачи 3.4 в замкнутой области $\bar{\Omega}_1$ достигается на $AB\cup BB_0$.

Существование решения задач 3.1, 3.3, 3.4 устанавливается методом интегральных уравнений. Задачи 3.1, 3.3, 3.4 в силу условий (6), (5_1), (5_2), (5_3) прямо редуцируются к сингулярным интегральным уравнениям нормального типа, которые методом регуляризации Карлемана-Векуа приводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

Задачи 3.2 и 3.5 эквивалентно сведены к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода, которые безусловно и однозначно разрешимы.

ГЛАВА II

§1. Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} k(x)u_{yy} + u_{xx} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u, \ x<0, \\ u_{xx} + \alpha(x,y)u_x + \beta(x,y)u_y + \gamma(x,y)u, \ x>0 \end{cases} \tag{7}$$

в конечной односвязной области Ω плоскости x, y, ограниченной отрезками AB, BB_0, A_0B_0 прямых $y=0$, $x=1$, $y=1$, соответственно, и действительными характеристиками

$$AC: y+\int_0^x \sqrt{-K(t)}dt = 0, \quad A_0C: y-\int_0^x \sqrt{-K(t)}dt = 1$$

уравнения (7), выходящими из точек $A(0,0)$, $A_0(0,1)$.

Относительно коэффициентов уравнения (7) делаются следующие предположения: $k(x)$ - непрерывно дифференцируемая и монотонно возрастающая в Ω_2 функция, причем $K(0) = 0$, $K(x)<0$ при $x<0$; функции a, b и c принадлежат пространству $C^1(\bar{\Omega}_2\backslash I_1)$, а

$$\delta\left(\frac{b-a\sqrt{-K}}{\sqrt{-K}} - \delta\frac{\delta(\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}}\right) \in C(\bar{\Omega}_2\backslash I_1)$$

и выполняются следующие неравенства

$$b + a\sqrt{-K} + \delta(\sqrt{-K}) < 0, \quad c\leqslant 0,$$

$$\delta\Big(\frac{b-a\sqrt{-K}}{\sqrt{-K}} - \frac{\delta(-\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}}\Big) + \frac{1}{2K}\,(b-a\sqrt{-K} - \delta(\sqrt{-K}\,))\ \times$$

$$\times\ (b+a\sqrt{-K} + \delta(\sqrt{-K}\,)) - 2c \leqslant 0, \quad \forall(x,y)\in\bar{\Omega}_2\setminus I_1,$$

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma \in C(\bar{\Omega}_1),\ \beta<0,\ \gamma\leqslant 0,\ \delta\equiv\partial/\partial x+\sqrt{-K}\ \partial/\partial y.$$

Задача А. Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (7), удовлетворяющее краевым условиям (5) и $u\big|_{AC}=\varphi(x)\in C^4(-1/2\leqslant x\leqslant 0)$.

Имеет место следующая

Лемма 1.1. Пусть: 1) $u(x,y)$ - регулярное решение задачи А, когда $\varphi(x)\equiv 0$; 2) производная от функции $u(x,y)$ по направлению характеристик семейства $\sqrt{-K}\,dx-dy=0$ существует и непрерывна в $\bar{\Omega}_2\setminus I_1$.

Тогда положительный максимум (отрицательный минимум) функции $u(x,y)$ в $\bar{\Omega}_2$ достигается в некоторой точке $(0,\xi)\in I_1$ и в этой точке $u_x>0$, $(u_x<0)$.

Единственность решения вытекает из следующего аналога известного принципа экстремума А.В.Бицадзе.

Пусть $u(x,y)\in C^1(\Omega_1\cup A_0B_0)$ и удовлетворяет условиям леммы 1.1. Тогда положительный максимум и отрицательный минимум $u(x,y)$ в $\bar{\Omega}_1$, достигается на $\overline{AB}\cup\overline{BB_0}$.

В э том параграфе доказывается существование решения задачи А для случая, когда в уравнении (7) a, b, c, α и $\gamma\equiv 0$, $\beta=-1$, $k(x)=-(-x)^m$, где m-положительное число.

Здесь предлагается метод, позволяющий редуцировать вопрос разрешимости задачи А к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

§2. В первой части этого параграфа рассматривается уравнение

$$Lu \equiv u_{yy} - K(y)u_{xx} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), \quad (8)$$

где $k(y)>0$ при $y<0$, $k(y)=0$ при $y\geqslant 0$.

Обозначим через Ω область, ограниченную отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x=0$, $x=1$, $y=1$, соответственно, лежащих в верхней полуплоскости $y>0$, и характеристиками AC и BC уравнения (8), выходящими из точки $C(1/2, y_c)$, $y_c<0$.

Относительно коэффициентов уравнения (8) предполагается, что $K, b \in C(\bar{\Omega})$, $a, c \in C^1(\bar{\Omega})$.

Задача T_1. Найти функцию $u(x,y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (8) в областях Ω_1 и Ω_2 и краевым условиям:

$$u\Big|_{A_0B_0} = 0, \quad u\Big|_{BB_0} = 0, \quad u\Big|_{BC} = 0, \tag{9}$$

или

$$u_y\Big|_{A_0B_0} = 0, \quad u\Big|_{BB_0} = 0, \quad u\Big|_{BC} = 0. \tag{10}$$

Примем следующие обозначения:

$$L^*v \equiv v_{yy} - k(y)v_{xx} - (av)_x - (bv)_y + cv = f(x,y); \tag{8*}$$

$W(B)$ – множество функций $u(x,y)$ из класса $W = C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap W_2^1(\partial\Omega) \cap W_2^1(\Omega)$, для которых $Lu \in L_2(\Omega)$ и соблюдены условия (9) или (17); $W(B^*)$ – множество функций v из W, для которых $L^*v \in L_2(\Omega)$ и выполняются сопряженные краевые условия

$$v\Big|_{A_0B_0} = 0, \quad v\Big|_{AA_0} = 0, \quad v\Big|_{AC} = 0, \tag{9*}$$

или

$$(v_y - bv)\Big|_{A_0B_0} = 0, \quad v\Big|_{AA_0} = 0, \quad v\Big|_{AC} = 0. \tag{10*}$$

Для любых функций $u \in W(B)$ и $v \in W(B^*)$ справедливо равенство (10*)

$$(v, Lu)_0 = (u, L^*v)_0,$$

поэтому задачу T_1^*: найти функцию v из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению ($8^\star$) в областях Ω_1 и Ω_2 и краевым условиям ($9^\star$) или ($10^\star$), будем называть задачей, сопряженной задаче T_1.

