НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ім. С.П. ТИМОШЕНКА

На правах рукопису

БЕСПАЛОВА Олена Іванівна

РОЗВ'ЯЗАННЯ СТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТА ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК МЕТОДОМ ПОВНИХ СИСТЕМ

01.02.04 - механіка деформівного твердого тіла

Бесп

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
доктора фізико-математичних наук

КИЇВ - 1995

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Інституті механіки [illegible]
України

Науковий консультант - академік НАН України,
доктор технічних наук, професор
Григоренко Ярослав Михайлович

Офіційні опоненти : - доктор технічних наук, професор
Гуляєв Валерій Іванович

- доктор фізико-математичних наук,
професор Кашк Яків Федорович

- доктор фізико-математичних наук, професор Приказчиков Віктор Георгійович

Провідна організація - Інститут проблем машинобудування
НАН України

Захист дисертації відбудеться "21" листоп. 1995 р. о 10 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 01.03.03 при Інституті механіки ім.С.П.Тимошенка НАН України за адресою: 252057,м.Київ-57,вул.Нестерова,3; факс: (044) 446-03-19.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Інституту механіки НАН України.

Автореферат розіслано "14" жовтня 1995 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради,
доктор технічних наук,
професор І.О.Чернишенко

змінних. Така закономірність в умовах реалізації на обчислювальних засобах з "скінченою арифметикою" приводить до суттєвого зниження обумовленості задачі, різкому збільшенню ресурсів памяті ЕОМ та потрібного для розрахунку часу. В зв'язку з цим, процес удосконалення , розвитку і узагальнення існуючих методів, пошук та створення нових, що в більшій мірі відповідають внутрішній структурі досліджуваних задач і є економічними щодо ресурсів ЕОМ, відбувається постійно і є перспективним напрямком сучасних прикладних наук.

Мета роботи полягає в розробці загального підходу до розв'язання задач теорії пружності та теорії оболонок для неоднорідних анізотропних тіл скінчених розмірів, використанні його для розв'язання нових стаціонарних задач данного класу, дослідженні та узагальненні залежностей по впливу фізичних і геометричних факторів на деформування і коливальні процеси просторових і тонкостінних елементв зазначеного класу.

Наукова новизна та значущість результатів роботи полягає в тому, що

- розроблено єдиний загальний підхід до розв'язання широкого класу задач просторової теорії пружності та теорії оболонок для неоднорідних анізотропних тіл скінчених розмірів з довільними граничними умовами, на основі якого розв'язані задачі статики, задачі про вільні та вимушені гармонічні усталені коливання ряду просторових тіл ,а також задачі середнього згину гнучких пластин та оболонок в докритичній стадії деформування при наявності різного роду локалізованих включень;розв'язано ряд задач, що мають теоретичне та прикладне значення.

Вірогідність отриманих в роботі результатів обумовлена використанням обгрунтованих математичних моделей теорії пружності та теорії оболонок, коректністю постановок стаціонарних задач для неоднорідних анізотропних тіл, ретельним тестуванням розробленого підходу на багатьох задачах данного класу, контролем точності обчислень на основі індуктивних оцінок.

Теоретичне значення та практична цінність полягає у побудові загального підходу до розв'язання задач теорії пружності та теорії оболонок для неоднорідних анізотропних тіл скінчених розмірів,який включає метод розв'язання лінійних багатовимірних задач та нові методики розв'язання нелінійних задач і задач на власні значення, і з ростом розмірності задачі характеризується лінійним зростанням витрат ЕОМ при збереженні точності результатів, що дає змогу ефективного його використання при дослідженні деформування конструктивних елементів різного призначення при статичних та динамічних навантаженнях в режимах, близьких до експлуатаційних.

Розроблений метод та побудовані на його основі методики реалізовані у вигляді обчислювальних програм стосовно до сучасних ЕОМ.

Апробація роботи. Основні положення роботи та окремі її результати доповідалися на XV Науковій нараді по тепловим напруженням в елементах конструкцій (Київ,1980),IX Всесоюзній конференції по конструкційній міцності двигунів (Куйбишев,1983), II-ій Всесоюзній науково-технічній конференції "Проблеми нелінійної електротехніки" (Шацк, 1984),на IV науково-технічній конференції "Вдосконалення експлуатації та ремонту корпусів суден" (Калінінград, 1986), на семінарі кафедри теоретичної механіки Київського національного університету ім. Т. Шевченка (Київ, 1988), на науково-технічній конференції "Методи розрахунку виробів з високоеластичних матеріалів" (Рига, 1989),на III-ій Всесоюзній конференції по механіці неоднорідних структур (Львів, 1991), на Українській конференції "Моделювання та дослідження стійкості систем" (Київ, 1995),на IV Міжнародній конференції по механіці неоднорідних структур (Тернопіль, 1995) та ін..

В повному об'ємі дисертаційна робота обговорювалась на семінарі відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України (Київ,1994,1995), на семінарі "Будівельна механіка оболонкових систем" Інституту механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України (Київ, 1994), на загальноінститутському семінарі Інституту механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України (Київ,1994), на семінарі відділу прикладної математики та обчислювальних методів Інституту проблем машинобудування НАН України (Харків,1994).

Публікації. Основний зміст дисертації опубліковано в 22 наукових працях. Науковий внесок дисертанта у праці ,що написані у співавторстві, такий: у монографії [12] дисертанту належить постановка задачі про власні коливання деяких класів тонкостінних елементів на основі класичної теорії оболонок, просторової теорії пружності та з врахуванням поперечного зсуву по моделі типу Тимошенка, розв'язок конкретних задач для просторових тіл скінченних розмірів та циліндричних оболонок довільного відкритого профілю, аналіз результатів,співавторам- загальна постановка проблеми, побудова пакету прикладних програм, проведення розрахунків для складних оболонок обертання; в монографії [I3] дисертанту належать розділи, де йдеться про постановку та розв'язок задач статики для оболонок з змінною в обох координатних напрямках жорсткістю методом Канторовича-Власова, співавторам- інші розділи; в монографії [I4] дисертанту належить алгоритмізація методу дискретної ортогоналізації,побудова частини модулів,розв'язування конкретних задач, співавторам- постановка задач статики для оболонок обертання , побудова решти програмних модулів, аналіз результатів; в статтях [I5-2I] дисертанту належить побудова методу розв'язання задач, проведення розрахунків, аналіз обчислювальних аспектів методу,співавторам- постановка задач теплопереноса , сумісне обговорення основ методу, фізична трактовка результатів; в статтях [II,22] дисертанту належить розв'язок просторових задач статики та вільних коливань для прямокутного паралелепіпеду методом повних систем, співавторам- постановка задач, побудова модифікованої моделі плоскої задачі та проведення розрахунків по ній методом скінчених елементів; в [9] дисертанту належить постановка задачі, розробка методу, аналіз результатів, співавторам- проведення розрахунків, в публікації [IO] дисертанту належить розв'язок задачі про власні коливання анізотропної плити в просторовій постановці, співавтору- фізична трактовка результатів.

Структура та об'єм дисертації. Дисертація складається з вступу, шести розділів, загальних висновків та списку літератури,що містить 303 найменувань. Загальний об'єм роботи 3II сторінок, в тому числі 32 малюнки та 36 таблиць.

Особистий внесок автора полягає у розробці методу розв'язання лінійних граничних задач з будь-яким числом незалежних змінних, побудові на його основі методик розв'язання багатовимірних нелінійних задач та задач на власні значення, використанні цих розробок для визначення та аналізу напружено-деформівного стану та стаціонарних коливань неоднорідних анізотропних просторових тіл скінчених розмірів і гнучких оболонкових елементів в докритичній стадії деформування в залежності від їх геометричних та фізичних характеристик.

Робота виконана у відділі обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України. Автор висловлює глибоку вдячність своєму науковому консультанту академіку НАН України д.т.н. Я.М.Григоренку за постійну увагу до роботи.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі на основі огляду досліджень, що мають відношення до теми дисертації, формулюється мета роботи, її наукова новизна , вірогідність та практичне значення, а також коротко викладено зміст дисертації по розділах.

