Дніпропетровський державний університет

На правах рукопису

Тав

ТАВАДЗЕ Людмила Лаврентіївна

ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

01.05.02 - Математичне моделювання та обчислювальні методи в наукових дослідженнях

АВТОРЕФЕРАТ
Дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дніпропетровськ 1995

Дисертацією є рукоп

Робота виконана на
математичної кібернетики
верситету

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент Балашова С.Д.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор Лучка А.Ю.

доктор фізико-математичних наук, доцент Кочубей О.О.

Провідна установа: Львівський державний університет

Захист відбудеться "16" листопада 1995 року о "14⁰⁰" годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 03.01.08 по захисту дисертацій на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук при Дніпропетровському державному університеті за адресою: 320044, м. Дніпропетровськ, пр. К.Маркса, 35, корп. 3, ауд. 42.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Дніпропетровського державного університету.

Автореферат розісланий "14" жовтня 1995 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
кандидат фіз.-мат.наук, доцент В.А.Турчина

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми та ступінь її досліджености. Багато які усталені процеси різного фізичного походження приводять до диференціальних рівнянь у частинних похідних еліптичного типу. Достатньо згадати стаціонарні задачі теплопровідності та дифузії, задачу про розподілення струму в провідному середовищі, задачі електростатики та магнітостатики, теорії пружності, теорії фільтрації та ін.

Як відомо, точні розв'язки крайових задач для еліптичних рівнянь вдається одержати лише в окремих випадках. Внаслідок цього широке розповсюдження і розвиток, особливо в зв'язку з появою швидкодіючих ЕОМ, одержали наближені методи. Існує велика кількість наближених методів, але їх наявність не виключає можливості створення нових, більш ефективних методів та удосконалення існуючих.

В дисертаційній роботі досліджуються методи проекційного типу або просто проекційні, які (на відзнаку від традиційного трактування) основані на ідеї будь якої апроксимації вихідного рівняння послідовністю наближених рівнянь і наступному точному їх розв'язанні, а також так звані проекційно ітераційні методи, що використовують ітераційні методи для розв'язування наближених рівнянь. Розглядається застосування цих методів до розв'язування крайових задач для рівнянь еліптичного типу.

Одним із традиційних методів чисельного розв'язування задач згаданого класу є метод скінченних різниць, якому присвячені відомі фундаментальні монографії С.К.Годунова, В.С.Рябенького; В.С.Рябенького, А.Ф.Філіппова; В.Вазова, Дж. Форсайта; А.Н.Тихонова, А.О.Самарського; А.О.Самарського; А.О.Самарського, А.В.Гуліна; А.О.Самарського, В.Б.Андреєва; А.О.Самарського, Є.С.Ніколаєва; Н.Н.Яненко; Є.Г.Дьяконова; І.І.Ляшко, В.Л.Макарова, А.А.Скоробогатько; А.О.Самарського, Р.Д.Лазарова, В.Л.Макарова; І.Н.Молчанова; Г.І.Марчука та ін. Цей метод, який може бути віднесеним до класу проекційних методів, одержав в дисертаційній роботі подальший розвиток. Побудовані на його основі проекційно-ітераційні методи виявилися більш ефективними порівняно з методом скінченних різниць, оскільки приводять не тільки до зменшення обчислювальних витрат, але й забезпечують більшу точність наближених розв'язків

Метою даної роботи є:

- розвиток теоретичних основ проекційних методів згідно зі схемою, уперше запропонованою Л.В.Канторовичем для рівнянь II-го роду в банахових просторах і використаною для рівнянь I-го роду з лінійними обмеженими операторами С.Д.Балашовою, стосовно до рівнянь I-го роду з лінійними необмеженими операторами і нелінійними операторами в банахових і гільбертових просторах, а також побудова схеми проекційно-ітераційних методів для вищезгаданих рівнянь;

- доведення того, що метод скінченних різниць укладається в указану схему методів проекційного типу і побудова на його основі різних проекційно-ітераційних методів;

- застосування проекційно-ітераційних методів до розв'язування деяких крайових задач для еліптичних рівнянь, розроблення комплексів програм для ЕОМ і порівнювальний аналіз цих методів і звичайних проекційних методів на модельних прикладах;

- чисельне розв'язання задачі теорії пружності, яка має науковий і прикладний інтерес, проекційно-ітераційним методом.