Одним из основных результатов этого параграфа является

Теорема 2.1 Пусть коэффициенты уравнения (8) удовлетворяют одному из следующих условий:

1) $a(x,y)>0$ при $0\leqslant x,y\leqslant 1$;

2) a/k, $b^2/k\in C(\overline{\Omega}_2)$, $c(x,y)<0$ при $0\leqslant x,y\leqslant 1$;

3) a/k, b^2/k, a_x/k, c/k, $c_x/k\in C(\overline{\Omega}_2)$;

4) k/a, $b^2/a\in C(\overline{\Omega}_2)$, $a>0$ при $y\neq 0$, $c(x,y)<0$ при $0\leqslant x,y\leqslant 1$;

5) k/a, b^2/a, c/k, $c_x/k\in C(\overline{\Omega}_2)$, $a>0$ при $y\neq 0$, $a_x\geqslant 0$.

Тогда для всех $u\in W(B)$ имеет место оценка $\|u\|_{++}\leqslant C_0\|Lu\|_+$, где $\|\cdot\|_{++}$, $\|\cdot\|_+$-некоторые позитивные нормы, а C_0-независящая от u положительная постоянная.

Справедливость теоремы 2.1 устанавливается с помощью модификации метода, предложенного А.М.Нахушевым.

Из теоремы 2.1, в частности, вытекает единственность регулярного решения задачи T_1 и существование слабого решения сопряженной задачи $T_1^\star$.

Во второй части §2 исследуется задача А при следующих предположениях относительно коэффициентов a, b, c, α, β, γ уравнения (7):

$$a,\ b\in C^3(\overline{\Omega}_2),\ c\in C^1(\overline{\Omega}_2),\ \alpha,\beta\in C^{(1,h)}(\overline{\Omega}_1),$$

$$\gamma\in C^{(0,h)}(\overline{\Omega}_1),\ \beta<0,\ \ \gamma\leqslant 0,\ k(x)=-(-x)^m,$$

причем при $m\geqslant 2$ выполняется условие Геллерстедта : $B=O(1)|x|^n$, $n>m/2-1$. Задача А в этом случае редуцируется эквивалентно к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, которое безусловно и однозначно разрешимо.

ГЛАВА III

§1. В первой части этого параграфа рассматривается уравнение (8) в конечной односвязной области Ω, ограниченной кусочно-гладкой замкнутой кривой $\Gamma=\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где кривые Γ_i, $i=0,1,2$ определяются следующим образом: а) $\Gamma_0=AA_0 \cup BB_0 \cup A_0B_0$, где AA_0, BB_0, A_0B_0-отрезки прямых $x=0$, $x=1$, $y=1$, соответственно, лежащие в полуплоскости $y>0$; b)$\Gamma_1: y=-\mu(x)$ - монотонная кривая, которая выходит из точки $(1,0)$ и располагается внутри характеристического треугольника ABC, имеющая единственную общую точку $C_1(l,y_1)$, $0\leqslant l\leqslant 1$, $y_1<0$ с характеристикой AC уравнения (8), выходящей из точки $(0,0)$; в)Γ_2-характеристика AC_1.

Задача M_1. В области Ω найти решение $u(x,y)$ уравнения (8), удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{\Gamma_0\setminus AA_0} = 0, \quad u\big|_{\Gamma_1} = 0,$$

или

$$u_y\big|_{\Gamma_0\setminus AA_0\cup BB_0} = 0, \quad u\big|_{\Gamma_0\setminus AA_0\cup A_0B_0} = 0, \quad u\big|_{\Gamma_1} = 0.$$

Имеет место следующая

Теорема 1.1 Если $a(x,y)>0$, $\forall(x,y)\in\bar{\Omega}_1$, $x_n\geqslant 0$, $y_n^2-kx_n^2\geqslant 0$, $\forall(x,y)\in\Gamma_1$, то для всех $u(x,y)\in W(B)$ имеет место оценка $\|u\|_{++}\leqslant C_0\|Lu\|_+$, где x_n и y_n-направляющие косинусы внешней нормали $n=(x_n,y_n)$ к границе области Ω, C_0 - независящая от u положительная постоянная.

Здесь класс функций $W(B)$ и нормы $\|\cdot\|_{++}, \|\cdot\|_+$ определяются таким же образом как в §2 главы II.

Справедливость этой теоремы доказывается точно так же как теорема 2.1 в §2 гл.II.

Из теорем 1.1, в частности, следуют единственность сильного решения задачи M_1 и существование слабого решения сопряженной задачи M_1^*:

$$L^*v = f, \quad v\Big|_{A_0B_0} = 0, \quad v\Big|_{AA_0} = 0, \quad v\Big|_{\Gamma_2} = 0,$$

или

$$L^*v = f, \quad (v_y - bv)\Big|_{A_0B_0} = 0, \quad v\Big|_{AA_0} = 0, \quad v\Big|_{\Gamma_2} = 0.$$

Во второй части §1 рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} |x|^m u_{yy} - u_{xx}, \ x<0, \ m>0, \\ u_{xx} + a(x,y)u_y + b(x,y)u, \ x>0, \end{cases} \tag{11}$$

в односвязной области Ω, ограниченной кусочно-гладкой замкнутой линией $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$, где линии γ_i, $i=0,1,2$ определяются следующим образом: а) $\gamma_0 = AB \cup BB_0 \cup A_0B_0$, где AB, BB_0, A_0B_0-отрезки прямых $y=0$, $x=1$, $y=1$ соответственно, и лежат в полуплоскости $x>0$; b) линия γ_1 вначале совпадает с куском AF характеристики AC уравнения (11), а затем отходит от нее внутрь характеристического треугольника ACA_0 и имеет единственную общую точку $H(x_1, l)$, $x_1<0$, $0\leqslant l\leqslant 1$ с характеристикой A_0C уравнения (18), выходящей из точки $(0,1)$; в) линия γ_2 совпадает с куском A_0H характеристики A_0C.

Задача M_2. Найти функцию $u(x,y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (18) в области Ω, $x\neq0$ и краевым условиям

$$u\Big|_{\gamma_0 \setminus BB_0 \cup A_0B_0} = \phi_0(x), \quad u\Big|_{\gamma_0 \setminus AB \cup A_0B_0} = \phi_1(x), \quad u\Big|_{\gamma_1} = \phi_2(y).$$

Метод доказательства корректности задачи M_2 является развитием метода Франкля.