Відзначено, що постановка задач теорії пружності для однорідних і неоднорідних ізотропних та анізотропних тіл, обгрунтування їх коректності і розробка методів розв'язання пов'язані з працями відомих вчених:О.Я.Александрова, Я.И.Бурака, І.І.Воровича, В.Т.Грінченка, О.М.Гузя, Г.Б.Колчина, В.Д.Купрадзе, Л.С.Лейбензона, С.Г.Лехницького, В.А.Ломакіна, А.І.Лурьє, А.Лява, В.В.Новожилова, П.Ф.Папковича, Я.С. Підстригача, Б.Є.Побєдрі, Ю.М.Подільчука, В.К.Прокопова, Ю.М. Работнова, В.Л.Рвачева, В.С.Саркісяна, С.П. Тимошенка, А.Ф. Улітка, М.М.Филоненко-Бородича та ін.

В розробці загальних питань теорії оболонок , методів розв'язання окремих класів задач та проведенні аналізу стаціонарних процесів в тонкостінних елементах вагомий внесок зробили С.О.Амбарцумян, В.З.Власов, К.З.Галімов, О.Л.Гольденвейзер, Е.І. Григолюк, Я.М. Григоренко, А.Д. Коваленко, М.О. Кільчевський, А.І.Лурьє, А.Ляв, Х.М.Муштарі, В.В.Новожилов, С.П.Тимошенко, В.І.Феодосьєв, К.Ф.Черних, W.Fluge та ін.

Природно, що ступінь повноти та достовірності теоретичного дослідження деформування просторових тіл та оболонкових елементів багато в чому зумовлені рівнем розвитку та досконалості відповідних математичних засобів.

Так, наявність таких аналітичних методів, як методи суперпозиції, однорідних розв'язків, власних векторних функцій та ін. , забезпечила проведення грунтовного аналізу напружено-деформованого стану та коливальних процесів для здебільшого однорідних ізотропних просторових тіл канонічної форми. Ці дослідження пов'язані з роботами Л.А.Агаловяна, О.О.Баблояна, Е.М.Байди, Г.М.Валова, І.І. Воровича, В.Т. Грінченка, О.М. Гузя, П.А. Жиліна, Г.Л. Комісарової, В.В. Мелешка, Ю.М. Подільчука, В.К. Прокопова, А.Ф. Улітка, S.R.Hutchinson,D.J. Gormon, H.Kasano, та багатьох інших. .

Для неоднорідних по одній змінній пружних тіл з певним законом неоднорідності аналітичні методи використовувались Б.М. Коганом, Г.Б.Колчиним, Ю.М. Немішем, В.С. Саркісяном, C.Shun, G. Terry і ін.

Для оболонок обертання класичних форм (циліндр, сфера, конус) та колових пластин лінійно змінної товщини при осесиметричному та антисиметричному навантаженні аналітичні розв'язки отримано Я.М.Григоренком, А.Д.Коваленком,А.І.Лур'є, Е.С.Уманським, L.Boll, P.Dubois, G. Olsson, H.Reissner та іншими відомими вченими.

Довільний фізично розумний характер неоднорідності в одному з координатних напрямків для деяких класів пружних тіл при спеціальних граничних умовах може бути врахований практично точно на основі чисельно-аналітичного підходу, що грунтується на методі відокремлення змінних та чисельному розв'язуванні одновимірних крайових задач. Такі роботи проводяться, напр., в авторських колективах, очолюваних Я.М. Григоренко, М.О. Шульгою. Такий же підхід в двовимірних задачах для складних оболонкових систем використовується Е.І. Григоликом, Я.М.Григоренком, І.В.Григор'євим, О.В.Карміщиним, В.І.Мяченковим, О.М.Фроловим та ін..

Розрахунок пружних елементів складних геометричних форм при будь яких граничних умовах, низькому порядку симетрії пружних властивостей матеріалу, неоднорідності по всім просторовим змінним проводиться на основі чисельних методів широкого використання: проекційних, варіаційних, різницевих, скінченоелементних, зведення до звичайних диференційних рівнянь і т.д.. Загальним питанням теоретичного дослідження цих підходів, умов практичного застосування в задачах механіки деформівного твердого тіла присвячені численні роботи відомих механіків та математиків: В.М.Абрашина, В.М.Апановича, І.Г.Бубнова, Д.В.Вайнберга, А.І.Вайндінера, Р.С.Варги, І.І. Воровича, Б.Г.Гальоркіна, Є.Г.Дьяконова, Л.В.Канторовича,Я.Ф. Кашка, А.М.Коновалова, В.Г.Корнєєва, М.Ф.Кравчука, Л.С.Лейбензона, Г.І.Марчука, С.Г.Міхліна, В.Л.Рвачьова, Л.О.Розіна, А.О. Самарського, Д.К.Фадєєва, В.М.Фадєєвої, Р.П. Федоренка, К.Флетчера, М.М.Яненка, F.Brezzi, J.Dankert, J.Douglas, D.W. Peaceman та ін.

Застосування цих методів до розв'язування плоских та просторових задач теорії пружності представлені роботами: П.М. Варвака, Б.Ф. Власова, Г.П.Громового,М.И.Длугача, С.Ю. Єрьоменка, С.О.Каланти, В.В.Киричевського, Ю.В.Коханенка, Б.М. Лісіцина, В.Г. Літвінова, Л.Е. Мальцева, М.П. Матвєєва, В.П.Нетребка, Б.Є.Победрі, Р.Б.Рікардса, О.С. Сахарова, О.О. Синявського, М.С.Синекопа, В.Я.Терещенка, В.М. Фролова, М.М. Філоненко- Бородіча, Ю.М.Шевченка, С.В.Шешеніна, J.Altenbach, T.Q.Ye, N.Yoshihiro, D.Zhang та ін.

Статичний та динамічний розрахунок тонкостінних елементів проводився дослідниками : А.Т.Василенком, П.П.Ворошко, Г.Д.Гавриленком, А.В.Горшковим, Е.О.Гоцуляком, Е.І.Григолюком, Я.М.Григоренком, В.І.Гуляєвим, Є.Є.Жуковим, Я.Ф.Кашком, В.І.Козловим, В.А.Крисько, М.М.Крюковим, Л.В.Курпою, М.М.Леонтьєвим, В.М. Паймушиним, В.В.Петровим, В.Г. Приказчиковим, А.П.Прусаковим, Р.Б.Рікардсом, М.С.Рябовим, Я.Г.Савулою, В.М.Фроловим, В.І.Шалашиліним, H.Alexander, C.Johnson, I.W. Chang, A.Kerr, P.Laura, A.W.Leissa, W.H.Liu, M.S.Qatu і ін.

Аналіз розглянутих робіт показав, що кількість досліджень, пов'язаних з розв'язуванням тривимірних задач для просторових тіл в широких межах зміни фізичних властивостей матеріалу, довільному характері неоднорідності та навантажень по просторовим координатам , будь-яких умовах на обмежуючих поверхнях , незначна у порівнянні з відповідними двовимірними задачами. Частково це пояснюється тим, що згадані чисельні методи, як уже відмічалось, характеризуються степеневою залежністю порядку розв'язуючої системи алгебраїчних рівнянь від числа незалежних змінних області. Як наслідок, при розв'язанні багатовимірних задач погіршується обумовленість системи, ефективність методів щодо часу та пам'яті ЕОМ падає, похибки ростуть і в ряді випадків, коли для одержання необхідної точності потрібна значна кількість дискретних елементів або координатних функцій, можна отримати взагалі невірний результат.

Запобігти в певній мірі цій ситуації можна шляхом розробки методів, що спеціально орієнтовані на розв'язання задач з декількома змінними, забезпечують достатню точність розв'язку і є економічними щодо ресурсів ЕОМ. Створення таких методів сприятиме грунтовному та достовірному дослідженню механічних процесів в неоднорідних анізотропних тілах скінчених розмірів , що і є предметом данної дисертаційної роботи.