Наукова новизна та теоретична цінність роботи полягає в наступному:

- побудована загальна схема проекційних і проекційно-ітераційних методів для нового класу рівнянь - з лінійними необмеженими операторами, діючими в банаховому просторі;

- показано, що метод скінченних різниць цілком укладається в побудовану схему проекційних методів, і запропонована його так звана проекційно-ітераційна модифікація;

- для нелінійних рівнянь в банахових просторах доведено два висновки із основної теореми про збіжність методу Ньютона-Канторовича за умов типу Коші. Побудовано проекційний варіант цього методу;

- у випадку гільбертових просторів для розв'язування нелінійних рівнянь, які мають неперервну додатно визначену похідну Фреше, побудована проекційна модифікація неявного методу простої ітерації;

- проведено аналіз ефективності проекційно-ітераційних методів, одержано оцінки кількості арифметичних дій.

Практична цінність результатів дисертаційної роботи полягає в створенні нового ефективного чисельного методу розв'язання задач математичної фізики і теорії пружності, а також в алгоритмізації цього методу. Розроблений комплекс програм може бути застосований до розв'язування реальних науково-технічних задач, які зводяться до задачі Діріхле для рівняння Пуассона (у прямокутнику і крузі), для еліптичного рівняння із змінними коефіцієнтами (у прямокутнику), для системи рівнянь Ляме (у прямокутнику та паралелепіпеді), для слабконелінійного еліптичного рівняння (у прямокутнику), а також до розв'язування змішаної просторової крайової задачі теорії пружності.

Запропонований підхід і алгоритм його реалізації на ЕОМ можуть бути використаними у науково-дослідних та проектно-конструкторських організаціях для проектування та розрахунків елементів конструкцій нової техніки.

Вірогідність основних наукових результатів дисертації. В роботі використані поняття і методи математичного і функціонального аналізу, методів обчислень. При цьому апарат функціонального аналізу дає можливість досліджувати питання розв'язності, збіжності, одержання оцінок похибки для загального випадку операторного рівняння, що забезпечує строге теоретичне обгрунтування пропонованих методів, а також застосування цих методів до широкого класу конкретних задач. Коректність побудованих чисельних схем підтверджується результатами теорії різницевих методів, а також тестовими прикладами для задач, які мають точний розв'язок. Вірогідність здобутих у роботі розв'язків конкретних задач підтверджується узгодженістю результатів при різних порядках дискретизації, а також виконанням природних граничних умов.

Апробація роботи. Основні результати роботи доповідались та обговорювались на міжнародній конференції "Теорія наближення та задачі обчислювальної математики" (Дніпропетровськ, 1993 р.), на I-й Всеукраїнській конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (Дрогобич, 1994 р.), на конференціях за підсумками науково-дослідних робіт та семінарах кафедри обчислювальної математики і математичної кібернетики Дніпропетровського університету.

Публікації. Основні наукові результати, які включені до дисертації, надруковані у 8 статтях та тезах доповідей конференцій. Зміст тез не викладений в інших публікаціях.

Структура і обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновку та списку літератури із 144 найменувань. Робота містить 152 сторінки друкованого тексту, 10 малюнків та 16 таблиць.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі обгрунтовані актуальність та практичне значення роботи, проведено огляд публікацій вітчизняних та закордонних авторів за темою дисертації, сформульовані мета роботи і основні результати, які виносяться на захист.

У першому розділі побудована загальна схема проекційних та проекційно-ітераційних методів для розв'язання рівняння

$$A u = f \qquad (1)$$

з лінійним, взагалі кажучи, необмеженим оператором A, діючим у банаховому просторі X.

Проекційний метод розв'язування рівняння (1) полягає в тому, що це рівняння апроксимується послідовністю "наближених" рівнянь

$$A_n u_n = f_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (2)$$

де A_n - лінійний обмежений оператор, діючий у підпросторі X_n вихідного простору X ($X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots \subset X$); $f_n = P_n f$, P_n - лінійний проектуючий оператор, який переводить X на X_n. Кожне із наближених рівнянь (2) розв'язується точно і послідовність точних розв'язків $\{u_n^*\}$ наближених рівнянь оголошується послідовністю наближень до розв'язку u^* вихідного рівняння.

