НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОБУДУВАННЯ

На правах рукопису

Дорофєєва Вікторія Іванівна

РОЗРОБКА ПОДВІЙНИХ МЕТОДІВ ТА ЇХ ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

01. 05. 02 – математичне моделювання та обчислювальні методи в наукових дослідженнях

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Харків – 1995

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в лабораторії автоматизованих систем та наукових досліджень Харківського державного

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних
Калиниченко Віталій Іванович

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Масалов Сергій Олександрович,
кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Сизова Наталія Дмитріївна

Провідна організація: Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
(Міністерство освіти України, м.Київ)

Захист відбудеться "15" 11 1995 р. о 15 годині в аудиторії XI поверху на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 02.18.02 в Інституті проблем машинобудування НАН України (310046, м.Харків, вул. Дм. Пожарського, 2/10).

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту проблем машинобудування НАН України за адресою: 310046, м.Харків, вул. Дм. Пожарського, 2/10

Автореферат розісланий "9" 10 1995 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Веретельник Веретельник В. В.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. В основі багатьох наукових та технічних питань лежить задача розрахунку тих чи інших фізичних полів, що зводиться, як правило, до розв'язання крайових задач математичної фізики, які припускають зображення у замкненій формі (точні розв'язки) лише у виняткових випадках. Основними методами розв'язання подібних задач є наближені чисельні методи, провідна роль у розвитку яких належить російським та українським вченим Самарському О.О., Марчуку Г.І., Яненко М.М., Макарову В.Л., Сергієнко І.В., Ляшко І.І., Молчанову О.О. та іншим.

Найбільш універсальними з наближених чисельних методів є проекційні методи – метод Рітця, Бубнова-Галеркіна та інш. Розвиток технічної бази (ЕОМ), досягнення в математиці і в самій теорії проекційних методів, а також в теорії апроксимації за допомогою функцій з скінченними носіями привели до побудови обчислювальної індустрії, що базується на проекційно-сіткових методах. Методи скінченних різниць (сіток), скінченних елементів (МСЕ), варіаційно-сіткові методи (ВСМ) сьогодні розглядаються як різновиди проекційно-сіткових методів, а точніше як просто проекційні, обумовлені різним вибором локальних апроксимуючих функцій. Тому надалі, акцентуючи увагу на МСЕ, будемо розуміти, що мова може йти і про будь-який з вказаних методів. Інтерес до них обумовлений у першу чергу можливостями автоматизації алгоритмів і роботою з системами рівнянь, що мають розріджені матриці.

Щоб одержати прийнятну точність розв'язання, доводиться оперувати з матрицями великих розмірностей. Тому постає питання про обмеження на зростання розмірності системи рівнянь. Інакше кажучи, коли треба перервати здійснення процесу, що лише в нескінченності зводиться до точного розв'язання. Для скінченно-різницевих та проекційно-сіткових методів – у процесі нескінченного зменшення кроку; для методів Рітця, Галеркіна та інш. – у процесі необмеженого збільшення числа координатних функцій. У зв'язку з цим, мабуть, головним є питання вірогідності здобутих наближень. Існують два підходи до його розв'язання. По-перше, це теореми загального характеру, що гарантують а-пріорі збіжність на границі з оцінками, що мають малу величину (наприклад, h-крок сітки, $h \to 0$) та деякі константи, що входять в оцінку. Як правило, ці теореми розраховані на "найгіршу ситуацію" у даному класі задач, константи важкообчислювані (часто навіть їх порядок). Тому а-пріорні оцінки мають більше теоретичний, а ніж практичний інтерес. Практичнішими є апостеріорні оцінки. Ця робота саме й присвячена деяким питанням теорії апостеріорної оцінки результатів стосовно розв'язання крайових задач математичної фізики за допомогою так званих екстремальних задач з чисельною реалізацією проекційно-сітковими методами (або МСЕ).

Дисертація в цілому виконувалася в період з 1989 по 1993 рр. у лабораторії автоматизованих систем та наукових досліджень механіко-математичного факультету Харківського державного університету за держбюджетною темою "Розробка математичних моделей для дослідження впливу зовнішніх чинників та теплових полів на механічні системи зі складною геометрією" (Держ. рег. N 81105500).