В першому розділі формулюються стаціонарні задачі деформування широкого класу пружних просторових тіл скінчених розмірів та тонкостінних оболонкових елементів. Широта класу зумовлена практичною відсутністю обмежень на матеріали, що використовуються, на тип закріплення граничної поверхні та характер діючих навантажень. Так, матеріал тіла за своїми фізичними властивостями може мати одну і більше площин пружної симетрії, на обмежуючих поверхнях приймаються кінематичні, статичні та змішані граничні умови; тіла можуть бути неоднорідної структури як неперервної, так і дискретної (аж до локалізованих включень), зовнішні навантаження приймаються розподіленими по просторовим координатам за будь-яким фізично розумним законом.

Для таких тіл розглядаються задачі статики, стаціонарної динаміки при гармонічних в часі навантаженнях та задача по визначенню частот та форм вільних коливань. Крім того , у випадку тонких оболонок додатково розглядаються задача середнього прогину в квадратичному наближенні та задача про власні коливання при наявності попереднього напруженого стану, що зумовлений статичним навантаженням.

Вказані задачі, як багатовимірні векторні задачі математичної фізики, можуть бути подані в такому загальному вигляді:

$$(L-\lambda B)\bar{U}=\begin{cases}\bar{q}\text{-задача статики } (\lambda=0);\\ \bar{q}\text{-задача про вимушені коливання } (\lambda=\Omega^2\neq 0,\Omega\text{-задано});\\ 0\text{-задача про вільні коливання } (\lambda\text{-шуканий параметр});\end{cases} \quad (1)$$

при граничних умовах:

$$R\bar{U} = \begin{cases} \bar{\varphi} \text{ -задачі статики та вимушених коливань;} \\ 0 \text{ -задача про вільні коливання.} \end{cases} \quad (2)$$

Тут $\bar{U}$ - шукана вектор-функція двох або трьох незалежних змінних; L, R - матриці, елементами яких є диференційні (або алгебраїчні для R) вирази, одержані з основних співвідношень просторової теорії пружності неоднорідного анізотропного тіла або відповідних співвідношень класичної моделі тонких оболонок; B - матриця, що описує інерційні властивості тіла. В задачі про середній прогин оболонок вектори зовнішніх навантажень $\bar{q}$ та $\bar{\varphi}$ мають додатки, які визначаються нелінійними членами прийнятої теорії,а в задачі про коливання попередньо напружених оболонок елементи матриці L мають параметричні члени, що є розв'язком відповідної задачі статики.

Коректність постановок лінійних задач зумовлена їх фізичним змістом, а геометрично нелінійної постановки задачі для гнучких оболонок - суто докритичною областю деформування.

В цьому розділі розглядається також варіаційна постановка просторової задачі статики і вільних коливань на основі принципів Лагранжа та Релея відповідно.

Центральне місце в роботі займає другий розділ, де викладено основи побудови єдиного підходу до розв'язання сформульованих стаціонарних задач. Тут дається загальна характеристика розробленого методу - методу повних систем (МПС) - для розв'язання лінійних граничних задач з N змінними, що описують лінійне деформування просторових тіл (N=3) та оболонкових елементів (N=2), формулюються його вихідні положення, розглядаються різні варіанти побудови, обговорюються можливість та особливості розв'язування задач у варіаційній постановці.

Метод повних систем можна розглядати як розвиток проекціних методів типу Бубнова-Гальоркіна в плані відмови від довільного вибору координатних функцій (базису) в багатовимірних задачах. Перший крок в цьому напрямку, на нашу думку, був зроблений в методах типу Канторовича-Власова зведення до звичайних диференційних рівнянь. Так, коли в методах Бубнова- Гальоркіна розв'язок N-вимірної задачі приймався у вигляді:

$$u(x_1,x_2,\ldots,x_N)\cong\sum_{i=1}^{I} a_i\varphi_i(x_1,x_2,\ldots,x_N) \qquad (3)$$

і шуканими були числові коефіцієнти $a_i=const$ ($i=\overline{1,I}$, I-кількість утримуваних в апроксимації членів) при довільних базисних функціях $\varphi_i(x_1,x_2,\ldots,x_N)$, то в методах зведення -

$$u(x_1,x_2,\ldots,x_N)\cong\sum_{i=1}^{I} X_{ni}(x_n)\varphi_i(x_1,x_2,\ldots,x_N) \qquad .(4)$$

невідомими є уже не числа, а функції якоїсь однієї (хай x_n) з змінних області - $X_{ni}(x_n)$ ($i=\overline{1,I}$).

Подальший розвиток цього напрямку пов'язаний з введенням в апроксимацію (4), як шуканих, функцій всіх інших змінних - $X_{1i}(x_1),X_{2i}(x_2),\ldots,X_{Ni}(x_N)$ ($i=\overline{1,I}$), тобто:

$$u(x_1,x_2,\ldots,x_N)\cong\sum_{i=1}^{I} X_{1i}(x_1)X_{2i}(x_2)\ldots X_{Ni}(x_N)\varphi_i(x_1,x_2,\ldots x_N) \qquad (5)$$

Методи з такою апроксимацією розділяються на дві групи: в одній (наприклад,роботи О.І.Вайндінера, М.М.Леонтьєва,Л.Є. Мальцева, J.P.H. Webber) зберігаються довільні координатні функції, в другій (наприклад, роботи В.М. Фролова, В.В. Петрова, В.А.Криська, А. Kerr) враховується можливість повної відмови від них. Саме до останньої групи належить метод повних систем.

Вихідні положення МПС пов'язані, по-перше, з особливостями апроксимації шуканої функції N змінних та, по-друге, з побудовою розв'язучої системи відносно вибраних невідомих.

В МПС розв'язок $u(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ лінійної граничної задачі

$$Lu = q\,, \qquad x \in V,$$
$$Ru = \varphi\,, \qquad x \in S \qquad (6)$$

($VUS=\{\ x_n\in[x_{no},x_{n1}],\ x_{np}=const,\ (p=0,1),n=\overline{1,N}\}$ - заданий N-вимірний паралелепіпед, $x=\{x_1,x_2,\ldots x_N\}$ - сукупність незалежних змінних) апроксимується виразом:

$$u(x_1,x_2,\ldots,x_N)\cong\overset{*}{u}_{\,I}=\sum_{i=1}^{I} X_{1i}(x_1)X_{2i}(x_2)\ldots X_{Ni}(x_N) \qquad (7)$$

де всі функції $X_{ni}(x_n)$ ($n=\overline{1,N};i=\overline{1,I}$) вважаються невідомими. Якщо умовну вектор-функцію $X_n=\{X_{ni}(x_n),i=\overline{1,I}\}$ назвати аргументною щоб підкреслити залежність від одного певного аргументу, то шуканими в МПС є N аргументних вектор-функцій $\bar{X}_n$ $(n=\overline{1,N})$.

Правомірність апроксимації (7) безпосередньо витікає з теореми Вейєрштраса про апроксимацію поліномами неперервної функції багатьох змінних.

Побудова розв'язучої системи відносно N аргументних вектор-функцій базується на техніці проекційних методів зведення до звичайних диференційних рівнянь, де використовується операція проектування P_n, що зводить багатовимірну задачу до одновимірної по змінній x_n. Застосовуючи до вихідної задачі (6) процедуру зведення $P=\{P_n, n=\overline{1,N}\}$, що є сукупністю таких операцій по кожній з змінних області, одержимо розв'язучу систему МПС у вигляді:

$$P_n[L\overset{*}{u}_I-q]=L_n\bar{X}_n-\bar{q}_n=0\ , \qquad x_n\in(x_{n0},x_{n1}), \tag{8}$$

$$P_n[R\overset{*}{u}_I-\varphi]=R_{np}\bar{X}_n-\bar{\varphi}_{np}=0,\ x_n=x_{np}\quad (p=0,1), \tag{9}$$

$$(\bar{X}_m=\tilde{\bar{X}}_m\ , m=\overline{1,N},\ m\neq n),$$

$$n=\overline{1,N}$$

(знаком " ~ " в n-ій задачі відмічені аргументні функції змінних x_m $(m=\overline{1,N}, m\neq n)$, що перетворені процедурою P_n і містяться в виразах L_n, R_{np} у вигляді констант-функціоналів).