Поряд з проекційним методом розглядається проекційно-ітераційний метод розв'язування рівняння (I), побудований на застосуванні до розв'язання кожного із наближених рівнянь (2) деякого методу, який визначається оператором V. Побудувавши згідно з цим методом k_n наближень $u_n^{(k)}$ ($k=1,2,\ldots,k_n$) для n-го наближеного рівняння і вважаючи останнє із них рівним початковому наближенню для $(n+1)$-го рівняння, отримуємо послідовність $\left\{u_n^{(k_n)}\right\}$ наближень до розв'язку u^* рівняння (I):

$$u_n^{(k+1)} = V(u_n^{(k)}, A_n, f_n), \quad u_{n+1}^{(0)} = u_n^{(k_n)} \tag{3}$$

$$(n= 1,2,\ldots; \quad k= 0,1,\ldots,k_n-1 \ ; \quad u_1^{(0)} \in X_1).$$

Зокрема, у ролі V пропонується розглядати нестаціонарний ітераційний процес:

$$V(u_n^{(k)}, A_n, f_n)= u_n^{(k)} - \tau_n^{(k+1)}(B_n^{(k)})^{-1}(A_n u_n^{(k)} - f_n),$$

де $B_n^{(k)}$ - деякий лінійний обмежений оператор у підпросторі X_n (для якого існує зворотний оператор $(B_n^{(k)})^{-1}$), який залежить, взагалі кажучи, від номера ітерації k і задає той чи інший конкретний ітераційний метод; $\tau_n^{(k+1)}$ - ітераційний параметр. Ітераційний процес вважається монотонним.

В припущенні, що виконуються умови

$$\| P_n Au^* - A_n P_n u^* \| \le \alpha_n, \quad \alpha_n \longrightarrow 0 \text{ при } n \longrightarrow \infty; \tag{4}$$

$$\| P_n u^* - u^* \| \le \beta_n, \quad \beta_n \longrightarrow 0 \text{ при } n \longrightarrow \infty; \tag{5}$$

$$\| A_n^{-1} \| \le C, \qquad C = const, \tag{6}$$

доводяться теореми I.I, I.2 про збіжність послідовностей $\{u_n^*\}$ і $\left\{u_n^{(k_n)}\right\}$ до u^*.

Отримані результати переносяться на випадок, що часто зустрічається у практиці, коли "наближені" рівняння

$$\tilde{A}_n \tilde{u}_n = \tilde{f}_n, \qquad n= 1,2,\ldots \tag{7}$$

задані не в підпросторах X_n вихідного простору X, а в деяких просторах $\tilde{X}_n$, ізоморфних цим підпросторам.

Позначивши Φ_n і Φ_n^{-1} лінійні оператори, які здійснюють взаємно однозначне відображення X_n на $\tilde{X}_n$ і $\tilde{X}_n$ на X_n відповідно, такі, що $\|\Phi_n\| \le C'$, $\|\Phi_n^{-1}\| \le C''$, і вводячи оператор $\bar{\Phi}_n$, який є продовженням Φ_n на простір X (наприклад, $\bar{\Phi}_n = \Phi_n P_n$), припускаються виконаними наступні умови:

$$\| \bar{\Phi}_n A u^* - \tilde{A}_n \Phi_n u^* \| \le \tilde{\alpha}_n, \quad \tilde{\alpha}_n \to 0 \text{ при } n \to \infty; \tag{8}$$

$$\| \Phi_n^{-1} \bar{\Phi}_n u^* - u^* \| \le \tilde{\beta}_n, \quad \tilde{\beta}_n \to 0 \text{ при } n \to \infty; \tag{9}$$

$$\| \tilde{A}_n^{-1} \| \le \tilde{C}, \quad \tilde{C} = const. \tag{10}$$

В припущенні, що $\tilde{f}_n = \bar{\Phi}_n f$, встановлюється, що рівняння (2) та (7) можна вважати еквівалентними в тому сенсі, що із однозначної розв'язності одного із них витікає однозначна розв'язність іншого, і їх розв'язки зв'язані співвідношеннями $u_n^* = \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^*$, $\tilde{u}_n^* = \Phi_n u_n^*$.

