ІНСТИТУТ ФІЗИКИ КОНДЕНСОВАНИХ СИСТЕМ
НАН УКРАЇНИ

На правах рукопису

Кісілевич Олександра Василівна

УДК 517.923:519.46:538.114

ІНТЕГРОВНІ ГАМІЛЬТОНОВІ СИСТЕМИ НА ОРБІТАХ ГРУП ПЕТЕЛЬ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

01.04.02 — теоретична фізика

Автореферат

дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук

Львів — 1995

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі математичних методів в теоретичній фізиці Інституту теоретич... України.

Науковий керівник — кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Петро Іванович ГОЛОД.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
професор
Юрій Кирилович РУДАВСЬКИЙ,

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Володимир Іванович СКРИПНИК.

Провідна організація — Київський національний університет ім. Т.Г.Шевченка.

Захист дисертації відбудеться *15 листопада 1995 р. о 15^{00} год.* на засіданні спеціалізованої Ради Д 04.18.01 в Інституті фізики конденсованих систем НАН України (290011, м. Львів, вул. Свєнціцького, 1).

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту фізики конденсованих систем НАН України (290011, м. Львів, вул. Свєнціцького, 1).

Відгуки на автореферат у двох примірниках, завірені печаткою, просимо надсилати за адресою: 290011, м. Львів, вул. Свєнціцького, 1, вченому секретарю спеціалізованої Ради Д 04.18.01.

Автореферат розісланий "12" жовтня 1995 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
Д 04.18.01

І.М.ІДЗИК

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Відкриття на прикінці 60 — на початку 70 років нового методу інтегрування нелінійних рівнянь у двовимірному просторі-часі, відомого під назвою методу оберненої задачі розсіювання (МОЗР) стимулювали глибокі і різнобічні дослідження математичних аспектів феномену інтегровності, відкрили нові можливості при описі нелінійних ефектів в конденсованій матерії, плазмі, оптиці, квантовій теорії поля. Хоча інтегровні моделі або солітонні рівняння, до яких власне застосовується МОЗР, є лише грубим наближенням до реальної фізичної ситуації, вони приваблюють дослідників, оскільки дозволяють спостерегти деякі загальні закономірності поведінки більш складних і реалістичніших нелінійних систем.

В методі оберненої задачі і сьогодні залишається багато невиясених питань, пошуки відповідей на які породжують нові наукові напрямки як у математичній так і в теоретичній фізиці. Проблематика, пов'язана з інтегровними нелінійними системами, в рамках якої написана дисертаційна робота залишається актуальною, визначає теми міжнародних конференцій, займає значне місце в журнальних публікаціях.

Найбільш пристосованим формалізмом, в термінах якого МОЗР стає особливо прозорим і вмотивованим, є формалізм гамільтонової механіки на орбітах коприєднаного представлення груп і алгебр Лі [1,2,3]. Оскільки нелінійні рівняння, до яких застосовується МОЗР, є нескінченновимірними гамільтоновими системами і у функціональних фазових просторах мають вигляд

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \Omega \frac{\delta \mathcal{H}[\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx}, \ldots]}{\delta \mathbf{u}}, \tag{1}$$

де гамільтоніан $\mathcal{H}[\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx}, \ldots] = \int H(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx}, \ldots)dx$ є локальним функціоналом, а Ω — кососиметричним гамільтоновим оператором, то відповідні групи, орбітами яких є фазовий простір системи (1), теж мають бути нескінченновимірними функціональними групами. Такими є групи, елементи яких являються аналітичними функціями на колі зі значеннями в напівпростій класичній (тобто матричній) групі Лі. В математичній літературі такі групи називаються групами петель, а у фізичній — групами струмів на колі. В дисертації використовується математична термінологія.

Інтегровність системи (1) з необхідністю вимагає існування нескінченної низки інтегралів руху — локальних функціоналів $\mathcal{H}_1[\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx}, \ldots]$, $\mathcal{H}_2[\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx}, \ldots], \cdots$, які попарно комутують стосовно дужки Пуассона:

$$\{\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j\} = \int \left(\frac{\delta \mathcal{H}_i}{\delta \mathbf{u}}, \Omega \frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta \mathbf{u}} \right) dx = 0. \qquad (2)$$

Останнє тягне за собою існування у фазовому просторі інтегровної системи скінченновимірних підмноговидів, інваріантних стосовно гамільтонових рівнянь (1). Такі підмноговиди формують функції $\mathbf{u}(x)$, що є розв'язками варіаційного рівняння

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{u}} \sum_{i=0}^{N} c_i \mathcal{H}_i[\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx}, \cdots] = 0, \qquad (3)$$

яке називають вищим стаціонарним рівнянням або рівнянням Новікова. У схемі інтегрування нелінійних рівнянь, яку запропонував Новіков С.П. [4], рівняння (3) грають ключову роль. Суть полягає в тому, що часова еволюція, звужена на множину розв'язків системи (3), розглядається як її симетрія і легко знаходиться після того, як рівняння (3) проінтегровано.