Система (8),(9) є нелінійною відносно аргументних функцій різних змінних. Вона містить N окремих задач, які в силу суті процедури зведення можна вважати одновимірними. Кожна з них формулюється як диференційна задача відносно однієї аргументної вектор-функції, а всі інші фігурують в ній як константи-функціонали у коефіцієнтах і вільних членах рівнянь та граничних умов. Так, напр., k-а задача формулюється відносно аргументної вектор-функція $\bar{X}_k$, а вектор - функції $\bar{X}_1,\ldots,\bar{X}_{k-1},\bar{X}_{k+1},\ldots,\bar{X}_N$ містяться в ній у вигляді констант. В свою чергу, кожна аргументна вектор-функція в одній задачі є шуканою, а в усіх інших в перетвореному вигляді входить в їх коефіцієнти. Таким чином, одновимірні задачі в (8),(9), є пов'язаними і утворюють єдину систему, з якої всі N аргументних вектор-функцій можуть бути знайдені без будь-яких додаткових припущень.

Характерною ознакою методу є те, що в ньому кількість невідомих аргументних вектор-функцій $\bar{X}_n$ і кількість задач в системі (8),(9) дорівнюють кількості незалежних змінних області $x_n (n=\overline{1,N})$. Саме ця особливість пояснює назву методу - метод повних систем.

Для розв'язання системи (8),(9) використовується ітераційний метод типу Гауса-Зейделя. Він базується на послідовному розв'язанні кожної окремої задачі з (8),(9) незалежно від решти в припущенні, що аргументні функції інших змінних відомі. При цьому вважається, що розв'язування окремої одновимірної лінійної крайової задачі є елементарною операцією.

Функції початкового наближення $X^{0}_{ni}(x_n)$ $(i=\overline{1,I})$ по кожній з змінних області повинні бути лінійно незалежними. Умовою закінчення ітераційного процесу є співпадання у вибраній нормі шуканих аргументних функцій, що одержані на двох його послідовних циклах.

Знаходження остаточного розв'язку задачі- $u(x_1,...,x_N)$- пов'язано з збіжністю шуканої функції (7) в залежності від кількості членів апроксимації I.

Таким чином, загальна схема побудови МПС стосовно до задач в диференційній постановці включає слідуючі етапи:

1.Прийняття апроксимації, що містить,як шукані,аргументні функції всіх N змінних.

2.Побудова розв'язуючої системи, що є системою N взаємозв'язаних одновимірних задач відносно N шуканих аргументних вектор-функцій.

3.Знаходження аргументних функцій ітераційним способом з розв'язуючої системи МПС.

4.Побудова остаточного розв'язку задачі відповідно до прийнятої апроксимації (7).

На основі вихідних положень методу повних систем розроблені такі варіанти:

- п р я м і,в яких аргументні функції з усіх членів апроксимації (7) знаходяться одночасно;

- р е к у р е н т н і, в яких аргументні функції знаходяться послідовно для кожного члена апроксимації окремо з врахуванням всіх вже знайдених; в цих варіантах розв'язок задачі u знаходиться в результаті ітераційного процесу, на j-ому циклі якого приймається:

$$u_j=v_j+v_{j-1}, \qquad j=1,2,\ldots$$

де $v_j=X_{1j}(x_1)X_{2j}(x_2)\ldots X_{Nj}(x_N)$ – шукана одночленна добавка, а функція

$$v_{j-1}=\sum_{m=1}^{j-1} X_{1m}(x_1)X_{2m}(x_2)\ldots X_{Nm}(x_N)$$

відома з попередніх (j-1)-го циклів ($v_0=0$).

- л о к а л ь н о - в и з н а ч е н і, в яких шуканий розв'язок апроксимується різними виразами для ряду підобластей, що вкривають задану область ($\cup V_k=V, k=\overline{1,K}$):

$$u(x_1,x_2,\ldots,x_N)=\begin{cases} u_k(x_1,\ldots,x_N), & x\in V_k,\\ 0, & x\bar{\in} V_k.\end{cases}$$

Для кожного з цих варіантів в залежності від вибраної процедури зведення $P=\{P_n, n=\overline{1,N}\}$ побудовані ще два варіанти:

- і н т е г р а л ь н и й, коли процедурою зведення є операція інтегрування –

$$P_n=\{P_{nk}(.)=\int_{x_{1o}}^{x_{11}}\ldots\int_{x_{jo}}^{x_{j1}}\ldots\int_{x_{No}}^{x_{N1}}(.)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{N} X_{jk}dx_j,\ k=\overline{1,I}\}; \qquad (10)$$

- к о л о к а ц і й н и й, коли процедурою зведення є операція співпадання на сукупності N сімейств ліній:

$$P_n=\{P_{nk}(.)=(.)\Big|_{R_{nk}}, k=\overline{1,I}\},\ R_{nk}=\begin{cases} x_1=x_{1k}\\ \cdots\cdots\cdots\\ x_{n-1}=x_{n-1k}\\ x_{n+1}=x_{n+1k}\\ \cdots\cdots\cdots\\ x_N=x_{Nk}\end{cases}. \qquad (11)$$

Прямі варіанти МПЮ в порівнянні з рекурентними дають краще наближення до шуканого розв'язку. Рекурентні варіанти відзначаються простотою і мінімальними витратами часу при практичних розрахунках. Локально- визначені МПЮ доцільно використовувати в задачах, що мають нерегулярний розв'язок. Колокаційні варіанти кожної групи простіші при реалізації, ніж інтегральні.

Розв'язання багатовимірних граничних задач в неканонічних областях опуклої форми в інтегральних варіантах МПЮ базується на модифікації процедури зведення (10). В ній, по-перше, границі інтегрування приймаються змінними відповідно до заданої області і, по-друге, проводиться заміна виразів, що утворилися в результаті інтегрування по частинам, заданими граничними співвідношеннями.

У випадку областей довільного виду доцільно застосовувати локально-визначені варіанти МПС, розбивши попередньо область на опуклі підобласті. Можна також використати відомі добре відпрацьовані прийоми врахування конфігурації області, зокрема, метод фіктивних областей, попередньої параметризації, структурний метод R-функцій В.Л.Рвачова.

Розв'язання варіаційних задач в областях з декількома змінними основано на тих самих вихідних положеннях, що і диференційних задач: включення в апроксимацію як невідомих аргументних функцій всіх N змінних і побудова розв'язуючої системи відносно цих функцій. Однак, побудова останньої не потребує в цьому випадку прийняття тієї чи іншої процедури зведення і провадиться автоматично на основі стандартної техніки варіаційного обчислення. Крім того, для її розв'язання можуть бути також використані прямі методи варіаційного обчислення.

Метод повних систем в порівнянні з спорідненими йому методами розв'язання багатовимірних задач характеризується слідуючими відмінностями:

- він не зв'язаний з довільним вибором координатних функцій на відміну від проекційних методів;
- рівнозначно враховує інформацію по всім змінним області на відміну від методів зведення до звичайних диференціальних рівнянь;
- не передбачає побудови власних функцій , що само по собі може виявитися складною задачею;

МПС можна розглядати як узагальнення таких підходів:

- проекційних методів зведення до звичайних диференційних рівнянь, коли таке зведення провадиться не по якійсь одній, а по всім змінним області;
- метода подвійної апроксимації типу Вайндінера-Леонтьєва, коли в апроксимаційний вираз входять лише шукані функції різних змінних і не використовується довільно вибраний базис;
- методу варіаційних ітерацій для будь-якого числа незалежних змінних (N>2).