Ступінь дослідженності матеріалу. Суттєвим фактором при розробці методу апостеріорної оцінки результатів є теорія подвійності для опуклих функціоналів, що супроводить чисельну реалізацію крайових задач. Ця теорія виникла у процесі розвитку опуклого аналізу, що склався як самостійна дисципіна в середині цього століття. Істотним розвитком теорії перетворень варіаційних задач (із застосуванням в теорії пружності) стали праці школи М.П.Абовського, де використовуються результати засновників опуклого аналізу Куранта і Гільберта. У крайових задачах механіки суцільного середовища слід відзначити фундаментальні монографії П.П.Мосолова, В.П.М'ясникова та В.Л.Бердичевського. У деяких випадках перетворення подвійності (наприклад, у класичній задачі про течію бінгамовських рідин – задача Мосолова-М'ясникова) дозволило уникнути суттєвої проблеми, що виникає при побудові подвійних задач – наявність диференціальних зв'язків. У цьому значенні ідеї названих авторів були стартовими для даної роботи. Серед зарубіжних дослідників слід виділити відомі роботи Екланда і Темама, праці чеської школи під керівництвом Нечаса.

Використовуючи знання цих авторів та аналізуючи наявні недоліки, В.І.Калиниченко запропонував подвійні методи розв'язання крайових задач з апостеріорною оцінкою похибки, що враховують особливості структури операторів крайових задач. Автор дисертації продовжив дослідження цієї проблеми і розглянув питання побудови подвійних методів чисельного розв'язання крайових задач для рівнянь еліптичного типу на базі МСЕ.

Мета роботи та основні завдання наукового дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка подвійних методів чисельного розв'язання крайових задач математичної фізики еліптичного типу з гарантованою точністю на основі МСЕ і побудови подвійних функціоналів спеціального типу, вільних від диференціальних зв'язків.

Основні завдання роботи полягають в:

1) розвитку методу введення функціонального параметру

В.І.Калиниченка стосовно крайових задач математичної фізики;

2) розробці та теоретичному обгрунтуванні подвійного методу чисельного розв'язання крайових задач еліптичного типу з гарантованою точністю на базі МСЕ;

3) побудові, налагодженні та тестуванні комплексу програм, що реалізує подвійний метод.

Методи дослідження. При виконанні теоретичних досліджень як базисний використовувався метод введення функціонального параметру при побудові подвійних функціоналів. В основі чисельної реалізації лежить метод скінченно-елементної апроксимації розв'зуваних задач.

Теоретична цінність дослідження та його наукова новизна. Дисертація є закінченою науково-дослідною роботою, в якій розроблено й вивчено нове розв'язання для чисельної реалізації крайових задач математичної фізики, що описуються диференціальними рівняннями еліптичного типу з гарантованою точністю на основі побудови подвійних функціоналів спеціального виду.

Основні нові наукові результати, що виносяться на захист, здобуті особисто автором:

1. Методика дослідження чисельного розв'язання крайових задач еліптичного типу:

а) алгоритм побудови подвійних екстремальних задач спеціального виду, в яких невідомий розв'язок більше не підлягає диференціальним обмеженням у багатозв'язкових областях;

б) доведення теореми збігу МСЕ для подвійних задач;

2. Побудова подвійного методу чисельного розв'язання крайових задач еліптичного типу із заданою точністю на основі МСЕ і введення функціонального параметру:

3. Методика розвитку МСЕ щодо теорії подвійних екстремальних задач за рахунок зняття обмежень у областях розв'язання, та поширення класу задач, до яких застосована скінченно-елементная апроксимація.

4. Комплекс програм, що реалізує подвійний чисельний метод, та функціональні програми, що забезпечують:

а) автоматичну тріангуляцію областей розв'язання;

б) візуалізацію здобутих рішень у вигляді поверхонь та ліній рівня;

в) реалізацію методів лінійної алгебри для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь великого порядку з розрідженими матрицями.