Система (3) має ієрархічну будову і є канонічно інтегровною. Проте канонічна гамільтонова структура не є природною для неї. В роботах [5,6] було показано, що вищі стаціонарні рівняння, які відповідають модифікованому рівнянню Кортевега-де Фріза, рівнянню sine-Гордона та іншим, еквівалентні рівнянням Ейлера-Арнольда на скінченновимірних орбітах алгебри петель $sl(2, \mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\lambda)$, а природною гамільтоновою структурою для них є структура Лі-Пуассона на орбітах. Така точка зору дозволяє по іншому будувати теорію нелінійних інтегровних рівнянь. Поклавши в основу теорії інтегровні гамільтонові системи на орбітах та інтерпретувавши їх як вищі стаціонарні рівняння для деяких (спочатку ще невідомих) еволюційних рівнянь, маємо можливість звести задачу класифікації нелінійних інтегровних рівнянь до алгебро-геометричної задачі перерахування орбіт відомих алгебр петель.

В дисертаційній роботі розвивається та узагальнюється схема побудови вищих стаціонарних рівнянь у формі рівнянь Ейлера-Арнольда на орбітах, а відтак і еволюційних рівнянь солітонного типу. Досліджуються нелінійні системи на орбітах алгебр $sl(3,\mathbb{C})\otimes\mathcal{P}(\lambda,\lambda^{-1})$, $su(3)\otimes\mathcal{P}(\lambda,\lambda^{-1})$ та інших алгебр, ранг яких більший за одиницю. Одержані математичні результати застосовуються до розв'язання деяких задач теорії магнетизму.

Мета роботи полягає в розвитку та застосуванні сучасних методів теорії гамільтонових систем на орбітах груп та алгебр до проблеми інтегрування нелінійних рівнянь солітонного типу — рівнянь в частинних похідних, які мають багато комутуючих інтегралів руху і знаходять різноманітне застосування в багатьох областях фізики.

Методи дослідження. В роботі використано методи теорії груп та алгебр Лі, методи гамільтонової механіки на нетривіальних фазових просторах, якими є орбіти коприєднаного представлення алгебр петель, методи комплексного аналізу на ріманових поверхнях, теорію тета-функцій та інше.

Наукова новизна і практична цінність. В дисертаційній роботі зроблено суттєвий крок в розширенні теоретико-групового методу дослідження нелінійних рівнянь солітонного типу на новий клас рівнянь, які пов'язані з напівпростими групами петель вищих рангів. Розширення класу солітонних рівнянь відкрило перспективу нових застосувань до опису нелінійних явищ в конденсованій матерії.

Основні результати, які виносяться на захист.

1. Теорема про комутативність коефіцієнтних функцій розкладу в степеневий ряд за комплексними параметрами петлі інваріантних функцій Казиміра напівпростої алгебри Лі. Доведена теорема дає можливість описувати орбіти коприєднаного представлення алгебри петель і конструювати інтегровні гамільтонові системи на них.

2. Представлення нелінійного рівняння в частинних похідних, яке описує динаміку багатокомпонентного параметра порядку в магнетиках зі спінами $S=1$ у вигляді двох комутуючих гамільтонових систем звичайних диференціальних рівнянь на орбіті коприєднаного представлення алгебри петель зі значеннями в алгебрі $su(3)$.

3. Алгебро-геометрична техніка явного інтегрування нелінійних рівнянь, які описують поведінку векторів намагніченостей двох магнітовпорядкованих підграток.

4. Інтегральна формула для змінних "дія" в задачі про рух векторів намагніченостей двох підграток.