Так, як і у випадку, коли наближені рівняння задані в підпросторах X_n, до розв'язування рівнянь (7) застосовуються ітераційні методи. Послідовність $\left\{ \tilde{u}_n^{(k_n)} \right\}$, яка визначає проекційно-ітераційний метод розв'язання рівняння (I), будується за формулами

$$\tilde{u}_n^{(k+1)} = \tilde{V}(\tilde{u}_n^{(k)}, \tilde{A}_n, \tilde{f}_n), \quad \tilde{u}_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1} \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)} \tag{11}$$

$$(n = 1, 2, \dots; \; k = 0, 1, \dots, k_n - 1; \; \tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{X}_1),$$

де $\tilde{V}$ – оператор ітераційного методу (який припускається монотонним), зокрема

$$\tilde{V}(\tilde{u}_n^{(k)}, \tilde{A}_n, \tilde{f}_n) = \tilde{u}_n^{(k)} - \tilde{\tau}_n^{(k+1)} (\tilde{B}_n^{(k)})^{-1} (\tilde{A}_n \tilde{u}_n^{(k)} - \tilde{f}_n).$$

Показується, що виконаність умов (8)-(10) приводить до виконаності умов (4)-(6) відповідно і навпаки, при цьому $\alpha_n = C'' \tilde{\alpha}_n$, $\beta_n = \tilde{\beta}_n$, $C = C'' \tilde{C} C'$, а формули (3) і (11) еквівалентні в тому сенсі, що наближення, які ними визначаються, зв'язані співвідношеннями: $u_n^{(k_n)} = \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)}$, $\tilde{u}_n^{(k_n)} = \Phi_n u_n^{(k_n)}$.

Завдяки встановленим відповідностям збіжність послідовностей $\left\{ \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^* \right\}$, $\left\{ \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)} \right\}$ до u^* негайно витікає із теорем I.1 і I.2. Доводиться також збіжність послідовностей $\left\{ \tilde{u}_n^* \right\}$, $\left\{ \tilde{u}_n^{(k_n)} \right\}$ до елементу $\Phi_n u^*$ (теореми I.3, I.4).

У кінці першого розділу (п.3 § 3) приводяться деякі рекомендації стосовно вибору чисел k_n.

<u>У другому розділі</u> проекційно-ітераційні методи застосовуються до розв'язування рівнянь еліптичного типу. При цьому розглядаються класичні крайові умови, а рівняння записуються в декартовій системі координат. На прикладі задач Діріхле для рівняння Пуассона і для еліптичного рівняння із змінними коефіцієнтами показується, що метод скінченних різниць розв'язування цих задач відноситься до класу проекційних методів і обгрунтовується його проекційно-ітераційна модифікація.

Проекційно-ітераційний метод розв'язування еліптичного диференціального рівняння

$$\tilde{L}\, u = -f(x,y), \quad (x,y)\in G, \tag{12}$$

$$\bar{G}= G+\Gamma= \{(x,y): \ 0 \le x \le l_1, \ 0 \le y \le l_2\}$$

(або, що є тим самим, операторного рівняння (1) ($A = -L$)), заданого у просторі $X= \mathring{L}_2(\bar{G})$ функцій $u \in L_2(\bar{G})$, задовольняючих граничній умові

$$u\Big|_{\Gamma} = 0, \tag{13}$$

складається в тому, що це рівняння апроксимується послідовністю скінченно-різницевих рівнянь

$$L_n u_n(x_i,y_j)= -\varphi_n(x_i,y_j), \quad (x_i,y_j)\in \omega_h^{(n)}, \tag{14}$$

(або, що є тим самим, наближених рівнянь (4) ($\tilde{A}_n = -L_n$)), заданих у просторах $\tilde{X}_n$ сіткових функцій $\tilde{u}_n = u_n(x_i,y_j)$, визначених на сітці

$$\bar{\omega}_h^{(n)} = \omega_h^{(n)} + \gamma_h^{(n)} = \Big\{(x_i,y_j)\in \bar{G}: x_i=ih_1^{(n)}, \ i= \overline{0,N_1^{(n)}}, \ y_j=jh_2^{(n)}, \ j=\overline{0,N_2^{(n)}}, \ h_1^{(n)}=l_1/N_1^{(n)}, \ h_2^{(n)}=l_2/N_2^{(n)}\Big\}$$

і задовольняючих умові

$$u_n(x_i,y_j)\Big|_{\gamma_h^{(n)}} = 0. \tag{15}$$

Для кожної із систем скінченно-різницевих рівнянь (14), починаючи із системи невисокого порядку, будується по декілька наближень $u_n^{(k)}(x_i,y_j)$ ($k =1,2,\ldots,k_n$) за допомогою деякого ітераційного методу; сітковій функції $u_n^{(k_n)}(x_i,y_j)$ ставиться у відповідність функція $u_n(x,y)\in X_n\subset \mathring{L}_2(\bar{G})$ вигляду

$$u_n(x,y)= \sum_{i=0}^{N_1^{(n)}-1}\ \sum_{j=0}^{N_2^{(n)}-1} u_n(x_i,y_j)\, \chi_{ij}^{(n)}(x,y). \tag{16}$$