Теоретична цінність здобутих результатів у цілому полягає:

1) у можливості використання при дослідженні суттєво нелінійних крайових задач;

2) у застосуванні для теоретичних обгрунтувань гарантованої точності у наближених методах;

3) у можливості здобуття двусторонніх наближень для самих розв'язків крайових задач (покрапковий збіг), стартовою для них є "вилка по енергії".

Ступінь достовірності. Усі теоретичні й практичні результати мають високий ступінь достовірності. Теоретичні результати розглянуті на конкретних задачах математичної фізики та оформлені у вигляді доведених теорем. Чисельні результати теоретично обгрунтовані та підтверджуються розрахунками для тестових задач. Точність наближень функціоналів енергії оцінюється числами порядку $10^{-4} - 10^{-5}$, а точність наближених розв'язків – числами порядку $10^{-3} - 10^{-4}$, що значно перевищує відомі апріорні оцінки, здобуті, наприклад, Міхліним, С'ярле та інш.

Практична цінність дослідження. Здобута методика дослідження чисельного розв'язання крайових задач еліптичного типу має істотну практичну цінність для великого класу науково-технічних задач, що знаходять широке застосування (проектування енергетичних установок, дослідження гідродинамічних процесів, розрахунок електромагнітних полів та інш.). Широка область практичного використання пояснюється тим, що побудовані подвійні екстремальні задачі та доведеня теореми збігу МСЕ для подвійних задач повністю вирішують питання про вірогідність здобутих наближень.

Крім того, побудована подвійна екстремальна задача дає краці наближення до коградієнту, ніж пряма. Це, наприклад, дозволяє ефективно використати її при розрахунках дифузії нейтронів ядерних реакторів.

Введення спеціального функціонального параметру (α-параметр) дозволило зняти диференціальні зв'язки у подвійній задачі і, завдяки цьому, відмовитися від неузгоджених скінченних елементів і, внаслідок цього, прискорити збіг і покращити апроксимацію.

Це також дає змогу поширення одержаних результатів і теорем подвійності на класи крайових задач, що описуються еволюційними рівняннями (спільно з методом Роте), наприклад, при розрахунках температурних полів.

Суттєве значення мають комплекс програм й окремі його компоненти, які забезпечують автоматизацію тріангуляції областей розв'язання, розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь високого порядку з розрідженими матрицями, візуалізація здобутих результатів у вигляді поверхонь розв'язків та ліній рівня тощо.

Впровадження наукових розробок. Подвійний метод чисельного розв'язання крайових задач еліптичного типу, а також програми для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь високого порядку з розрідженними матрицями, для візуалізації розв'язків систем і тріангуляції областей розв'язання, орієнтовані на персональні обчислювальні машини класу IBM/AT, використовуються для практичних розрахунків теплових полів задач конструювання та модифікації рухомого складу в курсі лекцій "Математичне моделювання в задачах електротранспорту" в Харківській державній академії міського господарства (ХДАМГ).

Запропонований подвійний метод чисельного розв'язання крайових задач еліптичного типу, побудовані програми використуються з початку 1995 р. для практичних розрахунків теплових та електричних полів, організіції та проектуванні автоматизованих робочих місць інженерів міського електротранспорту і будуть використовуватися далі у науково-дослідній роботі кафедри міського електротранспорту ХДАМГ.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися на VI Міжнародному симпозіумі "Методи дискретних особливостей у задачах математичної фізики" (м.Харків,1993 р.), II Українській науково-методичній конференції "Використання персональних ЕОМ у навчальному процесі вищого навчального закладу" (м.Львів,1993 р.), науково-технічній конференції викладачів, аспірантів та співробітників Харківського інституту інженерів міського господарства (м.Харків,1994 р.), IV Міжнародній науковій конференції ім. академіка М.Кравчука (м.Київ,1995 р.), на республіканському семінарі "Прикладні методи математики і кібернетики" (м.Харків,Інститут проблем машинобудування НАН України,червень 1995 р.,кер.В.Л.Рвачов).

