

На правах рукописи

АСКАРОВ Мамыт

**ОПТИМИЗАЦИЯ ОДНОШАГОВЫХ
АППРОКСИМАЦИОННО-ИТЕРАТИВНЫХ
МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ
УРАВНЕНИЙ**

01. 01. 01 — математический анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико—математических наук



00360433 (J)

Диссертация есть рукопись.
Работа выполнена в отделе теории математики

Научный руководитель:

доктор физико—математических наук
ПЕРЕВЕРЗЕВ С. В.

Официальные оппоненты:

доктор физико—математических наук
БОИЧУК А. А.
кандидат физико—математических наук
СИНЕНКО М. А.

Ведущая организация:

Институт кибернетики им В. М.
Глушкова НАН Украины.

Защита состоится « 14 » ноября 1995 г.

в 15. 00 часов на заседании специализированного совета Д. 01
66. 01. при Институте математики НАН Украины по адресу:

252601, Киев—4, ГСП, улица Терещенковская, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан « 12 » октября 1995 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
доктор физико—математических наук

(ГУСАК Д. В.)

ЛНБ ім. В. Стефаніка
АН України

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию скорости сходимости итеративных методов приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма II рода. Наиболее простым и известным итерационным методом является метод последовательных приближений. Но сходимость этого метода предполагает достаточно сильные ограничения на интегральные операторы. Поэтому еще со времен Е. Шмидта (1907) ведутся разработки и исследования разнообразных итеративных методов, которые сходятся тогда, когда метод последовательных приближений не может быть применен. Обширный класс методов такого рода составляет так называемые одношаговые аппроксимационно-итеративные методы. Различные схемы построения этих методов предложены в работах Ю. Д. Соколова, В. И. Лебедева, А. М. Самойленко и Н. И. Ронто, А. Д. Лучки, Н. С. Курпеля, В. К. Дядька. В данной работе основное внимание сконцентрировано на выяснении вопроса об оптимальной скорости сходимости некоторых типов аппроксимационно-итеративных методов. А именно, проекционно-итеративных методов Соколова-Лучки-Курпеля, методов типа метода Ю. Д. Соколова и КР-методов Лебедева.

Следует сказать, что исследования проблемы оптимизации скорости сходимости аппроксимационно-итеративных методов решения интегральных уравнений были начаты в работах С. В. Переверзева и продолжены его ученицей М. А. Синянюк. Эти результаты относятся, главным образом, к случаю интегральных уравнений Фредгольма II рода, ядра которых имеют конечную гладкость, т. е. фиксированное число частных производных, ограниченных в той или иной метрике. Между тем, еще в программной работе К. И. Бабенко отмечалась важность рассмотрения случая бесконечной гладкости. Кроме того, очевидный интерес представляют слабо-сингулярные интегральные уравнения, естественно возникающие в целом ряде задач математической физики. Поэтому представляется целесообразным,

продолжая исследования С.В. Переверзева и М.А. Сinenко, рассмотреть задачу об оптимальной скорости сходимости основных аппроксимационно-итеративных методов на классах уравнений Фредгольма с бесконечно дифференцируемыми, например, аналитическими, и слабо-сингулярными ядрами. Этому и посвящена данная диссертация.

Цель работы состоит в получении точных порядковых оценок оптимальной скорости сходимости проекционно-итеративных методов, методов типа метода Ю.Д. Соколова и КР-методов В.И. Лебедева на классах уравнений с аналитическими, гармоническими и слабо-сингулярными ядрами, а также - в указании методов, обеспечивающих оптимальную по порядку скорость сходимости.

Методика исследований. Основные результаты диссертации получены путем привлечения методов современной теории наилучших приближений и функционального анализа. В работе систематически используются теорема о поперечнике шара, элементы общей теории приближенных методов Л.В. Канторовича.

Научная новизна и практическая значимость. Основные результаты работы являются новыми и в определенном смысле неулучшаемыми. Они состоят в следующем:

- установлено, что для классов уравнений Фредгольма II рода с периодическими аналитическими и гармоническими ядрами порядки оптимальной скорости сходимости адаптивных и неадаптивных вариантов проекционно-итеративных методов и методов типа метода Ю.Д. Соколова совпадают, найдены эти порядки и указаны реализующие их методы;

- для интегральных уравнений с аналитическими и гармоническими ядрами найден точный порядок оптимальной скорости сходимости неадаптивных КР-методов, построенных на базе ортопроекторов;

- получены порядковые оценки оптимальной скорости сходимости проекционно-итеративных методов и методов типа метода Ю.Д. Соколова на классах слабо-сингулярных интегральных

уравнений с ядрами типа потенциала.