На основі розробленого методу в третьому розділі будуються методики розв'язання нелінійних граничних задач і задач на власні значення з декількома незалежними змінними.

Для розв'язання багатовимірних нелінійних задач виду

$$Du=Lu-f(x_1,x_2,\ldots,u,u,_{x_1},\ldots)=0, \qquad x \in V, \qquad (12)$$

$$du=Ru-\varphi(x_1,x_2,\ldots,u,\ldots)=0\ , \qquad x \in S \qquad (13)$$

в області опуклості оператора задачі використовується лінеарізація по Ньютону-Канторовичу в поєднанні з прямими варіантами МПС.

Застосування методу Ньютона-Канторовича до задачі (12), (13) зводить її до послідовності лінійних граничних задач тієї ж розмірності, що й вихідна:

$$\hat{D}u^s=Lu^s-f(x_1,\ldots,u^{s-1},u^{s-1}_{,x_1},\ldots)-f,_u(\ldots)(u^s-u^{s-1})-$$

$$-\sum_{k=1}^{N} f,_{x_k}(\ldots)(u^s_{,x_k}-u^{s-1}_{,x_k})-\ldots=0\ , \quad x\in V, \qquad (14)$$

$$\hat{d}u^s=Ru^s-\varphi(x_j,u^{s-1},\ldots)-\varphi,_u(\ldots)(u^s-u^{s-1})-\ldots=0, x\in S \qquad (15)$$

$$s=1,2,\ldots.$$

(знаком "^" помічені відповідні лінеарізовані вирази, кома означає частинну похідну по вказанному аргументу: $\varphi,_u=\partial\varphi/\partial u$).

Використовуючи далі прямі варіанти МПС для розв'язання кожної з задач (14),(15) з апроксимацією

$$u^s(x_1,x_2,\ldots,x_N)\approx\overset{*}{u}{}^s_I=\sum_{i=1}^{I} X^s_{1i}(x_1)X^s_{2i}(x_2)\ldots X^s_{Ni}(x_N), \qquad (16)$$

($X^s_n=\{X^s_{ni}(x_n),i=\overline{1,I}\}$ $(n=\overline{1,N})$– невідомі аргументні вектор-функції s-ої лінійної задачі) і процедурою зведення $P^s=\{P^s_n,n=\overline{1,N}\}$ приходимо до системи виду:

$$P^s_n[\hat{D}\overset{*}{u}{}^s_I]=L^{s-1}_n\ \overline{X}^s_n+\overline{f}^{s-1}_n=0\ , \qquad x_n\in(x_{no},x_{n1}), \qquad (17)$$

$$P^s_n[\hat{d}\overset{*}{u}{}^s_I]=R^{s-1}_{np}\ \overline{X}^s_n+\overline{\varphi}^{s-1}_{np}=0, \qquad x_n=x_{np}\quad (p=0,1), \qquad (18)$$

$$n=\overline{1,N}.$$

Особливістю одновимірних диференційних виразів в (17),(18) по змінній x_n є те, що вони залежать від усіх N аргументних вектор-функцій на (s-1)-ому кроці лініаризації ($\overline{X}^{s-1}_j,j=\overline{1,N}$)

і від (N-I)-ї аргументної вектор-функції на s-ому ($\bar{X}_j^s$, $j=\overline{1,N}$; $j\neq n$).

Враховуючи те, що система (I7),(I8) при кожному фіксованому s розв'язується ітераційно, знаходження остаточного розв'язку пов'язане з двома ітераційними процесами: лінеарізацією за Ньютоном-Канторовичем та розв'язуванням системи одновимірних задач за методом типу Гауса-Зейделя. В данному випадку можна побудувати загальний ітераційний процес для рішення нелінійної задачі (I2),(I3) в цілому, що одночасно реалізує згадану лінеарізацію та розв'язування лінійної задачі МПС. Він здійснюється за схемою (параметр m):

$$\overset{m-1}{L}_n \overset{m}{\bar{X}}_n + \overset{m-1}{\bar{f}}_n = 0\,, \quad x_n \in (x_{n0}, x_{n1}), \tag{I9}$$

$$\overset{m-1}{R}_{np} \overset{m}{\bar{X}}_n + \overset{m-1}{\bar{\varphi}}_{np} = 0, \quad x_n = x_{np} \quad (p=0,1), \tag{20}$$

$$n=\overline{1,N};\quad m=1,2,\ldots.$$

Методика розв'язування багатовимірних задач на власні значення опирається на метод послідовних наближень в варіанті оберненої ітерації з побудовою відношення Релея та метод повних систем, що використовується для розв'язання багатовимірних неоднорідних граничних задач. Аналогічно тому, як це зроблено в попередній методиці, пропонується загальний ітераційний процес, що одночасно реалізує послідовні наближення по побудові неоднорідних граничних задач без параметра та їх розв'язок по МПС.

Побудова загального ітераційного процесу в обох методиках дає можливість в декілька разів знизити витрати в часі при розв'язанні вказаних багатовимірних задач.

Розроблений метод повних систем розв'язання лінійних граничних задач з декількома незалежними змінними та побудовані на його основі методики для нелінійних задач та задач на власні значення становлять математичний апарат єдиного підходу, що використовується надалі для дослідження напружено-здеформованого стану та стаціонарних коливань неоднорідних анізотропних просторових тіл та оболонкових елементів.

В четвертому розділі наводиться техніка застосування розробленого підходу на прикладах деяких характерних задач теорії пружності та теорії оболонок, що в загальному вигляді сформульовані в розділі I. Вибрані для цієї мети задачі висвітлюють найбільш істотні сторони підходу, лишаючись разом з тим достатньо простими, щоб не обтяжувати виклад другорядними ускладненнями. Алгоритмізація розробленного підходу ілюструється на задачі статики, задачі про вільні та вимушені стаціонарні коливання прямокутної пластини, задачі середнього прогину пологих оболонок в докритичній стадії деформування та варіаційній задачі про рівновагу прямокутного паралелепіпеду з анізотропного матеріалу.

В п'ятому розділі роботи обговорюється обгрунтування методу повних систем та побудованих на його основі методик в класі консервативних стаціонарних задач теорії пружності та теорії оболонок.

Виходячи з загальної характеристики МПС, центральними в обговоренні є два питання:збіжність ітераційного процесу рішення розв'язуючої системи одновимірних задач по знаходженню аргументних функцій та збіжність шуканого розв'язку задачі при збільшенні числа членів прийнятої апроксимації.

Практичне дослідження методу і побудованих методик проводиться на основі індуктивних прийомів.. При цьому тестові приклади охоплюють задачі статики в лінійній та нелінійній постановках, задачі про коливання, тривимірні задачі для просторових тіл та двовимірні задачі для оболонкових систем, задачі з різними граничними умовами, задачі для елементів з неперервною та дискретною неоднорідністю, задачі з складним розподілом навантаження всередині області та на її границі.

Правомірність застосування МПС в тривимірних задачах ілюструється двома прикладами.

В першому розглядається модельна просторова задача статики для прямокутного паралелепіпеду при спеціальних умовах на обмежуючих гранях і такому законі розподілу об'ємних сил, що допускають одержання точного аналітичного розв'язку в тригонометричних функціях. Амплітудні значення переміщень та їх розподіл, що отримані по прямому інтегральному варіанту МПС, співпадають з точним розв'язком у п'ятьох значущих цифрах.