§2. В этом параграфе, состоящем из двух частей, рассматривается уравнение

$$0 = Lu = \begin{cases} u_{xx} + a_1(x,y)u_x - b_1(x,y)u_y + c_1(x,y)u, & y>0 \\ u_{yy} - (-y)^m u_{xx} + a_2(x,y)u_y + b_2(x,y)u, & y<0,\ m\geq 0. \end{cases} \qquad (12)$$

Пусть Ω - конечная односвязная область плоскости переменных x, y, ограниченная кусочно-гладкой замкнутой линией $\sigma=\sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2$, где σ_i, $i=0,1,2$ определяются следующим образом: а) $\sigma_0=AA_0 \cup BB_0 \cup A_0B_0$, где AA_0, BB_0 и A_0B_0 - отрезки прямых $x=0$, $x=1$, $y=1$ соответственно, и лежат в полуплоскости $y>0$; б) σ_1-монотонная кривая $y=-\mu(x)$, $0\leq x\leq l$, расположенная внутри характеристического треугольника ACB, $\mu(0)=0$, $l+\mu(l)=1$, в) σ_2-характеристика C_1B:

$$x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1, \quad l\leq x\leq 1,$$

уравнения (12).

Задача M_3. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами: 1) $u(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$; 2) $u(x,y)$ является решением уравнения (12) при $y\neq 0$; 3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u\big|_{AA_0} = \varphi_0(y), \quad u\big|_{BB_0} = \varphi_1(y), \quad u\big|_{\sigma_1} = \psi(x),$$

$$\varphi_0(y),\ \varphi_1(y) \in C(0\leq y\leq 1), \quad \psi(x) \in C^3(0\leq x\leq l),\ \varphi_0(0)=\varphi_1(0)=\psi(0)=0.$$

В первой части этого параграфа доказывается теорема 2.1, из которой непосредственно следует единственность решения задачи M_3 для случая, когда в уравнении (12) коэффициенты a_1, b_1, $c_1\neq 0$, причем $b_1>0$, $c_1\leq 0$, $a_2=b_2=0$ и $m=1$. Здесь же доказывается существование решения задачи M_3, когда коэффициенты $c_1=a_2=b_2$ и $m=0$, а отходящая кривая σ_1 содержит в себе часть характеристики уравнения (12).

Во второй части §2 устанавливается существование решения задачи

M_3, когда отходящая кривая σ_1 имеет только одну общую точку с характеристикой уравнения (12).

§3. В этом параграфе рассматривается обобщенная задача Трикоми для уравнения (12), когда коэффициенты a_1, c_1, a_2, $b_2 \neq 0$ и в предположении, что $a_1 \in C^{(1,h)}(\bar{\Omega}_1)$, $b_1 \in C^{(2,h)}(\bar{\Omega}_1)$, $c_1 \in C^{(0,h)}(\bar{\Omega}_1)$, $a_2, b_2 \in C^1(\bar{\Omega}_2)$, причем $b_1 > 0$, $c_1 \leq 0$.

Уравнение (12) при $y<0$ в характеристических координатах ξ, η переходит в уравнение

$$-4(-y)^m u_{\xi\eta} + [(-y)^{\frac{m}{2}} a_2 - \frac{m}{2}(-y)^{\frac{m-2}{2}}](u_\xi - u_\eta) + b_2 u = 0. \quad (13)$$

Известно , что решение уравнения (12), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = \tau(x),$$

$$\lim_{\eta-\xi\to 0} [\frac{m+2}{2}(\eta-\xi)]^{2\varepsilon_0}(u_\xi - u_\eta) = \nu(\xi),\ 2\varepsilon_0(m+2)=m,$$

имеет вид

$$u(\xi,\eta) = \int_\xi^\eta H_1(\xi,\eta;s)\tau(s)ds + \int_\xi^\eta H_2(\xi,\eta;s)\nu(s)ds, \quad (14)$$

где функции H_1 и H_2 выражаются через функцию Римана уравнения (12).

Обозначим через $\mathfrak{L}_2(0,1)$ пространство функций $f(x)$, $0<x<1$ таких, что

$$\int_0^1 (1-x)f^2(x)dx < \infty.$$

Следуя Бабенко, будем говорить, что функция $u(\xi,\eta)$ есть обобщенное решение задачи Коши уравнения (12) или (13) из класса R, если ее можно представить в виде (14), и функция $\nu(x)$ такова, что

$$\nu(x) = x^{\varepsilon_0}\int_0^x (x-s)^{\varepsilon_0 - 1} s^{-\varepsilon_0}\theta(s)ds, \quad \theta(x)\in \mathcal{L}_2(0,1).$$

Задача M_4. Требуется определить непрерывную функцию $u(x,y)$ такую, что: 1) в Ω_1 $u(x,y)$ дважды непрерывно-дифференцируема и удовлетворяет уравнению (12); 2) в Ω_2 $u(\xi,\eta)\in C^1(\Omega_2)$ и принадлежит классу R; 3) производные u_x и u_y непрерывны в $\overline{\Omega}_2\setminus\{A_1 B\}$; 4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u\Big|_{AA_0} = \varphi_0(y),\ u\Big|_{BB_0} = \varphi_1(y),\ u\Big|_{\sigma_1} = \phi(x),\ \varphi_0(0)=\varphi_1(0)=\phi(0)=0.$$

Модифицируя метод Франкля доказательства единственности решения задачи Трикоми для смешанных эллиптико-гиперболических уравнений, применительно к смешанным гиперболо-параболическим уравнениям, устанавливается единственность решения задачи M_4, а существование доказывается методом сингулярных интегральных уравнений.

§4. В этом параграфе исследуется обобщенная задача Трикоми для следующего гиперболо-параболического уравнения с одновременным вырождением типа и порядка:

$$0 = \begin{cases} u_{xx} + a\,(x,y)u_x + b\,(x,y)u_y + c\,(x,y)u, & y>0, \\ y^{2m}u_{xx} + yu_{yy} + \lambda u_y, & y<0, \end{cases} \tag{15}$$

где m-фиксированное натуральное число.

Обозначим через Γ_1 и Γ_2 характеристики уравнения (15), выходящие из точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$ и пересекающиеся в точке $C(1/2,\ y_c)$, $y_c<0$.

Пусть $E(h,0)$ - точка отрезка AB, $F[h/2-((2m+1)h/4)^{2/(2m+1)}]$, $G[(1-h)/2,-((2m+1)(1-h)/4)^{2/(2m+1)}]$- точки пересечения характеристик уравнения (15), выходящих из точки E с характеристиками Γ_1 и Γ_2 соответственно; $H[1-l,-((2m+1)l/2)^{2/(2m+1)}]$, $1-h\leqslant 2l\leqslant 1$-точка на характеристике Γ_2.