де $\chi_{ij}^{(n)}(x,y)$ - характеристична функція комірки

$$G_{ij}^{(n)} = \{(x,y):\ x_i \le x \le x_{i+1},\ y_j \le y \le y_{j+1}\}$$

сітки $\bar{\omega}_h^{(n)}$, і обчислюється вектор значень функції (16) у вузлах сітки $\omega_h^{(n+1)}$, який приймається за початкове наближення $u_{n+1}^{(0)}(x_i,y_j)$ до розв'язку наступної скінченно-різницевої системи. В ролі послідовності наближень до розв'язку вихідної задачі (12),(13) виступає $\left\{u_n^{(k_n)}(x_i,y_j)\right\}$.

При цьому виявляється, що простори $X_n \subset X$ та $\tilde{X}_n$ ізометричні. Крім функцій $u_n(x,y) \in X_n$ вигляду (16), використовуються також дві інші функції (формули (2.8),(2.11)), отримані лінійною інтерполяцією. Для кожного із згаданих способів побудови апроксимуючих просторів установлюється виконаність усіх умов теореми 1.4 про збіжність.

Розв'язані конкретні задачі проекційно-ітераційним, а також звичайним різницевим методами з використанням різних ітераційних процесів (простої ітерації, Зейделя, релаксації, найшвидшого спуску, з мінімальними відхилами, з Чебишевським оптимальним набором параметрів). Подано результати чисельних експериментів (табл.2.1, 2.2), на основі яких проведено аналіз ефективності проекційно-ітераційних методів.

У третьому розділі результати розділу 1 застосовуються до розв'язування задачі Діріхле для системи рівнянь Ляме стаціонарної теорії пружності. Так само, як і в розділі 2, показується, що різницевий метод розв'язування цієї задачі цілком укладається у схему проекційного методу, і будується його проекційно-ітераційна модифікація. Запропонований підхід ілюструється розв'язанням двовимірних і тривимірних модельних задач, при цьому використовуються ітераційні методи із прискореною збіжністю - метод змінних напрямків і попереміннo-трикутниковий метод, досліджуються різні способи побудування початкових наближень для наступних скінченно-різницевих систем і різні варіанти переходу від сітки $\bar{\omega}_h^{(n)}$ до сітки $\bar{\omega}_h^{(n+1)}$ (формули (2.35),(2.39)).

Результати чисельної реалізації (табл.3.1-3.5) свідчать про значні переваги проекційно-ітераційних методів, особливо в тривимірному випадку, що дає підставу вважати ефективним застосування цих методів і до розв'язування задачі механіки про визначення напружено-деформованого стану пружного тривимірного тіла, яке перебуває під дією розподіленого по верхній грані нормального навантаження.

Припускається, що тіло G є однорідним та ізотропним (тобто в кожній точці тіла механічні властивості матеріала однакові в усіх напрямках) і має форму прямокутного паралелепіпеда. Параметри тіла: довжина l_1, ширина l_2, висота l_3; λ та μ - коефіцієнти Ляме матеріала, із якого складається тіло. У припущенні $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ межою тіла G, де $\Gamma_2 = \{x_2 = l_2, 0<x_1<l_1, 0<x_3<l_3\}$, $S \subset \Gamma_2$, задача про визначення поля переміщень точок тіла $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$, $x=(x_1, x_2, x_3)$, яка зображується системою рівнянь Ляме, розв'язується за наступних граничних умов.

На бічних гранях паралелепіпеда і його нижній грані поле переміщень є відомим

$$u(x) = g(x), \quad x \in \Gamma_1 .$$

На верхній (навантаженій) грані Γ_2 маємо

$$\tau_{x_1 x_2} = 0, \quad \tau_{x_2 x_3} = 0, \quad x \in \Gamma_2 , \quad \sigma_{x_2} = \begin{cases} q(x_1, x_3), & x \in S \\ 0, & x \in \Gamma_2 \setminus S , \end{cases}$$

де σ_{x_2} - нормальна складова напруження, діючого на грані Γ_2, $\tau_{x_1 x_2}$, $\tau_{x_2 x_3}$ - його дотичні складові.