У другому прикладі для такого ж самого ізотропного паралелепіпеду розглядається задача статики (М.М. Філоненко-

Бородич), коли на двох протилежних гранях (z=const) діють рівні нормальні сили колоколовидної форми ,а решта - вільна від навантажень. За критерій точності розрахунку у відповідності з принципом Сен-Венана обране відхилення розподілу напружень в центральному перерізі z=0 від рівномірного $\sigma_z=1$. Деякі результати розрахунків наведені в таблиці, де містяться також для співставлення результати по іншим методикам: 1- апроксимація розв'язку cos- біномами (М.М. Філоненко-Бородич); 2- метод подвійної апроксимації типу Вайндінера- Леонтьєва (Л.Є.Мальцев, М.П.Матвєєв, М.П.Нетребко); 3- варіаційно-різницевий метод з ітераційним розв'язанням системи алгебраїчних рівнянь (Б.Є. Побєдря, С.В. Шешенін); 4- прямий варіаційний варіант МПС.

x/a;y/a	0;0	0;0,5	0;1	0,5;0,5	0,5;1	1;1	$\overline{\sigma_z-1}$,%
I	1,47	1,10	0,97	1,07	1,12	0	30
2	1,10	1,036	0,89	1,03	0,94	0,90	7
3	1,10	1,047	1,01	1,00	0,96	0,92	4,7
4	1,04	1,02	0,999	0,996	0,98	0,973	2

Як бачимо, найменьше середнє відхилення розподілу нормальних напружень від рівномірного(2%) має місце при розрахунку по МПС.

Можливості МПС щодо врахування різних типів граничних умов оцінюються на задачі згину прямокутної пластини при різних варіантах закріплення її контуру, плоскій задачі для прямокутної призми при кінематичних обмеженнях на двох протилежних сторонах і вільних двох інших, задачі статики для порожнистого циліндра при обмеженні на осьові зміщення та вільних бокових поверхнях та ін..Тут МПС застосовується в прямому та рекурентному інтегральних варіантах. Проводиться порівняння з результатами, що одержані в роботах Д.В. Вайнберга, С.П.Тимошенка, І.К.Сенченкова, A. Leissa . В усіх розглянутих прикладах розбіжність результатів не перевищує 5%.

Правомірність МПС в розрахунках неоднорідних пружних елементів подана в роботі задачею про напружено-деформований стан шаруватого порожнистого циліндру з різними пружними властивостями матеріалу шарів (дискретна неоднорідність) та задачі згину прямокутної пластини з змінною у обох координатних напрямках жорсткістю (неперервна неоднорідність). Результати по МПС співставляються з розв'язками, що одержані при застосуванні методів відокремлення змінних та Канторовича-Власова в поєднанні з чисельним розв'язуванням одновимірних задач. Відмічено, що для досягнення однакової точності в МПС потрібно значно менше членів апроксимації (наприклад, МПС-один,методом Канторовича-Власова - чотири).

Перевірка можливості використання розробленої методики розв'язання багатовимірних нелінійних граничних задач на основі МПС та лінеарізації по Ньютону-Канторовичу проводилась на двовимірних геометрично нелінійних задачах середнього згину гнучких прямокутних в плані пологих панелей та пластин в докритичній стадії деформування. Основна увага при цьому приділялася правомірності застосування загального ітераційного процесу ,що поєднує лінеарізацію та розв'язок лінійних задач по МПС. Конкретні приклади і їх розв'язки запозичені з робіт Д.В.Вайнберга та М.С.Корнішина.

Дослідження методики проводилося для різних типів граничних умов (жорсткого закріплення, шарнірного опирання, нерухомого шарніру), різних величин інтенсивності навантаження (аж до значень, близьких до критичних), при різному розподілі навантаження та різних кривинах пологих панелей. Проведені розрахунки показали спроможність запропонованого загального ітераційного процесу розв'язання задачі в цілому та ефективність поєднання лінеарізації і розв'язання лінійної задачі,про що свідчать наведені дані про витрати часу.

Тестування запропонованої методики розв'язання багатовимірних задач на власні значення проводиться на прикладах визначення динамічних характеристик вільних коливань просторових тіл та оболонкових елементів. Проведені розрахунки об'єднані в три групи: для пружних елементів в просторовій постановці, для згинних та планарних коливань пластин по моделі Кірхгофа-Лява, для елементів з анізотропними властивостями матеріалу.

Перша група розрахунків представлена задачами про мінімальні частоти таких тіл: ізотропного куба з граничними умовами типу "ковзання", що має точний аналітичний розв'язок;

пластини в просторовій постановці при умовах "ковзання" в її площині і вільних лицевих поверхнях, наближений аналітичний розв'язок якої знайдений П.А.Жиліним та Т.П.Іллічьовою;
пластин та циліндричних оболонок в просторовій постановці при інших граничних умовах, що мають наближений розв'язок в рамках класичної моделі оболонок.

З розрахунків другої групи наведені задачі про згинні коливання квадратної пластинки при різних комбінаціях вільних сторін та сторін з жорстким закріпленням і шарнірним опиранням, симетричні та несиметричні коливання зсуву квадратної пластини з вільною поверхнею (моди Ляме), симетричні плоскі коливання прямокутної пластинки. Результати порівнюються з розрахунками Д.В.Вайнберга, аналітичним розв'язком та розв'язками, що одержані методом скінчених елементів.

Розрахунки третьої групи подані задачами про мінімальні частоти ортотропної пластинки з двома суміжними жорстко закріпленими краями і рештою вільними, коли осі пружності утворюють з геометричними осями кут $\pi/4$ ($3\pi/4$), та шаруватої циліндричної оболонки з ортотропними шарами при умовах "ковзання" торців. Проводиться співставлення з результатами, що одержані для пластинки методом скінчених елементів та для циліндричної оболонки методом відокремлення змінних.

Наведені приклади по дослідженню властивостей МПС дозволяють сформулювати такі висновки.

В класі скалярних та векторних стаціонарних задач механіки здеформованого тіла МПС забезпечує знаходження наближеного розв'язку з контрольованою похибкою.

При фіксованому числі членів апроксимації ітераційний процес рішення розв'язуючої системи одновимірних задач по знаходженню аргументних функцій збігається і, причому швидкість збіжності практично не залежить від вибору початкового наближення.

Збіжність наближеного розв'язку задачі, побудованого по аргументним функціям, до точного має місце при невеликій кількості членів апроксимації. Це справедливо як для лінійних, так і для нелінійних граничних задач та задач на власні значення. Так, в ряді випадків можна обмежитися одним членом апроксимації, як правило, двома, і досить рідко в практичних розрахунках треба утримувати три і більше членів. Це сприяє значній економії часу і пам'яті ЕОМ (наприклад,потреби в машинному часі при розв'язку просторової задачі про власні коливання прямокутного паралелепіпеду при складних граничних умовах не перевищували 3 хвилин на ПОМ PC/AT-386).

Достатньо висока точність результатів при малому числі членів апроксимації є характерною відзнакою МПС в порівнянні із спорідненими йому методами.

Звичайно, що точність остаточного розв'язку по МПС залежить від точності чисельного розв'язку одновимірної задачі - процедури, що в данному методі вважається елементарною.

В шостому розділі обговорюються результати розв'язку ряду нових задач теорії пружності та теорії оболонок по дослідженню статичного та динамічного деформування просторових тіл та тонкостінних елементів в залежності від їх геометричних та механічних характеристик.

Аналіз розв'язків більшості задач з перших трьох параграфів проведено на єдиній основі, а саме з позиції зв'язку досліджуваних залежностей з характером симетрії задачі в цілому, яка визначається сукупністю всіх факторів постановки - геометрією області, умовами на границі, фізичними властивостями матеріалу, розміщенням додаткових мас, жорсткостей та ін. В наступному четвертому параграфі проводиться дослідження просторового напружено-здеформованого стану ізотропного прямокутного паралелепіпеду з коефіцієнтом Пуассона, близьким до його граничного значення $\nu=0,5$, так що побудова розв'язку пов'язана тут з складністю граничного переходу при чисельній реалізації. Задачі п'ятого параграфу відповідають традиційній цілі - оцінці границь застосування різних спрощених моделей теорії пружності.

В першому параграфі розділу розглядаються вільні коливання анізотропної плити з однією площиною пружньої симетрії, яка виникає з-за неспівпадання головних напрямків пружності ортотропного матеріалу з напрямками осей геометричної системи координат. Така конструктивна анізотропія кількісно характеризується величиною кута ϕ між вказаними напрямками, так що динамічні характеристики плити розглядаються як функції неперервного аргументу ϕ, при зміні якого в межах $[0,2\pi]$ три площини пружньої симетрії переходять в одну і навпаки.