Соединим точки F и H линией δ_1: $y=-\mu_1(x)$, $h/2\leqslant x\leqslant 1-l$, где $\mu_1(x)$-дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Уравнение (15) будем рассматривать в области Ω, ограниченной кусочно-гладкой кривой $\delta=\delta_0 \cup \delta_1 \cup \delta_2 \cup \delta_3$, где δ_0 и δ_2 - части AF и BH характеритстик Γ_1 и Γ_2, соответсвенно, $\delta_3=AA_0 \cup BB_0 \cup A_0B_0$, причем AA_0, BB_0 и A_0B_0- отрезки прямых x=0, x=1, y=1 соответственно, и лежат в полуплоскости y>0.

Относительно коэффициентов уравнения (15) предполагается, что $a,b\in C^{(1,h)}(\bar{\Omega}_1)$, $c\in C^{(0,h)}(\bar{\Omega}_1)$, $b<0$, $c\leqslant 0$; λ- заданная действительная постоянная $-2m<\lambda<(1-2m)/2$ или $(1-2m)/2\leqslant\lambda<1$.

Задача M_λ. Найти регулярное в области Ω, $y\neq 0$ решение $u(x,y)$ уравнения (15), непрерывное в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющее условиям:

$$u\Big|_{AA_0} = \varphi_0(y),\quad u\Big|_{BB_0} = \varphi_1(y),\quad u\Big|_{\delta_0 \cup \delta_1} = \varphi(x),$$

$$\lim_{y\to+0} u_y = \lim_{y\to-0}(-y)^\lambda \frac{\partial}{\partial y}[u(x,y)-\omega(x,y)],$$

где

$$\omega(x,y) = \begin{cases} \beta_1\int\limits_0^1 \tau[x-\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}(1-2t)][t(1-t)]^{\beta-1/2}dt, \\ \text{при } -2m<\lambda<(1-2m)/2, \\ 0, \text{ при } (1-2m)/2\leqslant\lambda<1; \end{cases}$$

$$u(x,0) = \tau(x);\ \varphi_0(y),\ \varphi_1(y)\in C(0\leqslant y\leqslant 1),\ \varphi(x)\in C^3(0\leqslant x\leqslant 1-l),$$

при $(1-2m)/2 \leqslant \lambda < 1$; $\psi_0(y)$, $\psi_1(y) \in C(0 \leqslant y \leqslant 1)$, $\psi(x) \in C^5(0 \leqslant x \leqslant 1-l)$, при $-2m < \lambda < (1-2m)/2$, $\psi_0(0) = \psi_1(0) = \psi(0) = 0$, $\beta_1 = (\beta+1/2)\Gamma(2\beta+1)/\beta\Gamma^2(\beta+1/2)$, $\beta = (2m+\lambda)/(2m+1)$.

Допускается, что функция

$$\lim_{y \to +0} u_y = \lim_{y \to -0} (-y)^{\lambda} \frac{\partial}{\partial y} [u(x,y) - \omega(x,y)] = \nu(x)$$

может обращаться в ∞ порядка не выше единицы при $x \to 0$.

Теорема 4.1. Пусть коэффициенты уравнения (15) дополнительно удовлетворяют следующим условиям:

$a_x + b_y - 2c + kb \leqslant 0$ в Ω_1;

$b(x,1) = 0$, $\alpha^0 b + \alpha_0(1-\lambda) \geqslant 0$ на линии $y=0$;

$\alpha_0 = \gamma_0(1-2m)/[2(\lambda-1)]$, $\gamma_0 = \mathrm{const} > 0$,

$k = \mathrm{const} < 0$, $\alpha^0 < \alpha_0(\lambda-1)/\min\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} b(x,+0)$;

на кривой δ_1 выполняется неравенство

$$(\lambda-1)\alpha_1(-y)^{\lambda-2}dy - \gamma_0 dx \leqslant 0,$$

где

$$\alpha_1 = \max_{y_H \leqslant y \leqslant 0} \frac{\gamma_0}{1-\lambda}(-y)^{\frac{2m-2\lambda+3}{2}}, \quad y_H = -\left[\frac{(2m+1)l}{2}\right]^{\frac{2}{2m+1}}.$$

Тогда решение $u(x,y)$ уравнения (15) в области Ω тождественно равно нулю, если

$$u\Big|_{AA_0 \cup BB_0 \cup \delta_0 \cup \delta_1} = 0.$$

Теорема 4.1 доказывается методом, аналогичным методу Фридрихса и Моравец.

В случае, когда $(1-2m)/2 \leqslant \lambda < 1$, устанавливается, что вопрос существования решения задачи M_λ эквивалентен вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода, а если $-2m<\lambda<(1-2m)/2$, то задача M_λ редуцируется эквивалентно к интегральному уравнению Фредгольма третьего рода

$$x^{\beta+5/2}\nu(x) + \int_0^1 T(x,s)\nu(s)ds = f(x), \tag{16}$$

где функции $T(x,s)$ и $f(x)$ непрерывны вместе со своими производными до второго порядка по x и s.

Вопрос разрешимости уравнения (16) исследуется методом, аналогичным методу Пикара и Платрие и при этом подсчитывается точное число условий разрешимости уравнения (16) и число его линейно независимых решений.

ГЛАВА IV

§1. Рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} (-x)^m u_{yy} - u_{xx}, & x<0,\ m>0, \\ u_{xx} - u_{yy}, & x>0 \end{cases} \tag{17}$$

в области Ω, ограниченной отрезками AB, BB_0 и A_0B_0 прямых $y=0$, $x=1$ и $y=1$ соответственно и характеристиками

$$AC:\ y-\frac{2}{m+2}(-x)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad AC_0:\ y + \frac{2}{2+m}(-x)^{\frac{m+2}{2}} =1.$$

Задача T_α^β. Найти функцию $u(x,y)$, которая: 1) является регулярным решением уравнения (17) в области Ω при $y\neq0$; 2) непрерывна в замкнутой области $\bar{\Omega}$, а её частные производные u_x и u_y непрерывны в области Ω; 3) удовлетворяет граничным условиям:

$$u|_{AB} = \varphi_0(x), \quad (\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta u)|_{BB_0} = \varphi_1(y), \quad u|_{AC} = \psi(x).$$

Основными результатами этого параграфа являются следующие теоремы.