Для чисельного розв'язання цієї задачі застосовується проекційно-ітераційний метод, який використовує метод змінних напрямків як ітераційний. Величина кроку сітки вибирається з такого розрахунку, щоб вузли розбиття потрапляли і на границю прикладання навантаження, що дало змогу здобути найбільш повний різницевий аналог вихідної задачі. Із тих самих міркувань в процесі використовуються вкладені сітки. Кількість наближень k_n, що будуються на кожному етапі проекційно-ітераційного методу, вибирається по заданій точності $\varepsilon_n > 0$ ітераційного процесу, яка припускається рівною величині однакового порядку із похибкою різницевої схеми.

Приводяться результати розрахунків на ЕОМ типу *IBM PC* із сопроцесором *Intel-80387* (табл. 3.II).

Четвертий розділ присвячений дослідженню проекційно-ітераційних методів розв'язування нелінійного рівняння

$$A u = f \tag{17}$$

з оператором A, диференційованим за Фреше в деякій кулі S банахова простору X. Сформульовано і доведено два висновки (теореми 4.2, 4.3) із основної теореми 4.1 про збіжність методу Ньютона-Канторовича за умов типу Коші. Згідно з тією ж схемою, що і в розділі I, розроблено проекційний варіант цього методу, згідно з яким для кожного із наближених рівнянь

$$A_n u_n = f_n,$$

починаючи з деякого n, відшукується декілька наближень $u_n^{(k)}$ $(k=1,2,\ldots,k_n)$ методом Ньютона-Канторовича, а $u_n^{(k_n)}$ припускається рівним початковому наближенню для $(n+1)$-го рівняння:

$$u_n^{(k+1)} = u_n^{(k)} - [A_n'(u_n^{(k)})]^{-1}(A_n u_n^{(k)} - f_n), \quad u_{n+1}^{(0)} = u_n^{(k_n)} \tag{18}$$

$$(n = N, N+1, \ldots ; \quad k = 0, 1, \ldots, k_n - 1 ; \quad u_N^{(0)} \in X_N).$$

В припущенні, що виконуються умови близькості

$$\| P_n A u_n - A_n u_n \| \le \alpha_n, \quad \alpha_n \to 0 \text{ при } n \to \infty, \tag{19}$$

$$\| P_n A'(u_n) - A_n'(u_n) \| \le \alpha_n', \quad \alpha_n' \to 0 \text{ при } n \to \infty \tag{20}$$

для всіх $u_n \in \Omega_n = X_n \cap S(u_N^{(0)}, R)$;

$$\| P_n A u - A u \| \le \beta_n, \quad \beta_n \to 0 \text{ при } n \to \infty, \tag{21}$$

$$\| P_n A'(u) - A'(u) \| \le \beta_n', \quad \beta_n' \to 0 \text{ при } n \to \infty \tag{22}$$

для всіх $u \in S(u_N^{(0)}, R)$;

$$\| P_n f - f \| \le \gamma_n, \quad \gamma_n \to 0 \text{ при } n \to \infty, \tag{23}$$

що похідна $A_n'(u_n)$ задовольняє на множині Ω_n умові Ліпшиця

$$\| A_n'(u_n) - A_n'(v_n) \| \le L \, \| u_n - v_n \|$$

і існують оператори $[A_n'(u_n)]^{-1}$, $u_n \in \Omega_n$, та $[A'(u)]^{-1}$, такий що

$$\| [A'(u)]^{-1} \| \le b, \quad u \in S,$$

а також що початкове наближення $u_N^{(0)}$ задовольняє умовам

$$\| A_N u_N^{(0)} - f_N \| \le \eta_N^{(0)}, \quad h_N^{(0)} = b_N^2 L \eta_N^{(0)} < 2,$$

$$r_N = b_N \eta_N^{(0)} G_N \le R,$$

де

$$b_N = \frac{b}{1 - b(\alpha_N' + \beta_N')}, \quad G_N = H_N + \sum_{i=N}^{\infty} \left[\frac{h_N^{(0)}}{2} \right]^{2^{t_i} - 1} < 2H_N,$$

$$t_i = \sum_{m=N}^{i} (k_m - 1), \quad H_N = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{h_N^{(0)}}{2} \right]^{2^i - 1}.$$

доведені здійсненність і збіжність процесу (18) (теорема 4.4) до розв'язку u^* рівняння (17). Доведені також два висновки з теореми 4.4 (теореми 4.5, 4.6). Отримані оцінки похибки.