Публікації роботи. Здобуті у дисертаційній роботі результати надруковані в 7 наукових працях, включаючи 4 статті, 1 навчально-методичний спецкурс, 2 тези доповідей.

Особистий внесок автора. У роботі [1] автору належить розробка подвійного методу чисельного розв'язання крайових задач, їх скінченно-елементної апроксимації; у роботі [2] розроблений варіант алгоритму графічної візуалізації межі області; в роботі [3] побудовано блок у комплексі програм, що забезпечує виконання математичного апарату лінійної алгебри та скінченно-елементної апроксимації прямої та подвійної задач; у [4] дисертантом виконано всі обчислювальні роботи однієї задачі теплопровідності у брусі складної геометрії; у [5] розглянуто проблеми, пов'язані з існуванням диференціальних зв'язків в областях розв'язання крайових задач; в [6] запропановано поширення двостороннього чисельного методу на розв'язання одного класу сінгулярних операторних рівнянь; [7] демонструє методику, розроблену автором та її програмну реалізацію розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь високого порядку з розрідженими матрицями.

Крім сказаного вище, дисертантом особисто здобуто не надруковане їм раніше доведення збігу МСЕ для подвійних задач.

Структура й обсяг роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, 3 глав, закінчення, 26 таблиць, 27 рисунків, списку використаної літератури зі 100 найменувань – обсягом всього 135 стор. машинописного тексту.

Зміст роботи

У вступі обгрунтовується актуальність обраного напрямку, дається огляд літератури і результатів, здобутих іншими авторами з питань, які розглядаються у дисертації; формулюється мета і основні завдання наукового дослідження; обгрунтовується теоретична і практична цінність дослідження та його наукова новизна;

подано інформацію про ступінь достовірності, впровадження наукових розробок, апробацію і публікації наукових розробок.

Перша глава представляє з себе довідковий матеріал, необхідний для розуміння подальших викладок. Вона грунтується на основних поняттях функціонального аналізу та теорії крайових задач математичної фізики. Тут, зокрема, визначені класи диференційованих функцій (п.1.1), областей, які розглядаються (п.1.2), банахови та соболевські простори (пп.1.3,1.7). Введені також означення класичних та узагальнених розв'язків крайових задач (пп.1.4,1.5). Описані фундаментальні поняття операторів типу Немицького (п.1.6), а також визначення лінійних функціоналів та спряжених банахових просторів (п.1.8). Окремо визначено (п.1.9) поняття функції в терміні "слідів на границі" (п.1.9).

Друга глава в цілому має теоретичний характер. В ній приводяться основні леми та теореми, стосовно подвійних методів розв'язання крайових задач математичної фізики. Вона складається з 9-ти підрозділів, суть яких в наступному.

Спочатку (п.2.1) вводиться поняття монотонних операторів, слідуючи класичному викладу Гаєвського Х., Грьогера К. та Захаріса К. "Нелінійні операторні рівняння і операторні диференціальні рівняння". Потім (п.2.2) детально висвітлено клас монотонних потенціальних операторів, що мають важливе застосування в крайових задачах математичної фізики.

Наступним етапом є проблема оцінки похибок МСЕ. У п.2.3 детально з'ясовуються апріорні оцінки, одержані Міхліним С.Г., С'ярле, Обеном та інш. Показано, взагалі кажучи, недоцільність апріорних оцінок, які представляють із себе чисто теоретичний інтерес і мало значать в інженерній (практичній) діяльності.

У п.2.4 розвивається теорія подвійних задач, що пов'язана, в першу чергу, з опуклістю функціоналів прямої задачі, де на її основі побудовані апостеріоні оцінки похибок.

Центральним результатом глави 2 (п.2.5) ми вважаємо доведення теореми про збіжність для подвійної задачі. Тут доведено приналежність методу Рітця та його збіжність для "зустрічних" задач.