Теорема 1.1. Пусть: 1) $\alpha=0$, $\beta=1$; $\varphi_0(x)\in C^1[0,1]$, $\varphi_1(y)\in C[0,1]$, $\psi(x)\in C^4[-1/2,0]$, $\varphi_0(0)=\psi(0)=0$, $\varphi_0(1)=\varphi_1(0)$, или 2) $\alpha=0$, $\beta=1$; $\varphi_0(x)\in C^2[0,1]$, $\varphi_1(y)\in C[0,1]$, $\psi(x)\in C^4[-1/2,0]$; $\varphi_0(0)=\varphi'(0)=\psi(0)=0$, $\varphi_0(1)=\varphi_1(0)$. Тогда задача T_0^1 имеет и притом единственное решение.

Теорема 1.2. Пусть $\alpha=1$, $\beta=0$, $\varphi_0(x)\in C^1[0,1]$, $\varphi_1(y)\in C[0,1]$, $\psi(x)\in C^4[-1/2,0]$, $\varphi_0(0)=\psi(0)=0$, $\varphi_0'(1)=\varphi_1(0)$, или 2) $\alpha=1$, $\beta=0$; $\varphi_0(x)\in C^2[0,1]$, $\varphi_1(y)\in C[0,1]$, $\varphi_0(0)=\varphi_0'(0)=\psi(0)=0$, $\varphi_1(0)=\varphi_0'(1)$. Тогда задача T_1^0 имеет и притом единственное решение.

Справедливость теорем 1.1, 1.2 устанавливается методом эквивалентной редукцией к интегральному, интегро-дифференциальному или нагруженному уравнению с оператором Вольтерра в зависимости от того $m<2$ или $m>2$.

§2. В этом параграфе исследуются краевые задачи для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа второго порядка с характеристической линией изменения типа.

Пусть Ω - конечная односвязная область ограниченная отрезками AA_0, BB_0 и A_0B_0 прямых $x=0$, $x=l$ и $y=h$ соответсвенно и расположенных в полуплоскости $y>0$ и характеристиками

$$AC:\ x-\frac{2}{\varkappa+2}(-y)^{\frac{\varkappa+2}{2}}=0,\quad BC:\ x+\frac{2}{\varkappa+2}(-y)^{\frac{\varkappa+2}{2}}=l$$

оператора $L_\varkappa=\partial^2/\partial y^2-(-y)^\varkappa\partial^2/\partial x^2$, $\varkappa=\text{const}$.

В области Ω рассмотрим нагруженное уравнение гиперболо-параболического типа

$$0 = \begin{cases} Lu + \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_i(x,y)D_{0y}^{\bar{\alpha}_i}k_j(x,y)u(x^j,y) = f(x,y), \quad y>0 \quad , \\ L_x u - b_0(x,y)u + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x,y)D_{0x}^{\rho_i}u(x,0) = d(x,y), \quad y<0 \quad , \end{cases} \tag{18}$$

где $Lu=u_y-\theta u_{xx} + a_0(x,y)u$, $\theta=\mathrm{const}>0$, $D_{0y}^{-\alpha_i}(D_{0x}^{\rho_i})$ – операторы дробного в смысле Римана-Лиувилля интегрирования порядка – $\bar{\alpha}_i(-\rho_i)$ при $\bar{\alpha}_i<0$ $(\rho_i<0)$ и дробного дифференцирования порядка $\bar{\alpha}_i(\rho_i)$ при $\bar{\alpha}_i>0(\rho_i>0)$.

Задача A_α^β. Найти регулярное в области Ω, $y\neq 0$ решение $u(x,y)$ уравнения (18) из класса $C(\bar{\Omega})\cap C^1(\Omega)$, удовлетворяющее условиям

$$\left(\alpha_1\frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u\right)\Big|_{x=0} = \gamma_1(y),$$

$$\left(\alpha_2\frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u\right)\Big|_{x=l} = \gamma_2(y), \quad u\Big|_{AC} = \psi(x),$$

где γ_1, γ_2 и ψ – заданные гладкие функции, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2)$, причем $\alpha_k^2 + \beta_k^2 \neq 0$, $k=1,2$.

Используя свойства функции Грина для основных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнения теплопроводности, задача A_α^β эквивалентно редуцируется к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которая однозначно разрешима.

§3. Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} + a_1(x,y)u_x + a_0(x,y)u - u_y, \quad y>0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad y<0 \end{cases} \tag{19}$$

в конечной области Ω, ограниченной отрезками AA_0, A_0B_0 и BB_0 прямых $x=0$, $y=h$ и $x=l$ соответсвенно, а также характеристиками AC: $x+y=0$, $BC: x-y=l$ уравнения (19).

Этот параграф посвящен решению двух нелокальных краевых задач со смещением для гиперболо-параболического уравнения третьего порядка.

Задача 3.1. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами: 1) $u(x,y)\in C(\bar\Omega_i)$, $i=1,2$, $u(x,y)\in C^1(\bar\Omega_1\setminus A_0B_0)$, $u(x,y)\in C^1(\bar\Omega_2\setminus BC))$; 2) $u(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$u(0,y) = \varphi_1(y),\quad u(l,y) = \varphi_2(y),\quad u_x(0,y) - u_x(l,y)=\varphi_3(y),$$

$$a(x)\,\frac{d}{dx}u[\theta_0(x)]+b(x)\,\frac{d}{dx}u[\theta_1(x)]-c(x)u(x,-0)-d(x)u_y(x,-0)=e(x), \tag{20}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC} = \phi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l/2,\quad 0\leqslant y\leqslant h \tag{21}$$

и условиям склеивания

$$u(x,-0) = \alpha(x)u(x,+0) + \gamma(x), \tag{22}$$

$$u_y(x,-0) = \beta(x)u_y(x,+0) + \delta(x)u(x,+0) + \rho(x). \tag{23}$$

Здесь n - внутренняя нормаль; Ω_1 и Ω_2 - параболическая и гиперболическая части области Ω.

Задача 3.2. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами: 1) $u(x,y)\in C(\bar\Omega_i)\cap C^1(\Omega_i\cup(0,l))$, $i=1,2$; 2) $u(x,y)$ - регулярное решение уравнения (19) в Ω при $y\neq0$, $a_1(x,y)=0$, $a_0(x,y)=\lambda=\mathrm{const}$; 3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям $u(0,y)=\varphi_1(y)$, $u(l,y)=\varphi_2(y)$, $u_x(0,y)=\varphi_3(y)$, (20), (21) и условиям склеивания (22), (23).