Приймається, що плита має сталу товщину ($h/L=0,1$) і є тривимірним тілом з однорідного однонаправленого вуглепластикового композиту з такими технічними характеристиками:

$$E_1=2,11*10^{11}Н/м^2;\ E_2=E_3=0,053*10^{11}Н/м^2;\quad \nu=0,25;$$

$$G_{12}=G_{13}=0,026*10^{11}Н/м^2;\ G_{23}=0,013*10^{11}Н/м^2;\ \rho=1524кг/м^3.$$

Метою дослідження було встановлення залежності нижчої частоти переважно згинних та переважно планарних коливань плити від параметра анізотропії ϕ при різних умовах закріплення її бічних граней та оцінка впливу на цю залежність взаємозв'язку деформацій розтягу-стиску та зсуву (так званих "побічних" жорсткостей).

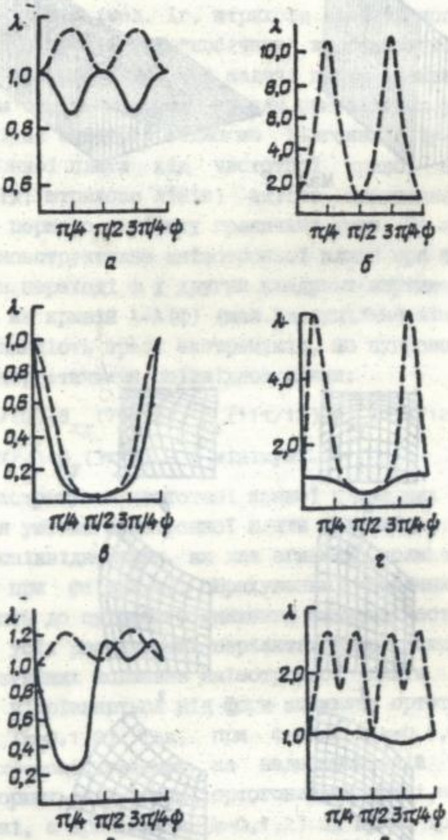
Були одержані залежності власних частот та відповідних їм форм коливань плити від величини кута ϕ для трьох варіантів її закріплення. Відповідні криві подані на мал.I, де по осі ординат відкладені значення $\lambda=\omega^2_{min}(\phi)/\omega^2_{min}(0)$. Штрихові лінії стосуються випадку умовної ортотропії, коли значеннями "побічних" жорсткостей знехтувано. Форми коливань зображені на мал.2 і мал.3.

Одночасно обчислювалися відносні величини складових потенційної енергії, що відповідають об'ємним деформаціям по координатним напрямкам x,y,z (β_x,β_y,β_z) та деформаціям формозмінення в площинах x=const, y=const, z=const (β_{yz}, β_{xz}, β_{xy}) з нормуванням $\beta_x+\beta_y+\beta_z+\beta_{xy}+\beta_{xz}+\beta_{yz}=1$

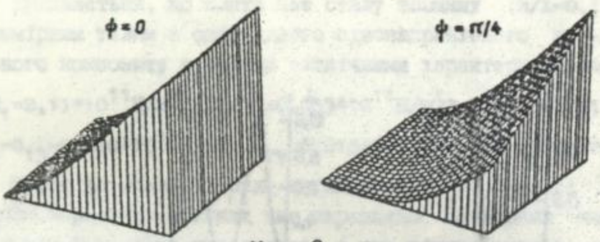
В першому варіанті розглядалися умови жорсткого закріплення всіх чотирьох бічних граней плити, що відповідає симетрії області і граничних умов відносно центральних осей, паралельних координатним, та обох діагоналей плити в плані. В цьому варіанті задача має симетрію при двох значеннях кута $\phi=-\pi/4$ та $\phi=3\pi/4$, а частотна крива $\lambda=\lambda(\phi)$ має екстремуми, що супроводжується рівністю складових потенційної енергії по симетричним для цього варіанту напрямкам:

$\beta_x(\pi/4+k\pi/2)=\beta_y(\pi/4+k\pi/2),\beta_{xz}(\pi/4+k\pi/2)=\beta_{yz}(\pi/4+k\pi/2)(k=0,1)$ (мал.Iа (згинніколивання) та мал.Iб (планарні коливання)).

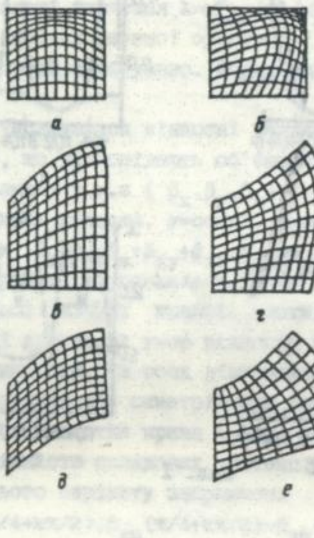
У другому варіанті розглядаються коливання консольної плити (закріплення на грані x=const). При планарних коливаннях потенційна енергія розподілилася між енергією зміни об'єму $\beta_x(\phi)$ і енергією формозмінення $\beta_{xy}(\phi)$. Відмітимо, що


λ
1,0
0,8
0,6
π/4 π/2 3π/4 φ
а
λ
10,0
8,0
6,0
4,0
2,0
π/4 π/2 3π/4 φ
б
λ
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
π/4 π/2 3π/4 φ
в
λ
4,0
2,0
π/4 π/2 3π/4 φ
г
λ
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
π/4 π/2 3π/4 φ
д
λ
2,0
1,0
π/4 π/2 3π/4 φ
е

Мал. I



Мал. 2



Мал. 3

для умовно ортотропної плити в точці $\phi=\pi/8$ має місце рівність $\beta_x=\beta_{xy}$, яку можна вважати проявом "внутрішньої" симетрії задачі. Цьому значенню ϕ відповідає максимум на частотній кривій (мал. Іг, штрихова лінія), чого не спостерігається при врахуванні "побічних" жорсткостей.

В третьому варіанті задачі плита вважається закріпленою по двом суміжним бічним граням при вільних всіх інших, що відповідає симетрії відносно діагоналі ($y=x$). Для умовно ортотропної плити хід частотної кривої згинних коливань (мал. Ід, штрихова лінія) якісно співпадає з відповідною кривою першого варіанту граничних умов. Це ж саме має місце і для конструктивно анізотропної плити при зміні $\phi \in [0,\pi/2]$. Але при переході ϕ у другий квадрант картина суттєво змінюється: на кривій $\lambda=\lambda(\phi)$ (мал.2д,суцільна лінія) можна відмітити наявність трьох екстремумів, що супроводжуються слідуючими енергетичними співвідношеннями:

$\beta_x(7\pi/12)=\beta_{xy}(7\pi/12)$, $\beta_y(11\pi/12)=\beta_{xy}(11\pi/12)$ – в максимумах,
$\beta_x(3\pi/4)=\beta_y(3\pi/4)$ – в мінімумі.

Екстремумам частотної кривої планарних коливань (мал. 2е) для умовно ортотропної плити відповідають такі ж енергетичні співвідношення, як для згинних коливань анізотропної плити при $\phi\in[\pi/2,\pi]$. Врахування "побічних" жорсткостей приводить до суттєвого зниження значень частот.

В усіх розглянутих варіантах закріплення бічних граней форми згинних коливань анізотропної плити ($\phi\neq k\pi/2, k=0,1,2$) якісно відрізняються від форм коливань ортотропної плити при $\phi=k\pi/2$ ($k=0,1,2$). Так, при $\phi=k\pi/2$ ($k=0,1,2$) ортогональні прямі $x=const$, $y=const$ на недеформованій площині $z=const$ перетворюються в плоскі ортогональні криві на здеформованій поверхні, а при $\phi\neq k\pi/2$ ($k=0,1,2$) ці прямі трансформуються в неортогональні просторові криві (див.,напр., мал.2, де зображений характер нормованих зміщень $u_z(x,y)$ площини $z=0$ консольно закріпленої плити при $\phi=0$ і $\phi=\pi/4$).