Работа носит теоретический характер. Установленные в ней факты могут быть использованы при построении методов решения прикладных задач, связанных с интегральными уравнениями.

Апробация работы и публикации. Полученные в диссертации результаты докладывались и обсуждались на семинаре отдела теории приближений Института математики НАН Украины, на У научно-теоретической конференции молодых ученых и специалистов Каракалпакского госуниверситета (Нукус - 1993), на международной научной конференции "Теория приближения и задачи вычислительной математики" (Днепропетровск - 1993).

Основные результаты выполненных исследований опубликованы в [1 - 5].

Структура и объем работы. Диссертация объемом 115 страниц машинописного текста состоит из введения, десяти параграфов и списка цитированной литературы из 34 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первом параграфе представлено описание аппроксимационно-итеративных методов, которые исследуются в дальнейшем.

Пусть X - линейное нормированное пространство, а F_N - некоторое N -мерное подпространство X . Через $\mathcal{P}(F_N)$ обозначим множество операторов проектирования (проекторов) из X в F_N . Кроме того, через $\mathcal{P}_N = \mathcal{P}_N(X)$ будем обозначать множество всевозможных проекторов на произвольные подпространства X фиксированной размерности N .

Рассмотрим в X линейное операторное уравнение Π рода

$$\bar{z} = Hz + f$$

(1)

где \bar{z} - искомый элемент, f - известный элемент, а H - некоторый линейный непрерывный оператор из X в X .

Как уже отмечалось, в диссертации рассматриваются следующие одношаговые аппроксимационно-итеративные методы приближенного решения (1): проекционно-итеративные методы (PI-методы), методы типа метода В. Д. Соколова и КР-методы В. И. Лебедева. Каждый из названных методов можно рассматривать как комбинацию метода последовательных приближений и некоторого проекционного (прямого) метода. Кроме того, каждый из них суть линейный, стационарный итерационный процесс, определяемый формулой вида

$$\bar{z}_m = \bar{z}_{m-1} + B(H\bar{z}_{m-1} - \bar{z}_{m-1} + f), \quad (2)$$

$$m = 1, 2, \dots$$

Здесь \bar{z}_{m-1} - приближенное решение (1), определенное на предыдущем шаге итерации, а B - некоторый линейный оператор, характеризующий итерационный метод. Так, например, в зависимости от того или иного проектора $P \in \mathcal{P}_N$ проекционно-итеративный метод может быть задан формулой (2), в которой

$$B = B_{PI} = B_{PI}(H, P) = I + H(I - PH)^{-1}P, \quad (3)$$

где I - тождественный (единичный) оператор. С другой стороны, методы типа метода В. Д. Соколова определяются формулой (2) при

$$B = B_{\text{ССК}} = B_{\text{ССК}}(H, P) = I + H(I - PH)^{-1}. \quad (4)$$

В свою очередь, КР-методы задаются формулой (2), в которой

$$B = B_{\text{КР}} = B_{\text{КР}}(H, P) = I + (I - PH)^{-1}PH \quad (5)$$

Второй параграф диссертации содержит постановку задачи об оптимальной скорости сходимости аппроксимационно-итеративных методов.

Будем говорить, что стационарный одношаговый итерационный процесс (2) сходится к решению \bar{x} уравнения (1) со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$, если для любого $m = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$\| \bar{x} - \bar{x}_m \|_X \leq cq^m,$$

где постоянная c не зависит от q и m .

Итерационный процесс (2) можно представить как метод последовательных приближений

$$\bar{x}_m = T\bar{x}_{m-1} + \psi \quad (6)$$

для уравнения

$$\bar{x} = T\bar{x} + \psi, \quad (7)$$

эквивалентного исходному уравнению (1), где оператор T определяется равенством

$$T = T(B, H) = BH - B + I \quad (8)$$

Известно, что если оператор T вполне непрерывен и его спектральный радиус

$$r(T) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|_{X \rightarrow X}^{1/m}$$

удовлетворяет условию $0 < r(T) < 1$, то метод последовательных приближений (6) сходится к общему точному решению равносильных уравнений (1) и (7) со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $r(T)$.

Мы будем рассматривать в дальнейшем лишь такие операторы H и B , при которых $T = T(B, H)$ вполне непрерывны и $0 < r(T) < 1$.