Апробація роботи. Результати досліджень, які викладені в дисертації, доповідалися на

— семінарах відділу математичних методів в теоретичній фізиці ІТФ ім. М.М.Боголюбова НАН України (1990 - 95 р.р.);

— Київському міському семінарі "Геометричні ідеї у фізиці та математиці" в Інституті математики НАН України (1993 р.);

— науковому семінарі при кафедрі вищої математики Державного університету "Львівська політехніка" (1994 р.);

— міжнародній конференції "Математична фізика, теорія струн та гравітація", м. Алушта (1993 р.);

— щорічних наукових конференціях професорсько-викладацького складу ЛТЕІ, м. Львів (1993 - 95 р.р.).

— міжнародній нараді з статистичної фізики і теорії конденсованих систем, м. Львів (вересень 11-14, 1995 р.).

Структура і об'єм роботи. Дисертація викладена на 92 сторінках машинописного тексту і складається із вступу, трьох глав основного тексту, висновків та списку літератури (75 найменувань).

Публікації. По темі дисертації опубліковано 8 робіт. У спільній роботі з В.В.Чемерисом постановка проблеми та основна теорема належать авторові дисертації. У спільних з П.І.Голодом роботах останньому належить постановка задач.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовується актуальність теми дисертації, дається огляд основних наукових досягнень, які визначили проблематику дисертаційної роботи, зроблено короткий опис отриманих результатів.

В першому параграфі глави 1 викладено основні поняття теорії алгебр петель зі значеннями в напівпростих алгебрах Лі, їх орбіт та гамільтонових структур — дужок Лі-Пуассона на орбітах.

Другий параграф містить важливий результат про комутативність певного набору функцій на орбіті. Нехай $\mathcal{H}_\nu$, $\nu = 2, 3, \cdots, rang\mathbf{g}$ — однорідні ступеня ν ad^*-інваріантні функції на дуальному до алгебри просторі $\tilde{\mathbf{g}}^*$ (функції Казиміра) і нехай

$$\mathcal{H}_\nu = \sum_{\alpha=0}^{\nu(N+1)} h_\alpha^\nu \cdot \lambda^\alpha$$

— розвинення цих функцій в ряд за степенями параметра петлі λ. Коефіцієнти ряду h_α^ν є поліноміальними функціями від координат орбіти μ_i^l. Стосовно них має місце

Теорема 1. Коефіцієнтні функції h_α^ν перебувають попарно в інволюції (комутують між собою) стосовно двох дужок Лі-Пуассона

$$\{h_\alpha^\nu, h_\beta^\nu\}_\sigma = \sum_{l,s}^{N+1} \sum_{i,j}^{\dim \mathbf{g}} W_{ij}^{ls}(\sigma) \frac{\partial h_\alpha^\nu}{\partial \mu_i^l} \frac{\partial h_\beta^\nu}{\partial \mu_j^s}, \qquad \sigma = 1,\ 2, \tag{4}$$

де

$$W_{ij}^{ls}(1) = \sum_k C_{ij}^k \mu_k^{l+s+1}, \qquad W_{ij}^{ls}(2) = \sum_k C_{ij}^k \mu_k^{l+s-N-1},$$

C_{ij}^k — структурні константи напівпростої алгебри Лі рангу ν. Окрім того функції h_α^ν при $\alpha \geq (\nu-1)(N+1)$ є ануляторами першої, а при $\alpha \in \overline{0, N+1}$ — другої дужки Лі-Пуассона.

Ця теорема є основною для побудови інтегровних гамільтонових систем на орбітах.

В третьому параграфі будуються інтегровні гамільтонові системи на орбітах алгебри $\tilde{\mathbf{g}} = sl(2,\mathbf{C}) \otimes \mathcal{P}(\lambda, \lambda^{-1})$, та її дійсних підалгебр $sl(2,\mathbf{R}) \otimes \mathcal{P}(\lambda, \lambda^{-1})$, $su(2) \otimes \mathcal{P}(\lambda, \lambda^{-1})$, $su(1,1) \otimes \mathcal{P}(\lambda, \lambda^{-1})$, які згодом інтерпретуються як вищі стаціонарні рівняння для модифікованого рівняння Кортевега-де Фріза, нелінійного рівняння Шредінгера та рівняння К-д Ф. Результати цього параграфу мають на меті проілюструвати на відомих прикладах теорему про інтегровність, доведену в попередньому параграфі. Новим тут є дослідження геометрії фазового простору вищих стаціонарних рівнянь Кортевега-де Фріза.