В розділі 4 досліджуються також проекційні та проекційно-ітераційні методи розв'язування нелінійного рівняння (17) в гільбертовому просторі X у випадку неперервної додатно визначеної в деякій кулі S простору X похідної $A'(u)$. Вважаючи, що виконуються умови (19),(21) і оператор A_n має неперервну додатно визначену похідну $A_n'(u_n)$ на множині Ω_n, доводиться теорема 4.7 про збіжність послідовності $\{ u_n^* \}$ до u^*.

Далі для розв'язування рівняння (17) надається проекційний варіант неявного методу простої ітерації. У цьому випадку проекційно-ітераційна послідовність $\{ u_n^{(k_n)} \}$ будується за формулами

$$B_n u_n^{(k+1)} = B_n u_n^{(k)} - \tau_n (A_n u_n^{(k)} - f_n), \quad u_{n+1}^{(0)} = u_n^{(k_n)} \tag{24}$$
$$(n = N, N+1, \ldots ; \ k = 0, 1, \ldots, k_n - 1 ; \ u_N^{(0)} \in X_N),$$

де B_n - деякий лінійний обмежений оператор в X_n; τ_n - ітераційний параметр. На вибір початкового наближення накладається лише одне обмеження: $u_N^{(0)}$ повинно належати множині Ω_N. В припущенні, що виконуються умови близькості (19),(21), а також що оператори $A_n'(u_n)$ і B_n є самоспряженими, додатно визначеними та енергетично еквівалентними в X_n, доводиться теорема 4.8 про збіжність послідовності $\{ u_n^{(k_n)} \}$ до u^*.

Здобуті результати так само, як і для лінійних рівнянь, перенесені на випадок, коли наближені рівняння задані в деяких просторах, ізоморфних підпросторам вихідного простору.

Розглянуто питання про застосування проекційних модифікацій методу Ньютона-Канторовича і неявного методу простої ітерації до розв'язання задачі Діріхле для слабконелінійного еліптичного рівняння.

<u>У висновку</u> сформульовані основні наукові та практичні результати дисертації, які полягають у наступному:

- побудована загальна схема проекційних і проекційно-ітераційних методів для лінійних рівнянь з необмеженими операторами, діючими в банахових просторах. Доведені теореми про збіжність, одержані оцінки похибок;
- показано, що метод скінченних різниць цілком уклада-

ється в побудовану схему проекційних методів, і запропонована його проекційно-ітераційна модифікація;

- розглянуто питання про застосування проекційно-ітераційних методів до розв'язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона, для еліптичного рівняння із змінними коефіцієнтами, для системи рівнянь Ляме у дво- та тривимірному випадках;

- запропонований підхід проілюстровано на модельних прикладах (при цьому розглянуті різні методи побудування апроксимуючих просторів, в яких задані наближені (різницеві) рівняння, а для розв'язання цих рівнянь використані різні ітераційні методи) і потім застосовано до розв'язання задачі механіки, яка має науковий та прикладний інтерес;

- для нелінійних рівнянь в банахових просторах доведено два висновки із основної теореми про збіжність методу Ньютона-Канторовича за умов типа Коші. Побудовано проекційний варіант цього методу (доведені теореми про збіжність, одержані оцінки похибок). Показано застосування методу до розв'язання задачі Діріхле для слабконелінійного еліптичного рівняння;

- у випадку гільбертових просторів для розв'язання нелінійних рівнянь з операторами, які мають неперервну додатно визначену похідну Фреше, побудована проекційна модифікація неявного методу простої ітерації. Доведені теореми про збіжність. Здобуто розв'язок модельної слабконелінійної задачі;

- розроблено комплекс програм для ЕОМ для розв'язування згаданих класів задач, проведено аналіз ефективності проекційно-ітераційних методів, одержано оцінки кількості арифметичних дій, на базі здобутих результатів зроблено висновок про ефективність запропонованого методу.