Таким образом, можно утверждать, что PI-методы (2), (3), методы типа метода Ю. Д. Соколова (2), (4) и КР-методы (2), (5) сходятся к решению уравнения (1) со скоростью геометрических прогрессий, знаменатели $q_1(P, H)$, $q_2(P, H)$ и $q_3(P, H)$ которых соответственно равны

$$q_1(P, H) \equiv \lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m(B_{PI}(H, P), H)\|_{X \rightarrow X}^{1/m},$$

$$q_{12}(P, H) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m(B_{\text{так}}(H, P), H)\|_{X \rightarrow X}^{1/m},$$

$$q_{13}(P, H) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m(B_{\text{кр}}(H, P), H)\|_{X \rightarrow X}^{1/m}.$$

В свою очередь, величины

$$q_i(P, \mathcal{H}) = \sup_{H \in \mathcal{H}} q_i(P, H), \quad i = 1, 2, 3,$$

определяют знаменатели геометрических прогрессий, со скоростью которых перечисленные выше аппроксимационно-итеративные методы сходятся при фиксированном проекторе P к решению любого уравнения (7) с оператором H из некоторого класса \mathcal{H} . Таким образом, скорость сходимости итерационных методов из § 1 на фиксированном классе \mathcal{H} определяется лишь выбором проектора $P \in \mathcal{P}_N(X)$. Естественно осуществить этот выбор оптимальным образом.

Мы будем рассматривать два подхода к оптимизации скорости сходимости аппроксимационно-итеративных методов, описанных в § 1. Первый подход, который будет называться адаптивным, состоит в оптимизации скорости сходимости в смысле величины

$$q_{i,N}(\text{adap}, \mathcal{H}) = \sup_{H \in \mathcal{H}} \inf_{P \in \mathcal{P}_N(X)} q_i(P, H) \quad (9)$$

$$i = 1, 2, 3$$

В рамках такой оптимизации попадают методы, при которых проектор P проектирует на подпространство, приспособляемое (адаптируемое) к оператору $H \in \mathcal{H}$ из конкретного уравнения (1).

Вторым возможным подходом к оптимизации скорости сходимости является неадаптивный подход, при котором осуществляется оптимизация в смысле величины

$$q_{i,N}(\text{подп}, \mathcal{H}) = \inf_{\substack{F_N \subset X \\ \dim F_N = N}} \inf_{P \in \mathcal{P}(F_N)} q_i(P, \mathcal{H}), \quad (10) \\ i = 1, 2, 3$$

В этом случае всем операторам $H \in \mathcal{H}$ соответствует одно и то же подпространство F_N , и лишь потом это подпространство выбирается наилучшим образом для всего класса \mathcal{H} .

В настоящей работе будут получены результаты, относящиеся к обоим приведенным подходам.

В § 3 определяются основные классы интегральных операторов, используемые в настоящей диссертации.

Пусть L_2 - гильбертово пространство функций $f(t)$, суммируемых в квадрате на $(0, 2\pi)$ с обычной нормой и скалярным произведением, а Y - некоторое линейное нормированное подпространство, вложенное в L_2 с константой вложения i .

Через $\mathcal{H}_Y = \mathcal{H}_Y(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ обозначим класс интегральных операторов Фредгольма вида

$$H z(t) = \int_0^{2\pi} H(t, \tau) z(\tau) d\tau,$$

удовлетворяющих следующим условиям:

$$\|(I - H)^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \beta_1, \quad \|H\|_{L_2 \rightarrow Y} \leq \beta_2, \quad \|H^*\|_{L_2 \rightarrow Y} \leq \beta_3,$$

где H^* - оператор, сопряженный к оператору H , рассматриваемому как оператор, отображающий L_2 в себя.

Предположим еще, что норма в Y определяется соотношением

$$\|f\|_Y = \|f\|_{L_2} + \|D_Y f\|_{L_2},$$

где D_Y - некоторый оператор из Y в L_2 .

Положим

$$\mathcal{H}_Y^* = \mathcal{H}_Y^*(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \{H : H \in \mathcal{H}_Y,$$

$$\|(D_Y H)^*\|_{L_2 \rightarrow Y} \leq \bar{\beta}_3 \}.$$

В качестве вложенного в L_2 нормированного пространства Y будут фигурировать два функциональных пространства, традиционно рассматриваемых в теории приближения - пространство A^h непрерывных 2π -периодических функций, допускающих аналитическое продолжение в некоторую полосу $\{z = t + i\tau, t \in (-\infty, \infty), \tau \in (-h, h)\}$ комплексной плоскости, и пространство Γ^p непрерывных 2π -периодических функций $f(t)$, представимых в

виде $f(t) = u(\rho, t)$, $0 < \rho < 1$, где $u(\rho, t)$ гармонична в единичном круге на плоскости с полярной системой координат.