Единственность решения задач 3.1, 3.2 доказывается методом предложенным в §3 главы III, а существование методом интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

§4. В этом параграфе исследуются краевые задачи типа задачи Трикоми для уравнения

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} - u_y + \lambda_1 u, & y>0,\\ u_{xx} - u_{yy} + \lambda_2 u, & y<0,\end{cases} \tag{24}$$

где λ_1 и λ_2 - вещественные параметры, в области Ω, ограниченной характеристиками AC: $x+y=0$, BC: $x-y=l$ уравнения (24), отрезками AA_0, A_0B_0 и BB_0 прямых $x=0$, $y=h$ и $x=l$ соответственно.

Задача 4.1. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям: 1) $u(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^{3,1}_{x,y}(\Omega_1) \cap C^{2,2}_{x,y}(\Omega_2) \cap C^2_x(\bar{\Omega}\setminus\{A,B\})$; 2) $u(x,y)$-решение в области Ω, $y\neq 0$ уравнения (24); 3) $u(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(l,y) = \varphi_2(y), \quad u_x(0,y)=\varphi_3(y), \quad 0\leqslant y\leqslant h,$$

$$u(x,-x) = \psi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l/2, \text{ где } \Omega_{1(2)} = \Omega \cap \{y>0 \ (y<0)\}.$$

Лемма 4.1 Если $u=0$ на $\overline{AC}$ и $\lambda_2>0$, то для любого решения уравнения (24) имеет место неравенство

$$J = \int_0^x \tau(t)\nu(t)dt \geqslant 0.$$

Лемма 4.2.Если $\lambda_1\geqslant 0$ и $\lim\limits_{x\to+0} u(x,0)u_{xx}(x,0)=0$, $\lim\limits_{x\to l-0} u(x,0)u_{xx}(x,0)=0$, (25)

$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = 0$, то для любого регулярного в области Ω_1 решения уравнения (24) справедливо неравенство

$$J = \int_0^x \tau(t)\nu(t)dt \leqslant 0.$$

На основании лемм 4.1, 4.2 доказывается

Теорема 4.1. Пусть $u(x,y)$ - регулярное в области Ω решение однородной задачи 4.1, удовлетворяющее условию (25). Тогда $u(x,y)\equiv 0$ в Ω при всех $\lambda_1\geqslant 0$ и $\lambda_2>0$.

Теорема 4.1. доказывается методом интегралов энергии.

Пусть $\lambda_2<0$. Введением новой функции $v(x,y)=\exp(-\rho x)u(x,y)$, уравнение (24) сводится к виду

$$0 = \begin{cases} v_{xxx} - v_y + 3\rho v_{xx} + 3\rho^2 v_x + (\rho^3-\lambda_1)v, & y>0, \\ v_{xx} - v_{yy} + 2\rho v_x + (\rho^2+\lambda_2)v, & y<0. \end{cases} \qquad (26)$$

Лемма 4.3. Если $v=0$ на $\overline{AC}$ и $\rho>(\mho\lambda_2\mho)^{\alpha}$, $\alpha=\mathrm{const}>0$, то для любого регулярного в области Ω_2 решения уравнения (26) справедливо неравенство $\int\limits_0^x v(x,0)v_y(x,0)dx\geqslant 0$.

Теорема 4.2. Пусть $u(x,y)$ - решение однородной задачи 4.1 из класса регуляных решений уравнения (24), удовлетворяющее условию

$$\lim_{x\to+0} u(x,0)[u_{xx}(x,0)+\rho u_x(x,0)] = \lim_{x\to l-0} u(x,0)[u_{xx}(x,0)+\rho u_x(x,0)]=0.$$

Тогда $u(x,y)=0$ в Ω, если $\lambda_2<-1$ и $\lambda_1\geqslant\lambda_2-3\sqrt[3]{|\lambda\ |}(\pi/l)^2$ или, если $-1<\lambda_2\leqslant 0$ и $\lambda_1\geqslant\sqrt{|\lambda_2|}^3\ -3\sqrt{|\lambda_2|}\ (\pi/l)^2$.

Опираясь на известные неравенства Фридрихса, устанавливается справедливость леммы 4.3 и теоремы 4.2. Из теоремы 4.2 следует, что если даже $\lambda_1\geqslant 0$, что в области параболичности гарантирует единственность решения краевой задачи для уравнения (24), то найдется такое значение $\lambda_2<0$, при котором однородная задача 4.1 для уравнения (24) может иметь ненулевое решение.

Существование решения задачи 4.1 эквивалентно редуцирется к смешанному интегральному уравнению второго рода, которое однознач но разрешимо в силу единственности решения задачи 4.1.

Аналогичным образом решается задача 4.1 и при таких значениях спектральных параметров λ_1 и λ_2: 1) $\lambda_2<0$, $-3\sqrt{|\lambda\ |}(\pi/l)\leqslant\lambda_1$; 2) $\lambda_2=0$, $-2/\sqrt{27}<\lambda_1<2/\sqrt{27}$; 3) $\lambda_2=0$, $\lambda_1<-2/\sqrt{27}$ или $\lambda_1>2/\sqrt{27}$.

§5. В первой части этого параграфа исследуется краевая задача для смешанного нагруженного уравнения второго порядка, когда линия изменения типа является нехарактеристической.

Для уравнения

$$0 = \begin{cases} u_y - u_{xx} - \lambda_0 u(0,y), & x>0, \\ u_{yy} - u_{xx} - \lambda(y)u(0,y), & x<0, \end{cases} \tag{27}$$

где $\lambda_0=\mathrm{const}>0$, $\lambda(y)=-\lambda_1^2(y)$ в области Ω, ограниченной отрезками AB, BB_0, A_0B_0 прямых $y=0$, $x=l$, $y=h$ при $x>0$ и, характеристиками AC: $x+y=0$, A_0C: $y-x=h$ уравнения (27) при $x<0$; Ω_1 и Ω_2 – параболическая и гиперболическая части области Ω; J_0– интервал $(0,l)$, J_1– интервал $(0,h)$ исследуется

Задача 5.1. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (27), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad x\in\bar{J}_0, \quad u(l,y) = \varphi_1(y), \quad y\in\bar{J}_1,$$
$$u(x,-x) = \psi(x), \quad x\in[-h/2,0].$$

При исследовании задачи 5.1 используется тот факт, как и для составных и смешанно-составных уравнений, что любое регулярное решение уравнения (27) при $y\neq0$ может быть представлено в виде $u(x,y)=v(x,y)+\omega(y)$, где $v(x,y)$ – регулярное решение уравнений $v_y-v_{xx}=0$, $v_{xx}-v_{yy}=0$, а $\omega(y)$ – решение уравнения $\omega_1'(y)-\lambda_0\omega_1(y)=\lambda_0 v(0,y)$ при $x>0$ и уравнения $-\omega_2''(y) - \lambda(y)\omega_2(y) = \lambda(y)v(0,y)$ при $x<0$.