Друга глава, в основному, присвячена побудові інтегровних гамільтонових систем на орбітах алгебр рангу 2. Зокрема це системи на орбітах алгебр $su(3) \otimes \mathcal{P}(\lambda, \lambda^{-1})$, $su(2,1) \otimes \mathcal{P}(\lambda, \lambda^{-1})$, $sl(3,\mathbf{R}) \otimes$

$\mathcal{P}(\lambda, \lambda^{-1})$. Серед побудованих систем виокремлено ті, які відповідають ієрархії вищих стаціонарних рівнянь для двокомпонентного нелінійного рівняння Шредінгера та рівняння Гайзенберга для магнетика зі спіном 1.

В § 1 розглядаються скінченновимірні орбіти підалгебри $\tilde{\mathfrak{g}}_- \simeq$ $\simeq sl(3, \mathbb{C}) \otimes \mathcal{P}(\lambda^{-1})$, які вкладені в підпростір $M^{N+1} \subset \tilde{\mathfrak{g}}_+$. Вкладення здійснюється в той спосіб, що фіксуються фукції $h_{N+1}, h_{N+2}, \cdots,$ h_{2N+1} та $f_{2N+2}, f_{2N+3}, \cdots, f_{3N+2}$ — старші коефіцієнти розкладу в ряд інваріантних функцій Казиміра. Як відомо, для алгебр рангу 2 (якою є алгебра $sl(3, \mathbb{C})$) таких функцій дві: це поліноми другого та третього степенів. Згідно теореми 1 перераховані функції є ануляторами першої дужки Лі-Пуассона.

Інтегровна гамільтонова система на орбіті загального положення алгебри $\tilde{\mathfrak{g}}_-$, породжена гамільтоніаном h_{N-1} інтерпритується як система вищих стаціонарних рівнянь для трикомпонентного узагальненого нелінійного рівняння типу Шредінгера. Побудовано відповідну систему еволюційних рівнянь, яка при спеціальному виборі констант має вигляд:

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial \beta_1}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 \beta_1}{\partial x^2} \pm (2\alpha_1 - \alpha_2)\beta_1 - \beta_3 \frac{\partial \beta_2^*}{\partial x} - \frac{1}{2}\beta_2^* \frac{\partial \beta_3}{\partial x}, \\
i\frac{\partial \beta_2}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^2} \pm (2\alpha_2 - \alpha_1)\beta_2 - \beta_3 \frac{\partial \beta_1^*}{\partial x} - \frac{1}{2}\beta_1^* \frac{\partial \beta_3}{\partial x}, \\
i\frac{\partial \beta_3}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \beta_3}{\partial x^2} \pm (\alpha_1 + \alpha_2)\beta_3 + \beta_1 \frac{\partial \beta_2^*}{\partial x} - \beta_2^* \frac{\partial \beta_1}{\partial x},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

де

$$
\alpha_1 = -|\beta_1|^2 - \frac{1}{2}|\beta_3|^2,
$$
$$
\alpha_2 = -|\beta_2|^2 - \frac{1}{2}|\beta_3|^2.
$$

Знак другого доданку правої частини рівняння залежить від вибору алгебри $su(3)$ чи $su(2,1)$.

В § 3 розглянуто інтегровні гамільтонові системи на вироджених орбітах алгебри $\tilde{\mathfrak{g}}_- \simeq sl(3) \otimes \mathcal{P}(\lambda^{-1})$. Такі орбіти мають структуру векторного розшарування над виродженою орбітою в алгебрі $SU(3)$. Остання є чотиривимірним простором з комплексною структурою і параметризується двома комплексними параметрами. На роль цих параметрів можна взяти змінні β_2 та β_3, які фігурують в рівнянні

(5). Звуження рівняння (5) на вироджену орбіту є двокомпонентним нелінійним рівнянням Шредінгера і має вигляд

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial \beta_2}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^2} - 2(|\beta_2|^2 + |\beta_3|^2)\beta_2, \\
i\frac{\partial \beta_3}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 \beta_3}{\partial x^2} - 2(|\beta_2|^2 + |\beta_3|^2)\beta_3.
\end{aligned} \tag{6}
$$

В § 4 досліджуються інтегровні рівняння на орбітах алгебри $\tilde{\mathfrak{g}}_+ \simeq su(3) \otimes \mathcal{P}(\lambda^{-1})$. Як і в попередньому випадку, ця алгебра має два типи орбіт: орбіти загального положення та вироджені орбіти.