Теорема. Нехай u_h і v_h – деякі, не виходячі з класів U і V, наближені розв'язки прямої та подвійної задач на регулярній сітці МСЕ (в поліедральній області). Тоді при $v_\star = A\nabla u_\star \in V$ відхил u_h і v_h від точних розв'язків $u_\star$ і $v_\star$ відповідно не перебільшує величин δ_1 і δ_2, де

$$\delta_1 = \sqrt{2(J^+(u_h) - J^-(v_h))} \geq ||u_h - u_\star||_p,$$

$$\delta_2 = \sqrt{2(J^+(u_h) - J^-(v_h)} \geq ||v_h - v_\star||_d,$$

$$||u||_p = \left\{\frac{1}{2}\int_\Omega (< A\nabla u, \nabla u > +cu^2)d\Omega + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_3} \sigma u^2 ds\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Тут f – права частина крайової задачі, $f \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$ належить класу $C^{0,1}, \partial\Omega = \partial\Omega_1 \bigcup \partial\Omega_2 \bigcup \partial\Omega_3, \partial\Omega_i \bigcap \partial\Omega_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$; на $\partial\Omega_1$ задано умову першого роду, на $\partial\Omega_2$ – умову другого роду, на $\partial\Omega_3$ – умову третього роду;

$$U = \left\{u \in W^{1,2}(\Omega) : \ \gamma_1 u = 0\right\} = \overset{\circ}{W}{}^{1,2},$$

$$V = \left\{v \in W_n^{1,2} :< v, \nu >= 0 \text{ майже усюди на } \partial\Omega_i, \ i = 2, 3\right\},$$

A – додатково означена та симетрична матриця, $||a||_{ij} \in L^\infty(\Omega)$,

$$c \geq 0, c \in L^\infty(\Omega), \ \sigma > 0,$$

$$J^+(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{< A\nabla u, \nabla u > +cu^2 - 2uf\right\} d\Omega + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_3} \sigma u^2 ds,$$

$$J^-(v) = -\int_\Omega \left\{< A^{-1}v, v > +(f + divv - < v, A^{-1}\alpha >)^2/\delta\right\} d\Omega,$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in [C^1(\bar{\Omega})]^2, \ \delta = c + div\alpha - < A^{-1}\alpha, \alpha > \geq 0,$$

$$< \alpha, \nu >= 0 \text{ на } \partial\Omega_2, \ < \alpha, \nu >= \sigma \text{ майже усюди на } \partial\Omega_3.$$

Поняття про "слід функції на границі" розглянуто в п.1.9.

Окремо (п.2.6) демонструється приналежність α-параметру Калиниченка для рівнянь еліптичного типу більш високих порядків.

Доведена також можливість апостеріоного оцінювання результату в розв'язках нестаціонарних рівнянь (п.2.7). Викладки результатів у цьому місці базуються, насамперед, на теоремах Мосолова П.П., доведених для еволюційних рівнянь, виходячи із варіаційних принципів.

В п.2.8 нами наведені приклади багатозначних перетворень Юнга-Фенхеля (зокрема, Лежандра) для функцій декількох змінних, у тому разі і для крайових задач (Діріхле та Неймана для лапласіана).

Окремо досліджено проблему мінімальних ("мильних") поверхонь у п.2.9. Цей підрозділ має принциповий характер. Його слід розцінювати як розвиток та узагальнення пропонуючої методики, так як ці задачі мають специфічний характер, що не вписується в класичну теорію еліптичних рівнянь для крайових задач математичної фізики. Цей підрозділ пов'язаний щонайперше з проблемами геометрії, ніж з крайовими задачами і має значний прикладний характер (наприклад, в проблемах перекрить в будівельній індустрії, тощо).

Третя глава має чисто ілюстративний характер. На достатній кількості практичних (нетрівіальних) прикладів (19 прикладів) демонструються можливості подвійного підхіду до розв'язання крайових задач, які показують значні можливості подвійних варіаційних постановок. Крім можливості апостеріорно судити про точність початкових наближень, ми маємо можливість достатньо добрих наближень (порядку $10^{-3} - 10^{-4}$) до коградієнту.

Це особливо важливо (про що стверджує Главачек) в задачах дифузії нейтронів в ядерних реакторах і т.п. Про це свідчать приведені таблиці (пп.3.4,3.5), де для прямої задачі наближення до кограδієнта нами навіть не приводились з прикладу їх слабкої збіжністі.