Задача 5.1 эквиваленотно редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\tau(y)+ \int_0^h M(y,\eta)\lambda(\eta)\tau(\eta)d\eta = \psi(y), \tag{28}$$

где $M(y,\eta)\in C(J_1 x J_1)$, $\psi(y)\in C(J_1)\cap C^2(J_1)$.

Уравнение (28) однозначно разрешимо, если

$$\|\lambda(y)\|_{C(\bar{J}_1)} \leqslant \|M(y,\eta)\|^{-1}_{C(\bar{J}_1 x \bar{J}_1)}$$

и его решение $\tau(y)\in C(\bar{J}_1)\cap C^2(J_1)$.

Во второй части этого параграфа рассматривается краевая задача для смешанного нагруженного уравнения третьего порядка, когда линия изменения типа является характеристикой.

Для уравнения

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} - u_y - \overline{\lambda}_1 u(\overline{x},\overline{y}), \ y>0, \\ u_{xx} - u_{yy} + \overline{\lambda}_2 u(x,0), \ \ y<0 \end{cases} \quad (29)$$

в области Ω, определенной в §4, исследуется

Задача 5.2. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами: 1) $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup AA_0) \cap C^{3,1}_{x,y}(\Omega_1) \cap C^{2,2}_{x,y}(\Omega_2) \cap C^2(\overline{\Omega}\setminus\{A,B\})$; 2) $u(x,y)$ - решение уравнения (29) при $y\neq 0$; 3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(l,y) = \varphi_2(y), \quad u_x(0,y) = \varphi_3(y),$$
$$u(x,-x) = \psi(x),$$

где $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y) \in C(\overline{J}_1)$, $\psi(x) \in C^1[0,l/2] \cap C^3(0,l/2)$, причем $(e-1)^2-(1-e^2-e^{1+x_0} + e^{1-x_0})\lambda_1(0) \neq 0$.

Здесь положено, что: $(\overline{x},\overline{y})=(x_0,y)$, $0<x_0<l$, $\overline{\lambda}_1=\lambda_1(y) \in C(\overline{J})$, J-интервал $(0,l)$, $\lambda_2=0$ или 2) $(\overline{x},\overline{y})=(x,0)$, $\overline{\lambda}_1=\lambda_1=\mathrm{const}$, $\overline{\lambda}_2=\lambda_2=\mathrm{const}$.

Пусть имеет место вариант 1). В этом случае задача 5.2 эквивалентно сведена к интегральному уравнению Вольтерра второго рода со слабой особенностью, которое безусловно и однозначно разрешимо.

Рассмотрим теперь вариант 2). Для коэффициента λ_1 будем различать случаи когда: 1) $-2/\sqrt{27}<\lambda_1<2/\sqrt{27}$; $\lambda_1=\pm 2/\sqrt{27}$; $\lambda_1<-2/\sqrt{27}$ или $\lambda_1>2/\sqrt{27}$.

Здесь предлагается метод, позволяющий в каждом из трех случаев значений λ_1, редуцировать вопрос разрешимости задачи 5.2 к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность моему учителю Адаму Маремовичу Нахушеву за ту помощь, которую он оказывал как в

процессе написания настоящей работы, так и при обсуждении ее результатов.

Основные результаты работы опубликованы в работах:

1. Елеев В.А. Краевая задача для одного уравнения гиперболо-параболического типа // Орджоникидзе,СОГУ: вып.3, 1976. -с.31-37.

2. Елеев В.А. О некоторых задачах типа задачи Коши и задачи со смещением для одного вырождающегося гиперболического уравнения //Дифференциальные уравнения. -Минск: Изд-во "Наука и техника", т.12, !1, 1976. -с.46-58.

3. Елеев В.А. Аналог задачи Трикоми для смешанных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа. //Дифференциальные уравнения.-Минск: Изд-во "Наука и техника", т.13, !1, 1976. - с. 56-63.

4. Елеев В.А. О некоторых задачах типа Коши и задачах с "неполными начальными данными "для одного класса вырождающихся уравнений"//Известия Вузов, Математика. - Казань: Изд-во КУ, 180, №5, 1977. - с 32-44.

5. Елеев В.А. О некоторых краевых задачах со смещением для одного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа //Дифференциальные уравнения. -Минск: Изд-во "Наука и техника", т.14, №1, 1978. -с.22-29.

6. Елеев В.А. Обобщенная задача Трикоми для смешанных параболо-гиперболических уравнений //Тезисы докладов республиканского симпозиума по дифференциальным уравнениям. - Ашхабад, 1978. - с.12-13.

7. Елеев В.А. Обобщенная задача Трикоми для смешанных гиперболо-параболических уравнений //Дифференциальные уравнения. -Минск: Изд-во "Наука и техника" т.15, №1. 1979. с.41-53.

8. Елеев В.А. Обобщенная задача Трикоми для модельного уравнения гиперболо-параболического типа //Краевые задачи для уравнения смешанного типа и родственные проблемы функционального анализа и прикладной математики. - Нальчик, вып.2, 1979. - с.128-131.

9. Елеев В.А. Обобщенная задача Трикоми для смешанных гиперболо-параболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа //Дифференциальные уравнения. -Минск: Изд-во "Наука и техника" т.-16, №1, 1980. - с.59-73.

10. Елеев В.А. Обобщенная задача Трикоми для смешанного гиперболо- параболического уравнения с одновременным вырождением типа и порядка //Москва: Изд-во "Наука", ДАН СССР, т.253, №4. 1980. -с.796-799.

11. Елеев В.А. The Generalized Thicomi problema mixed hyperbolicparabolic equation With simultaneons degeneration of type and order. Mathematies, Subjectclassification, 1981. - с.158-162.

12. Елеев В.А. Some boundaruvale problems Withtranslations for parabolic-hyperbolic mixed equation. 1981. - с.98-103.

13. Елеев В.А. Обобщенная задача Трикоми для смешанного уравнения гиперболо-параболического типа с разрывными коэффициентами //Дифференциальные уравнения. -Минск: Изд-во "Наука и техника", т17, №1, 1981. - с.58-72.

14. Елеев В.А. Коши характеристическая задача. Математическая энциклопедия //Москва: Изд-во "Советская энциклопедия", т. №3,1982.- с.63-65.

15. Елеев В.А. Задача Трикоми для одного смешанного уравнения гиперболо-параболического типа с вырождением второго рода //Нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений смешанного типа и родственные проблемы непрерывного анализа.-Нальчик: 1982. - с.109 - 117.