У випадку орбіти загального положення нелінійне рівняння пишуть для восьми функцій $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_8$, які задовольняють двом алгебраїчним співвідношенням

$$
\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{8} \mu_a^2 &= R^2 = \mathrm{const}, \\
\sum_{a,b,c=1}^{8} d_{abc}\mu_a\mu_b\mu_c &= \mathrm{const}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

У випадку виродженої орбіти рівняння має досить простий вигляд:

$$
\frac{\partial \mu_a}{\partial t} = c f_{abc}\mu_b \frac{\partial^2 \mu_c}{\partial x^2}, \tag{8}
$$

де f_{abc} — повністю антисиметричний тензор структурних констант алгебри Лі $SU(3)$. Функції μ_a, $a \in \overline{1,8}$, не є незалежними, а ефективно виражаються через чотири дійсних змінних, які можна об'єднати в дві комплексні z_1 та z_2:

$$
\begin{aligned}
&\mu_1 = -\frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{z_1 z_2^* + z_2 z_1^*}{1+|z|^2}, \quad \mu_2 = \frac{R\sqrt{3}}{2i}\cdot\frac{z_1 z_2^* - z_2 z_1^*}{1+|z|^2}, \\
&\mu_3 = \frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{|z_2|^2 - |z_1|^2}{1+|z|^2}, \quad \mu_4 = \frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{z_1 + z_1^*}{1+|z|^2}, \\
&\mu_5 = \frac{R\sqrt{3}}{2i}\cdot\frac{z_1^* - z_1}{1+|z|^2}, \quad \mu_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{z_2 + z_2^*}{1+|z|^2}, \\
&\mu_7 = \frac{R\sqrt{3}}{2i}\cdot\frac{z_2^* - z_2}{1+|z|^2}, \quad \mu_8 = \frac{R}{2}\cdot\frac{2-|z|^2}{1+|z|^2}, \quad |z|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Третя глава, присвячена застосуванню результатів попередніх глав до розв'язання деяких фізичних задач феноменологічної теорії магнетизму. Зокрема в § 1 досліджено інтегровну модель динаміки багатокомпонентного параметра порядку для квазіодновимірних магнетиків з іонними спінами $S = 1$ на кожному вузлі. Функції μ_a, $a = \overline{1,8}$, які приймають значення на орбітах групи $SU(3)$ задають просторовий розподіл та часову еволюцію багатокомпонентного параметра порядку; причому перші три функції описують намагніченість, а решту — середні значення квадрупольного моменту. Якщо намагніченість та середній квадрупольний момент виникають в результаті усереднення по "чистих" сталих спінового ланцюжка, то багатокомпонентний параметр порядку приймає значення на виродженій орбіті групи $SU(3)$, що є чотиривимірним дійсним або двовимірним комплексним простором $C\mathbf{R}^2 \simeq SU(3)/SU(2) \times U(1)$.

Перші три компоненти еволюційного рівняння, які власне описують намагніченість, мають вигляд

$$c\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = \mu_2\mu_{3\,xx} - \mu_3\mu_{2\,xx} + f_{147}(\mu_4\mu_{7\,xx} - \mu_7\mu_{4\,xx}) + f_{156}(\mu_5\mu_{6\,xx} - \mu_6\mu_{5\,xx}),$$

$$c\frac{\partial \mu_2}{\partial t} = \mu_3\mu_{1\,xx} - \mu_1\mu_{3\,xx} + f_{246}(\mu_4\mu_{6\,xx} - \mu_6\mu_{4\,xx}) + f_{257}(\mu_5\mu_{7\,xx} - \mu_7\mu_{5\,xx}),$$

$$c\frac{\partial \mu_3}{\partial t} = \mu_1\mu_{2\,xx} - \mu_2\mu_{1\,xx} + f_{345}(\mu_4\mu_{5\,xx} - \mu_5\mu_{4\,xx}) + f_{367}(\mu_6\mu_{7\,xx} - \mu_7\mu_{6\,xx}),$$

де $c = \frac{3}{4}I_2$.

Як бачимо, на динаміку вектора намагніченості впливають змінні μ_4, μ_5, μ_6, μ_7, які є компонентами тензора квадрупольного моменту. Фізичний ефект від такої взаємодії полягає в модуляції довжини вектора намагніченості. Можливість такого ефекту передбачалась в ряді робіт, зокрема в роботі [7].