При $\mathcal{V} = A^h$ классы \mathcal{H}_ν и \mathcal{H}_ν^* будем обозначать соответственно через \mathcal{A}_h и \mathcal{A}_h^* , а при $\mathcal{V} = \Gamma^p$ для классов \mathcal{H}_ν и \mathcal{H}_ν^* в диссертации используются обозначения \mathcal{J}_p и \mathcal{J}_p^* . Определенные таким образом классы содержат интегральные операторы с ядрами, обладающими бесконечной гладкостью по каждой переменной. В §3 отмечается, что эти операторы естественно возникают при использовании так называемого метода граничных интегральных уравнений при решении краевых задач в областях, ограниченных замкнутыми бесконечно гладкими кривыми.

Кроме введенных выше операторных классов, в диссертации рассматриваются еще классы интегральных операторов с ядрами типа потенциала

$$H\bar{z}(t) = \int_0^1 \frac{H(t, \tau)}{|t - \tau|^\alpha} \bar{z}(\tau) d\tau, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (II)$$

Действие этих операторов естественно рассматривается из пространства C непрерывных на $[0, 1]$ функций в пространство $W^{1-\alpha}$ функций, удовлетворяющих на $[0, 1]$ условию Гельдера с показателем $1 - \alpha$. Через

$\mathcal{H}_\alpha = \mathcal{H}_\alpha(\beta_1, \beta_2)$ будем обозначать класс операторов вида (II), удовлетворяющих условием

$$\| (I - H)^{-1} \|_{C \rightarrow C} \leq \beta_1, \quad \| H \|_{C \rightarrow W^{1-\alpha}} \leq \beta_2.$$

Кроме того, обозначим через $\mathcal{H}_\alpha^1 = \mathcal{H}_\alpha^1(\beta_1, \bar{\beta}_2)$

класс операторов $H \in \mathcal{H}_\alpha$, коэффициенты $H(\tau, \tau)$ которых принадлежат шару радиуса β_2 в соболевском пространстве непрерывно дифференцируемых функций двух переменных.

§ 4 содержит некоторые вспомогательные сведения из теории приближения и функционального анализа, в частности, приведены теорема о поперечнике шара, теорема о поперечнике эллипсоида, теорема двойственности, оценки приближения суммами Фурье по тригонометрической системе и системе функций Хаара.

В §§ 5, 6 рассматривается задача оптимизации скорости сходимости PI-методов (2), (3) и методов типа метода Е. Д. Соколова (2), (4) на множестве интегральных уравнений Фредгольма II рода с интегральными операторами из класса \mathcal{A}_h . Доказаны следующие утверждения.

Теорема 5.1.

$$q_{1,N}(\text{adapt}, \mathcal{A}_h) \asymp q_{1,N}(\text{nonad}, \mathcal{A}_h) \asymp \exp\left(-\frac{Nh}{2}\right).$$

Теорема 6.1.

$$q_{2,N}(\text{adapt}, \mathcal{A}_h) \asymp q_{2,N}(\text{nonad}, \mathcal{A}_h) \asymp \exp(-Nh).$$

При этом оптимальный порядок скорости сходимости PI-методов и методов типа метода Е. Д. Соколова на классе \mathcal{A}_h обеспечивается тогда, когда в рамках им (2), (3), и (2), (4) в качестве P выступает ортопроектор S_N на про-

странство тригонометрических полиномов порядка $\nu = \left[\frac{N-1}{2} \right]$.

Из теорем 5.1 и 6.1 следует, что на классе \mathcal{A}_h оптимальная скорость сходимости PI-методов в два раза ниже по порядку, чем оптимальная скорость сходимости методов типа метода Ю.Д. Соколова. Это довольно неожиданно, поскольку при $P = S_\nu$ прямые методы, применяемые на каждом шаге итерации в рамках PI-метода и метода типа Соколова отличаются весьма незначительно.

Кроме того, в § 6, следуя В.И. Лебедеву, выделяются основные элементарные операции, требуемые для реализации одношаговых аппроксимационно-итеративных методов. Это так называемые K-операции и P-операции. Показано, что при довольно естественном критерии остановки итерационного процесса на классе \mathcal{A}_h оптимальные варианты PI-методов и методов типа метода Ю.Д. Соколова требуют примерно равного количества выполнений K-операций, но количество выполнений P-операций для PI-методов существенно выше.

В § 7 получен аналог теоремы 5.1 для класса \mathcal{A}_h^* .