16. Елеев В.А. Аналог задачи Франкля для смешанного уравнения гиперболо-параболического типа //Тезисы докладов участников Куйбышевского областного межвузовского научного совещания-семинара.-Куйбышев:Изд-во КУ, 1984.- с. 38-39.

17.Дрожина Л.И., Елеев В.А. Нелокальная краевая задача Бицадзе-Самарского для смешанного уравнения гиперболо-параболического типа- //Методы математического. моделирования в системах автоматизированного проектирования и планирования.-Нальчик: 1985.- с. 118-121.

18. Елеев В.А. Одна краевая задача для уравнения смешанного гиперболо-параболического типа //Нелокальные задачи для уравнения в частных производных и их приложения к моделированию и автоматизации проектирования сложных систем. -Нальчик: 1986.-с.183-186.

19. Елеев В.А. О краевых задачах для смешанного гиперболо-параболического типа //Дифференциальные уравнения. - Минск: Изд-во "Наука и техника", т.34, №4, 1988. - с. 628-635.

20. Елеев В.А. Cauchy characteristić problem //Изд. "Руйдуль", Vol:3/col: 63, 1987. - с. 114-117.

21. Елеев В.А. Об одной системе интегро-дифференциальных уравнений //Нелокальные задачи и их приложения к автоматизированным системам. - Нальчик: 1989. - с. 104-116.

22. Елеев В.А. Нелокальные краевые задачи со смещением для сопряженных гиперболических уравнений //Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. - Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1990. - с. 46-48.

23. Елеев В.А. О некоторых краевых задачах для нагруженного уравнения гиперболо - параболического типа второго порядка //Тезисы докладов научной конференции "Краевые задачи и их спектральные вопро-

сы для дифференциальных уравнений". - Алма-Ата: 1991. - с. 40.

24. Елеев В.А. Краевые задачи для смешанного уравнения гиперболо-параболического типа третьего порядка //Нелинейные эволюционные уравнения в прикладных задачах.-Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1991. - с. 36-38.

25. Елеев В.А., Кумыкова С.К. Краевая задача со смещением для смешанного уравнения третьего порядка //Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. - Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1991. - с. 41-44.

26. Елеев В.А. Об одной краевой задаче для смешанного уравнения гиперболо - параболического типа третьего порядка //Тезисы докладов третьей Северокавказской региональной конференции по функциональным и дифференциальным уравнениям и их приложениям. - Махачкала: Изд-во ДУ, 1991. - с. 61

27. Елеев В.А., Кумыкова С.К. О некоторых краевых задачах со смещением для одного смешанного уравнения третьего порядка //Тезисы докладов по дифференциальным и интегральным уравнениям, математической физике и специальным функциям. - Самара: 1992. - с. 92-93.

28. Елеев В.А. Краевые задачи для нагруженных уравнений гиперболо- параболического типа второго порядка //Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. - Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. - с. 49-52.

29. Елеев В.А., Кумыкова С.К. О некоторых краевых задачах со смещением для одного уравнения третьего порядка //Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. - Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. - с. 52-54.

30. Елеев В.А. О некоторых краевых задачах для смешанных нагру-

женных уравнений второго и третьего порядка //Дифференциальные уравнения. -Минск: Изд-во "Наука и техника", т.30, №2, 1994. -с. 230-236.

31. Елеев В.А. О краевых задачах для смешанного уравнения третьего порядка //Укр. мат. журнал. - Киев: Ин-т математики НАН Украины, т.47, №1, 1995. - с. 20-29.

32, Елеев В.А. Краевые задачи для нагруженного гиперболо-параболического уравнения с характеристической линией изменения типа //Укр.мат.журнал, т.47, №10, 1995. - с. 1219-1228.

33. Елеев В.А., Агирова Т. Краевые задачи для смешанных гиперболо-параболических уравнений с двумерной областью изменения типа. //-Вестник "КБГУ", серия "Математические науки", 1995. - с.135-140.

Елеев В.А. Краевые задачи для уравнений смешанного гиперболо-параболического типа. Диссертацией является рукопись из 266 стр. машинописного текста. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико- математических наук по специальости 01.01.02.- дифференциальные уравнения и 01.01.03.-математическая физика. Институт математики Национальной Академии Наук Украины. - Киев: 1995.

Защищается рукопись, которая посвящена исследованию вопроса однозначной разрешимости видоизмененных задач Коши и нелокальных краевых задач со смещением для вырождающегося гиперболического уравнения второ- го рода. В работе доказывается однозначная разрешимость нелокальных и локальных краевых задач для смешанно-составных уравнений гиперболо- параболического типа второго и третьего порядка. Для широкого класса гиперболо-параболических операторов с нехарактеристической линией изменения типа, получены априорные оценки, из которых следует единственность регулярного решения аналога задачи Трикоми и существование слабого решения сопряженной ей задачи. Построена теория как классической, так и обобщенной задачи Трикоми для смешанного, смешанно-составного, смешанно-нагруженного уравнений гиперболо-параболического типа второго и третьего порядков.

Eleev V.A. Some boundary problems for mixed hyperbolic-parabolic tipe equation.

The thesis is the typescript on 266p. Thesis for the doctor degree of physic-mathematical science on the speciality 01.01.02-differential equations and 01.01.03 - mathematical physics, Mathematical Institute of Ukranian National Academy of Sciences, Kiev, 1995.

The dissertation researches questions of uniquelity of Coshy problems and nonlocal boundary problems for mixed hiperbolic equations of second degree. The correct solvability of local and nonlocal boundary problems for hyperbolic - parabolic complex equations of second and thurd degree are investigated. For wide class of hiperbolic - parabolic type equations with noncharacteristic line aprior estimates are obtained. This conditions lids to the uniquelity of Tricomy - analogy problem and gives the existence of nonstrong solution. The theory of classic and nonclassic Tricomy problem for mixed hiperbolo-parabolic type complex equation are built.

Ключевые слова: дифференциальные, интегральные, нагруженные, смешанно - составные, смешанно - нагруженные уравнения; локальные, нелокальные, обобщенные задачи; априорные оценки.

Подп. в печ. 07.08.95. Формат 60x84/16. Бумага тип. Офс.печать
Усл. печ. л. 2,5 Усл. кр. кр.-отт. 2,5. Уч. -изд. л.1,56
Тираж 100 экз. Зак.№ 77 от 07.09.95 Бесплатно.

Отпечатано в Институте математики НАН Украины
252601 Киев, ГСП. ул. Терещенковская, 3