В §2 - §4 розглянено задачу опису нелінійної однорідної динаміки двох векторів намагніченості, які відповідають двом взаємодіючим між собою магнітовпорядкованим підграткам. Нелінійні рівняння, які відпівідають цій моделі, мають вигляд

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{S} \times \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{S}}, \quad \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{T} \times \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{T}}, \tag{10}$$

де **S**, **T** — вектори намагніченостей підграток, $\mathcal{H} = \sum a_i S_i T_i$ — гамільтоніан взаємодії (між константами a_i виконуються співвідношення $a_i^2 - a_j^2 = \mathcal{J}_j - \mathcal{J}_i$, $0 \le \mathcal{J}_1 \le \mathcal{J}_2 \le \mathcal{J}_3$). Рівняння (10) розглядаються як гамільтонова система на орбіті групи $SO(4)$. Використано еквівалентність рівнянь (10) гамільтоновій системі задачі Клебша про рух твердого тіла в рідині. Остання формулюється в термінах "змінних Клебша"

$$p_i = w_i(S_i - T_i), \qquad M_i = \frac{w_1 w_2 w_3}{w_i}(S_i + T_i),$$

де константи w_i виражаються через a_i формулами

$$a_1 = \frac{w_1^4 - \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_1}{2w_1 w_2 w_3}, \quad a_2 = \frac{w_1^2 w_2^2 + (\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2) w_3^2}{2w_1 w_2 w_3}, \quad a_3 = \frac{w_1^2 w_3^2 - w_2^2}{2w_1 w_2 w_3},$$

і має вигляд гамільтонової системи на орбітах групи $E(3)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= d_2[\mathbf{p} \times \mathbf{M}] - d_0[\mathbf{p} \times \mathcal{J}\mathbf{M}], \\ \frac{d\mathbf{M}}{dt} &= d_2[\mathbf{p} \times \mathcal{J}\mathbf{p}] + d_0([\mathbf{p} \times B\mathbf{p}] - [\mathbf{M} \times \mathcal{J}\mathbf{M}]), \end{aligned} \tag{11}$$

де

$$\mathcal{J} = \operatorname{diag}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3), \qquad B = \operatorname{diag}(\mathcal{J}_2\mathcal{J}_3, \mathcal{J}_1\mathcal{J}_3, \mathcal{J}_1\mathcal{J}_2),$$
$$d_0 = \frac{w_1}{2w_2 w_3}, \qquad d_2 = \frac{1}{2w_1 w_2 w_3}.$$

Рівняння (11) суттєво спрощується у випадку коли $|\mathbf{S}| = |\mathbf{T}|$, що еквівалентно умові $(\mathbf{M}, \mathbf{p}) = 0$. В цьому випадку (11) є еквівалентне рівнянням задачі Неймана про рух матеріальної точки на поверхні сфери під дією пружної анізотропної сили: $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$ грають роль пружних констант.

Система (11) є інтегровною; додатковий до гамільтоніана

$$H_2 = \frac{1}{2}\sum_i (\mathcal{J}_i p_i^2 + M_i^2 - (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3) p_i^2).$$

інтеграл руху, що забезпечує інтегровність, має вигляд

$$H_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2\mathcal{J}_3}{\mathcal{J}_i} p_i^2 - \mathcal{J}_i M_i^2\right).$$

Сумісна поверхня, яка виникає при фіксуванні інтегралів руху є еквівалентна торові (тор Ліувілля). Його комплексифікація описується двома комплексними параметрами z_1 і z_2, які приймають значення на рімановій поверхні роду 3, що задається алгебраїчним рівнянням:

$$w^4 - 2w^2 P(z) + P^2(z) - 4c^2(z - \mathcal{J}_1)(z - \mathcal{J}_2)(z - \mathcal{J}_3) = 0, \qquad (12)$$

де

$$c = (\mathbf{p}, \mathbf{M}), \qquad P(z) = R^2(z - \mathcal{A})(z - \mathcal{B}), \qquad R^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2,$$

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = -\frac{H_2}{R^2}, \quad \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \frac{H_0}{R^2}.$$

Загальний розв'язок системи (11) подано в термінах θ-функцій з характеристиками, які будуються за рімановою поверхнею (12).