<u>Конкретна особиста участь автора</u> в здобутті наукових результатів у надрукованих роботах. Автором доведені загальні теореми про збіжність проекційного та проекційно-ітераційного методів для розв'язування лінійних рівнянь I роду з необмеженими операторами в банахових просторах [4]. Показано, що метод скінченних різниць цілком укладається в схему проекційних методів і обгрунтовано його проекційно-ітераційну модифікацію на прикладі задач Діріхле для рівняння Пуассона [4], для еліптичного рівняння із змінними коефіцієнтами [6], для системи рівнянь Ляме теорії пружності [7]. Автором розв'яза-

на просторова задача теорії пружності із змішаними крайовими умовами [8]. Для нелінійних рівнянь в банахових просторах здобута низка висновків із основної теореми про збіжність методу Ньютона-Канторовича за умов типу Коші, розроблені проекційні варіанти цього методу [8] і неявного методу простої ітерації [3]: доведені теореми про збіжність, отримано оцінки похибки, показано застосування до розв'язання слабконелінійного еліптичного рівняння. Автором розроблено комплекс програм на ЕОМ, проведено аналіз результатів обчислювальних експериментів [I, 6] і отримано оцінки кількості арифметичних дій в проекціонно-ітераціонному методі [5].

Основні результати дисертації опубліковані в роботах:

I. Балашова С.Д., Тавадзе Л.Л. Сравнительный анализ проекционного и проекционно-итерационного методов решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона // Вопросы прикладной математики и математического моделирования. - Днепропетровск: ДГУ, I992. - С. 39-49.

2. Тавадзе Л.Л. Применение проекционно-итерационных методов к решению задачи Дирихле для эллиптического уравнения с переменными коэффициентами // Вопросы прикладной математики и математического моделирования. - Днепропетровск: ДГУ, I992. - С. 50-60.

3. Балашова С.Д., Тавадзе Л.Л. Применение проекционно-итерационных методов к решению слабонелинейного эллиптического уравнения //Вопросы прикладной математики и математического моделирования.- Днепропетровск: ДГУ, I995. - С. 54-60.

4. Балашова С.Д., Тавадзе Л.Л., Тавадзе Э.Л. Применение проекционно-итерационных методов к решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона.- Днепропетровск, I99I.- 28 с. - Деп. в ВИНИТИ I2.06.9I, № 2486 - В 9I.

5. Балашова С.Д., Тавадзе Л.Л. О числе арифметических действий в проекционно-итерационном методе.- Днепропетровск, 1994.- 2I с.- Деп. в ГНТБ Украины 20.07.94, № I3I6 - Ук 94.

6. Балашова С.Д., Тавадзе Л.Л., Тавадзе Э.Л. Проекционно-итерационные методы и их применение к решению некоторых задач математической физики и теории упругости // Теорія наближення та задачі обчислювальної математики: Тези міжнар. конф. - Дніпропетровськ: ДДУ, I993. - С. I7.

7. Балашова С.Д., Тавадзе Л.Л. Розв'язання задачі Діріхле для системи диференціальних рівнянь Ламе проекційно-ітераційним методом // Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь: Тези Всеукр. конф. - Київ, 1994. - С. 10.

8. Балашова С.Д., Тавадзе Л.Л. Применение проекционно-итерационных методов к решению некоторых эллиптических задач // Математика. Компьютер. Образование: Тезисы междунар. конф. - Москва, 1995. - С. 30-31.

Tavadze L.L. Projection-iteration methods of solving boundary value problems for equations of elliptic type.
Thesis for obtaining a scientific degree of "Candidate of Physico-Mathematical Sciences" on speciality 01.05.02 - Mathematical modeling and calculative methods in scientific researches, Dnepropetrovsk University, Dnepropetrovsk, 1995.
In the dissertation a general scheme of the projection and projection-iteration methods of solving linear and nonlinear operator eguations in Banach and Hilbert spaces is worked out. It is shown that the finite difference method of solving elliptic boundary value problems is the method of projection type and its projection-iteration modification is grounded. The complex of programs on ECM is elaborated. The analysis of efficiency is conducted.

Тавадзе Л.Л. Проекционно-итерационные методы решения краевых задач для уравнений эллиптического типа.
Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 - Математическое моделирование и вычислительные методы в научных исследованиях, Днепропетровский госуниверситет, Днепропетровск, 1995.
В диссертации построена общая схема проекционных и проекционно-итерационных методов решения линейных и нелинейных операторных уравнений в банаховых и гильбертовых пространствах. Показано, что метод конечных разностей решения эллиптических краевых задач является методом проекционного типа, и обоснована его проекционно-итерационная модификация. Разработан комплекс программ на ЭВМ. Проведен анализ эффективности.

Ключові слова: оператор, рівняння, метод, проекційний, проекційно-ітераційний, різницевий, послідовність, наближення, збіжність, крайова задача, еліптичне рівняння.

тип. ДГУ зак. 1746-100.