Теорема 7.1. Пусть $\nu = \left[\frac{N-1}{2} \right]$. Тогда

$$\begin{aligned} q_{1,N}(\text{adap}, \mathcal{A}_h^*) &\asymp q_{1,N}(\text{nonad}, \mathcal{A}_h^*) \asymp \\ &\asymp q_{1,N}(S_\nu, \mathcal{A}_h^*) \asymp \exp(-Nh). \end{aligned}$$

Сравнение этого результата с теоремой 5.1 проясняет влияние повышения гладкости на скорость сходимости PI-методов в случае аналитических ядер. Для случая ядер конечной гладкости это влияние было впервые исследовано в докторской диссертации А.Д. Лучки.

В § 8 рассматривается вопрос об оптимальной скорости сходимости KP-методов (2), (5) на множестве интеграль-

ных уравнений с операторами из класса A_h^* . Отмечается, что схема рассуждений, позволявшая в §§ 5-7 получить точный порядок оптимальной скорости сходимости PI-методов и методов типа метода Ю. Д. Соколова, не позволяет сделать это для КР-метода. Однако для неадаптивных КР-методов, использующих ортогональные проекторы P , с помощью конструкции, основанной на теореме двойственности, удастся получить такой результат.

Теорема 8.1. При $\nu = \left[\frac{N-1}{2} \right]$

$$\inf_{F_N \subset L_2} \inf_{P \in \mathcal{P}^+(F_N)} q_{\frac{1}{3}}(P, A_h^*) \approx q_{\frac{1}{3}}(S_\nu, A_h^*) \approx \dim F_N \cdot \exp(-Nh),$$

где $\mathcal{P}^+(F_N)$ - множество ортогональных проекторов, действующих из L_2 в F_N .

В § 9 приведены аналогии утверждений §§ 5-8 для классов \mathcal{T}_p и \mathcal{T}_p^* интегральных операторов с периодическими и гармоническими ядрами. Показано, например,

Теорема 9.3. Пусть $\nu = \left[\frac{N-1}{2} \right]$. Тогда

$$q_{\frac{1}{3}, N}(\text{adapt}, \mathcal{T}_p^*) \approx q_{\frac{1}{3}, N}(\text{nonad}, \mathcal{T}_p^*) \approx q_{\frac{1}{3}}(S_\nu, \mathcal{T}_p^*) \approx p^N.$$

В § 10 исследуется вопрос об оптимальной скорости сходимости PI-методов на множестве уравнений с интегральными

операторами вида (II) из класса \mathcal{H}_α

Теорема 10.1. При $\alpha \in (0, 1)$

$$q_{1,N}(\text{adap}, \mathcal{H}_\alpha) \times q_{1,N}(\text{nonad}, \mathcal{H}_\alpha) \times q_{1,N}(S_{\lambda_N}, \mathcal{H}_\alpha) \times N^{\alpha-1},$$

где S_{λ_N} - ортопроектор на линейную оболочку первых N функций системы Хаара.

Отмечается, что для класса \mathcal{H}'_α приведенный в теореме 10.1 порядок скорости сходимости может быть увеличен вдвое, если мы вместо PI-методов будем использовать методы типа метода В. Д. Соколова. Точнее, имеет место

Теорема 10.2. При $\alpha \in (0, 1)$

$$q_{1/2}(S_{\lambda_N}, \mathcal{H}'_\alpha) \leq c, N^{-2(1-\alpha)},$$

где постоянная c , не зависит от N .

Такое основное содержание диссертации.

Автор благодарит своего научного руководителя доктора физико-математических наук С. В. Переверзева за внимание и постоянную помощь в работе.

Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Аскарлов М. Об оптимальной скорости сходимости проекционно-итеративных методов для интегральных уравнений с аналитическими ядрами // Оптимизация методов приближения. - Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. - С. 4-13.
2. Аскарлов М. Оптимальная скорость сходимости некоторых аппроксимационно-итеративных методов для интегральных уравнений II рода с гармоническими ядрами // Материалы V научно-теоретической конференции молодых ученых и специалистов Каракалпакского госуниверситета. - Нукус: Каракалпакский госуниверситет, 1993. - С. 52-53.
3. Переверзев С.В., Аскарлов М. Оптимальная скорость сходимости некоторых аппроксимационно-итеративных методов для уравнений Фредгольма в пространствах периодических аналитических функций // Укр. мат. журн. - 1994. - 46, № 9. - С. 1208-1215.
4. Переверзев С.В., Аскарлов М. О скорости сходимости методов проекционно-итеративного типа для классов слабо-сингулярных интегральных уравнений // Укр. мат. журн. - 1995. - 47, № 4. - С. 498-505.
5. Аскарлов М. О скорости сходимости методов проекционно-итеративного типа для уравнений Фредгольма с периодическими аналитическими ядрами // Укр. мат. журн. - 1995. - 47, № 9. - С. 1155-1161

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

AB 33.217