У випадку $(\mathbf{p}, \mathbf{M}) = 0$, для гамільтоніанової системи (11) знайдено змінні "дія", які мають вигляд гіпереліптичних інтегралів третього роду:

$$Q_\mu = \frac{R^2}{2\pi} \oint_{a_\mu} \frac{z^2 - z(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{A}\mathcal{B}}{\sqrt{(z - \mathcal{J}_1)(z - \mathcal{J}_2)(z - \mathcal{J}_3)(z - \mathcal{A})(z - \mathcal{B})}} dz,$$

де цикли a_μ, $\mu = 1, 2$ на рімановій поверхні вибрані так, як це показано на рис.1

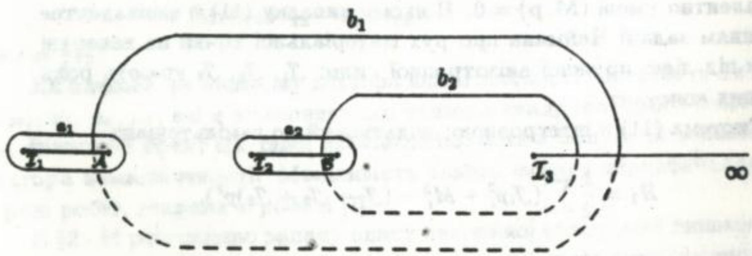

Рис. 1

Розглянуто також інші вироджені розв'язки, які виражаються в термінах еліптичних та елементарних функцій.

ВИСНОВКИ

В рамках досліджень, які складають основу дисертаційної роботи, одержані такі результати:

— доведено комутативність стосовно двох дужок Лі-Пуассона скінченного набору функцій, які є коефіцієнтами розкладу у степеневий ряд інваріантних функцій Казиміра для довільної напівпростої алгебри петель (алгебри функцій на колі зі значеннями у напівпростій алгебрі Лі), що дає основу для побудови інтегровних гамільтонових систем на орбітах алгебр петель;

— інтерпретовано вищі стаціонарні рівняння, які відповідають рівнянням Кортевега-де Фріза, нелінійному рівнянню Шредінгера, рівнянню Гайзенберга та іншим, як інтегровні гамільтонові системи на орбітах алгебр петель $sl(2,\mathbf{R}) \otimes \mathcal{P}(\lambda, \lambda^{-1})$ та $su(2) \otimes \mathcal{P}(\lambda, \lambda^{-1})$;

— побудовано інтегровні гамільтонові системи на орбітах алгебр $\tilde{\mathbf{g}}_- \simeq su(3) \otimes \mathcal{P}(\lambda^{-1})$, $\tilde{\mathbf{g}}_+ \simeq su(3) \otimes \mathcal{P}(\lambda)$ та інтерпретовано їх як вищі стаціонарні рівняння для двокомпонентного нелінійного рівняння Шредінгера і $SU(3)$-магнетика Гайзенберга, побудовано часову еволюцію стаціонарних розв'язків цих систем;

— запропоновано нові нелінійні інтегровні рівняння, які можна використати як модельні рівняння для опису просторового розподілу та часової еволюції квадрупольного параметра порядку у випадку магнетиків зі спіном $S = 1$;

— досліджено нелінійну динаміку магнетиків з двома підгратками, встановлено зв'язок цієї задачі із задачею про рух твердого тіла в рідині та задачею про рух матеріальної точки на сфері під дією пружної сили.

Результати дисертаційної роботи можуть бути використані для побудови теорії поширення хвиль у різноманітних нелінійних середовищах, для опису просторового розподілу та часової еволюції багатокомпонентних параметрів порядку у магнетиках з великими спіновими моментами у вузлах кристалічної гратки, для опису явищ нелінійного антиферомагнетного резонансу, а також в багатьох інших задачах теоретичної фізики, де виникають нелінійні інтегровні гамільтонові системи.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Кісілевич О.В., Чемерис В.В. Інтегровні гамільтонові системи на орбітах коприєднаного представлення алгебри петель. - Допов. АН України. - 1992. N^a12. - С. 51-55.
2. Голод П.І., Кісілевич О.В. Інтегровна модель динаміки векторів намагніченостей підграток в однорідному магнетику з двома підгратками. - УФЖ, 1995, т.40, $N^2$1-2. С. 76-83 .
3. Голод П.І., Кісілевич О.В. Нелінійна динаміка намагніченостей підграток в однорідному антиферомагнетику. - Київ, 1991. Препринт ІТФ-91-45У. - 13 с.
4. Голод П.І., Кісілевич О.В. Інтегровна динаміка $SU(3)$-магнетика. - Київ, 1993. Препринт ІТФ-93-30У. - 12 с.
5. Кісілевич О.В. Інтегровні гамільтонові системи на орбітах алгебр петель і вищі стаціонарні рівняння солітонного типу. - Київ, 1994. Препринт ІТФ-94-30У. - 25 с.
6. Кісілевич О.В. Геометричний метод знаходження швидкості Уокера в анізотропному магнетику. - Київ, 1995. Препринт ІТФ-95-14У. - 7 с.
7. Кісілевич О.В. Алгебраїчна інтегровність гамільтонових систем на орбітах афінних алгебр Лі. Тези доп. на наук. конференц. ЛТЕІ. - Львів, 1993. С. 209.
8. A.Kisilevich. An integrable models of dynamics of order parameters magnet wiht higher spin. Abstracts of international workshop on statistical physics and condensed matter theory. - Lviv, 1995.