Для прикладу приведемо один з типових здобутих результатів. Для двозв'язної області Ω, що являє собою круг радіусу $R = 1$ з вирізаним у ньому ромбом, розглядаемо розв'язок задачі

$$-\Delta u = f(x, y), \ (x, y) \in \Omega$$

з граничними умовами

$$u = 0, \ \ (x, y) \in \partial\Omega,$$

де $f = (x - 0,56)e^{y-1} - xycos(x + y)$, параметр $\alpha = k(x, y)^T, k = 9,53$. При розподілі області на 120 вузлів та 200 скінченних елементів величина прямого та подвійного функціоналів рівняється $-0,036415$ та $-0,036816$ відповідно. Точність здобутого наближеного розв'зку задачі оцінюється числами порядку 10^{-3}.

В п.3.1 викладено скінченно-елементную апроксимацію прямої та подвійної екстремальних задач. Окремо у п.3.2 зауважено про розв'язання лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності з розрідженими матрицями. Для МСЕ така задача є актуальною. Їй присвячено значне число монографій та журнальних публікацій. У п.3.3 розглянуто елементи програмного комплексу щодо чисельного розв'язання прямих та подвійних задач. Вони стосуються програм, які забезпечують роботу з розрідженими матрицями великої розмірності.

Суттєвим в главі 3 має місце можливість використання узгоджених скінченних елементів, завдяки введенню функціонального α-параметру Калиниченка.

Висновки

Сформулюємо основні результати, здобуті в дисертаційній роботі:

1. Користуючись методом введення функціонального параметру В.І.Калиниченка, розроблена методика дослідження чисельних розв'язків крайових задач еліптичного типу. Вона дозволяє одержати гарантований результат (наближення зверху та знизу) для мінімуму функціоналу енергії, і, на цій основі, апостеріорно робити висновок про похибку самого розв'язку. Методика, зокрема, включає в себе алгоритм побудови подвійних екстремальних задач спеціального типу, який суттєво розширює клас допустимих функцій, які не мають обмежень в області постановки задачі, а у деяких випадках і на її границі;

2. Доведена теорема про збіжність МСЕ для побудованих подвійних задач, яка дає можливість практичного застосування методики для розв'язання задач на ЕОМ;

3. Побудовано подвійний метод чисельного розв'язання крайових задач еліптичного типу з заданою точністю. Аналіз практичних розрахунків задач, виконаних завдяки цьому методу, показав, що точність наближених значень функціоналів енергії оцінюється числами порядку $10^{-4} - 10^{-5}$, а точність самих наближених розв'язків оцінюється числами порядку $10^{-3} - 10^{-4}$. Це значно перевищує відомі апріорні оцінки, здобуті, наприклад, Міхліним, С'ярле та інш.;

4. Внаслідок об'єднання методу введення функціонального параметру і МСЕ суттєво розвинено клас задач, до яких застосовна скінченно-елементная апроксимація, а саме, вдалось уникнути неузгоджених скінченних елементів;

5. На основі розроблених засобів математичного і програмно-

го забеспечення створено комплекс програм, спрямований на розв'язання плоских крайових задач, пов'язаних з диференціальними рівняннями в частинних похідних другого порядку еліптичного типу для IBM/AT. Комплекс використовується для розрахунків теплових полів задач конструювання та модифікації рухомого складу в курсі лекцій "Математичне моделювання в задачах електротранспорту" в навчальному процесі Харківської державної академії міського господарства, і для розрахунків задач організації та проектування автоматизованих робочих місць інженерів міського електротранспорту при виконанні науково-дослідної роботи кафедри міського електротранспорту вказаного вузу;

6. Сполука побудованого подвійного методу чисельного розв'язання крайових задач еліптичного типу та підвищення класу гладкості скінченних елементів з одночасним підвищенням ступеня інтерполюючих поліномів (p-h-метод) дає можливість значно зменшити похибку практичних розрахунків задач, які описуються як еліптичними, так і еволюційними рівняннями. Практична реалізація цієї проблеми в подальшому становитиме основний науковий інтерес автора дисертації.