ЛІТЕРАТУРА

1. Adler M. On a trace functional for formal pseudodifferential operators and the symplectic structure of the Korteweg-de Vries type equations. - Invent. Math. 1979, v. 50, N^a2, pp. 219 - 248.
2. Рейман А.Г., Семенов-Тян-Шанский М.А. Семейство гамильтоновых структур, иерархия гамильтонианов и редукция для матричных дифференциальных операторов первого порядка. - Функц. анализ и его прилож., 1980, т. 251, N^a2, с. 77 - 78.
3. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. - М.: Наука, 1986.

4. Новиков С.П. Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза. - Функц. анализ и его прилож., 1974, 8, $N^{\circ}3$, с. 54 - 66.
5. Голод П.И. Интегрируемые гамильтоновы системы на орбитах афинных групп Ли и периодическая периодическая задача для модифицированных уравнений Кортевега-де-Фриза. - Киев, 1982. - 21 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т теорет; ИТФ - 82 - 144Р).
6. Голод П.И. Гамильтоновы системы на орбитах афинных групп Ли и нелинейные интегрируемые уравнения. - В сб.: Физика многочастичных систем. 7, 1985, с. 30 - 39.
7. Дзюб И.П. Учет сокращения спина в нелинейной динамике легкоплостностного ферромагнетика. - Сб. Современные проблемы магнетизма. Киев. Наук. думка, 1986, с. 130-138.

Kisilevich A.V. Integrable Hamilton systems on orbits of loop-groups and their application.

The thesis for obtaining the degree of Candidate of phisical and mathematical sciences on the spesiality 01.04.02 — theoretical physics. Institute for Condensed Matter Physics of the Nat. Acad. Sci. Ukr. Lviv. 1995.

Theorem about commutativeness according of two the Lie-Poisson brackets of finite collection of functions which are the coefficients of the power series expansion of invariant Casimir's functions for arbitrary semisimple loop algebra is proved. The nonlinear equation of multicomponent order parameter dynamics in magnets with the spin $S = 1$ is given in terms of two commuting Hamilton systems (according to variables t and x) on the coadded representation orbit. The "action" variables in the problem of magnetization vectors motion in a magnet with two sublattices are given in terms of the third order hyperelliptic integral.

Кисилевич А.В. Интегрируемые гамильтоновые системы на орбитах групп петель и их применение.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 - теоретическая физика, Институт физики конденсированных систем НАН Украины, Львов, 1995.

Доказана теорема о коммутативности относительно двух скобок Ли-Пуассона конечного набора функций, которые являются коэффициентами разложения в степенной ряд инвариантных функций Казимира для произвольной полупростой алгебры петель. Представлено нелинейное уравнение динамики многокомпонентного параметра порядка в магнетиках со спином $S = 1$ двух коммутирующих гамильтоновых систем (соответственно по переменным t и x) на орбите коприсоединенного представления. Переменные "действие" в задаче о движении векторов намагниченности в магнетике с двумя подрешетками представлены в виде гиперэллиптического интеграла третьего рода.

Ключові слова: інтегровні системи, алгебра петель, магнетик, змінні "дія-кут".

Підп. до друку 11.10.95. Формат 60x84 1/16
Папір друк. № 2. Офс.друк. Умовн.друк.арк. 1
Умовн.фарб.-відб. 1 Умовн.видав.арк. 0.95
Тираж 90 прим. Зам. 183. Безплатно

ДУЛП 290646 Львів-13, Ст.Бандери, 12

Дільниця оперативного друку ДУЛП
Львів, вул. Городоцька, 286