Надруковані праці за темою дисертації

1. Калиниченко В.И., Дорофеева В.И., Шкребец С.М. Введение в метод конечных элементов (специальный курс) /Состав. Калиниченко В.И., Дорофеева В.И., Шкребец С.М.– Харьков: ХГУ,1993.– 52 с.

2. Дорофеева В.И., Калиниченко С.В., Хара Г.И., Шкребец С.М. Графический контроль описания краевых задач и визуализация их решений //Программные средства и их применения в научной работе и обучении: Сб.науч.трудов.– Харьков: ХГУ, 1993. с.116-119.

3. Дорофеева В.И., Шкребец С.М. О программном комплексе для численной реализации двойственной задачи матфизики с помощью метода конечных элементов //Программные средства и их применения в научной работе и обучении: Сб.науч.трудов.– Харьков: ХГУ, 1993, с.120-125.

4. Калиниченко В.И., Дорофеева В.И., Шкребец С.М. Двойственные методы в задачах стационарной теплопроводности //Повышение эффективности и надежности систем городского хозяйства: Сб.науч.трудов.– К.: ИСИО Украины, 1994, с.108-112.

5. Дорофеева В.И., Шкребец С.М. О решении двойственных задач математической физики методом конечных элементов //Сб.науч.работ аспирантов ХГУ.Естественные науки.Физ.-мат.наук.-Харьков: "Основа" при ХГУ, 1992, с.121-126.

6. Дорофеева В.И., Колосов А.И., Тихонович А.Ю. О приближениях сверху и снизу для решений некоторых сингулярных операторных уравнений //Методы дискретных особенностей в задачах математической физики:Тез.докл.VI Межд.симп.– Харьков, 1993, ч.I,с.225.

7. Дорофєєва В.I. Калиниченко В.I., Шкребець С.М. Про ком-

плекс програм для чисельних розв'язків задач матфізики на природничих факультетах //Використання персональних ЕОМ в навчальному процесі вищого навчального закладу: Тез.доп. і повідомлень II Української наук.-мет.конф. 17-19 лист. 1993. – Львів, 1993, ч.I, с.35-36.

Summary

Dorofeeva V.I. Development dual methods and their numerical realization for elliptic equation solution.

The thesis is presented for the candidate science degree in physics and mathematics. The speciality number is 01.05.02 - Mathematical modelling, numerical methods in scientific research, The Institute for problems in machinery of the Ukrainian Academy of Sciences, Kharkov, 1995.

The thesis deal with dual method, which is used for the calculating solution of the elliptic boundary problem with the necesary accuracy. It is based on the dual theory and the finite element method. The finite element method asperation are proved for dual problem. The theoretical results are approved on a lot of examples with the help of the developed program complex.

Аннотация

Дорофеева В.И. Разработка двойственных методов и их численная реализация для решения уравнений эллиптического типа.

Диссертация является рукописью, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и численные методы в научных исследованиях, Институт проблем машиностроения НАН Украины, Харьков, 1995.

В диссертационной работе рассматриваются вопросы построения двойственных методов численного решения краевых задач эллиптического типа с гарантированной точностью на основе МКЭ и построения двойственных функционалов специального вида, свободных от дифференциальных связей. Доказывается сходимость МКЭ для двойственных задач. Практическая реализация осуществлена на множественных примерах с помощью разработанного комплекса прикладных программ для ПЭВМ.

Ключові слова: крайова задача, апостеріорні оцінки похибки, варіаційні методи, подвійні екстремальні методи, двусторонні алгоритми, метод скінченних елементів.

Відповідальний за випуск Шкребець С.М.

Підписано до друку 27.09.95. Формат 60 × 92 1/16.

Ум.друк.арк. 1,00 Папір друк. №1 Обл.-друк.арк. 0,96

Тираж 100 пр. Зам. №237

Ротапринт Харківськоі державноі академіі міського господарства

ХДАМГ 310002 Харків, вул. Революціі, 12.