Аналогічні якісні зміни в формах мають місце і для переважно планарних коливань при всіх типах граничних умов (див мал.3).

На основі проведеного аналізу показано:

I.Наявність екстремумів на кривій $\lambda=\lambda(\phi)$, їх кількість та місцезнаходження пов'язані з симетрією плити в цілому і супроводжуються рівністю окремих складових потенційної енергії β_i, β_{ik}; рівності типу $\beta_i=\beta_k$ та $\beta_{ij}=\beta_{km}$ відповідають геометричним симетріям області з врахуванням граничних умов, рівності типу $\beta_i=\beta_{km}$ відповідають неявній "внутрішній" симетрії структури.

2.Нехтування "побічними" жорсткостями приводить, як правило, до підвищення частот, причому досить значному (біля порядку) для планарних коливань при умовах жорсткого закріплення.

3.Значення окремих складових потенційної енергії дозволяють судити про можливість проведення розрахунків на основі прикладних варіантів теорію пластин.

Другий параграф розділу містить дослідження динамічних характеристик тонкостінних елементів при наявності різного роду дискретних включень.

Так, на прикладі квадратної ізотропної пластинки з різними умовами закріплення контуру аналізуються її нижчі частоти в залежності від величини, місцязнаходження та міри локалізації додаткової інерційної маси, що розташована на частині поверхні пластини. Показано, що положенням симетрії системи "пластина-маса" в цілому відповідають екстремальні значення власних частот. При певних граничних умовах, напр., консольному закріпленні ,при закріпленні двох суміжних сторрін і решті вільних, для величини додаткової маси порядку 20% маси пластини параметр мінімальної частоти може знизитися в два-три раза в залежності від розташування інерційної маси.

На прикладі консольної квадратної в плані циліндричної панелі з закріпленим дуговим краєм і відповідної пластинки досліджується вплив наявності пружних опор, їх жорсткості, кількості та розташування на нижчі частоти та форми коливань. Показано, що при певних значеннях жорсткості опор на мінімальній частоті елемента може спостерігатися зміна форми коливань. Для пластини і оболонки така зміна має місце при різній кількості і розташуванні опор.

В третьому параграфі розглядається середній прогин оболонкових елементів в докритичній стадії деформування. Аналіз залежності "навантаження- прогин" провадиться на прикладі пологих квадратних в плані панелей різної гаусової кривини при комбінації умов жорсткого закріплення та шарнірного опирання на контурі. Показано, що для оболонок нульової кривини характер цієї залежності ("опуклість догори" або "опуклість донизу") може змінюватися з зміною граничних умов, чого не спостерігається для оболонок ненульової кривини.

На прикладі рівномірно навантаженої сферичної жорстко закріпленої по всьому контуру панелі досліджується вплив її відносних розмірів при сталій площі в плані на величину критичного навантаження. Одержана крива є немонотонною з мінімумом для квадратної в плані панелі. Для панелі з двома жорстко закріпленими протилежними краями і двома іншими шарнірно опертими відповідна крива в цій точці екстремуму не має в силу відсутності при таких граничних умовах симетрії системи в цілому.

Четвертий параграф розділу містить дослідження напружено-деформованого стану прямокутного паралелепіпеду з гумоподібного матеріалу при кінематичних обмеженнях на двох протилежних гранях (z=const) і вільних всіх інших.

Труднощі обчислювального характеру при розв'язанні задачі пов'язані з її високою розмірністю, нетривіальністю граничних умов, близкістю коефіцієнта Пуасона в слабостискуваних ізотропних матеріалах до його граничного значення ν=0,5, а також можливою значною нерівномірністю напружень в площинах z=const при малих розмірах паралелепіпеду в напрямку стискання.

В прикладному відношенні інтерес до задачі зумовлений широким застосуванням гумоподібних матеріалів як амортизаторів в пристроях різного призначення і необхідністю визначення в зв'язку з цим їх важливої експлуатаційної характеристики - коефіцієнта статичної жорсткості β.

На основі одержаного розв'язку задачі обчислювався коефіцієнт жорсткості в широкому діапазоні відносних розмірів паралелепіпеда і оцінювалися границі застосування двовимірних моделей плоскої деформації та плоского напруженого стану при розрахунку цього коефіцієнту.

Показано, що метод повних систем дозволяє проводити стійки розрахунки для матеріалів з коефіцієнтом Пуасона ν=0,499, що досить близько до граничного його значення в ізотропному випадку; для "високих" паралелепіпедів ($h/a \geq 1$) напружений стан в площинах, ортогональних напрямку стискання практично однорідний ($\beta \approx I$), для "низьких" ($h/a \leq 0,2$) з зменшенням відносної товщини характеристика неоднорідності зростає експоненційно; використання моделі плоскої задачі (плоскої деформації та плоского напруженого стану) дає верхню та нижню оцінку значенню коефіцієнта статичної жорсткості: по одержаним даним можна визначити область використання цих моделей в залежності від відносної висоти амортизатора та допустимої похибки розрахунку.

В останньому параграфі розділу розрахунок напружено-деформованого стану да динамічних характеристик цього ж паралелепіпеду в просторовій постановці приймається за основу для оцінки області використання двох наближених моделей: моделі Кірхгофа-Лява в задачах статики та вільних коливань плит середньої товщини при різних умовах на бічній поверхні та модифікованої моделі плоскої задачі, що запропонована І.К. Сенченковим в [22] для розрахунку власних частот пластинчатих тіл.

В першій задачі для граничних умов жерсткого закріплення, консольного закріплення та шарнірного опирання ізотропної плити в залежності від її відносної товщини $\delta=h/a$ одержано кількісні оцінки границь застосування класичної моделі. Показано, що її можливості значно ширші при умовах консольного закріплення, ніж жерсткого закріплення по всім бічним граням (при допустимій похибці обчислення максимального прогину в 10% консольні плити можна розраховувати до товщин $\delta=0,5$, а з жорстким закріпленням контуру - до $\delta=0,2$).

У другій задачі розглянуто результати розрахунків власних частот планарних коливань пластинчатих тіл по стандартній та модифікованій [22] моделям плоскої задачі. Показано, що для похибок, що допускаються умовами експлуатації пластин при зварці ультразвуком, модифікована модель дозволяє провадити розрахунки для вдвоє більших товщин пластин, ніж стандартна.

В заключній частині дисертації сформульовано підсумкові висновки.

В дисертації розроблено єдиний підхід до розв'язання задач теорії пружності та теорії оболонок для неоднорідних анізотропних тіл скінчених розмірів, що включає метод розв'язування багатовимірних лінійних граничних задач та побудовані на його основі методики розв'язання нелінійних задач та задач на власні значення; підхід використано для розв'язання задач статики, вільних та вимушених усталених гармонічних коливань просторових тіл у формі прямокутного паралелепіпеду та порожнистого шаруватого циліндру, а також гнучких пластин та оболонок у докритичній стадії деформування; досліджено вплив на напружено- деформований стан та динамічні характеристики конкретних пружних елементів зміни їх геометричних та фізичних параметрів, умов на обмежуючих поверхнях, наявності різного роду локалізованих включень; розв'язані задачі, що мають теоретичне та прикладне значення.

Одержані при цьому основні наукові результати полягають у тому,що:

I. Розроблено метод (метод повних систем) розв'язання багатовимірних лінійних граничних задач теорії пружності та теорії оболонок для неоднорідних анізотропних тіл та тонкостінних елементів, що базується на розвитку проекційних методів зведення до звичайних диференційних рівнянь; метод грунтується на редукції вихідної N-вимірної задачі до системи N взаємопов'язаних одновимірних задач, для розв'язання якої використовується ітераційний спосіб типу Гауса-Зейделя в припущенні, що чисельне розв'язання одновимірної лінійної граничної задачі проблеми не складає; метод не зв'язаний з довільним вибором координатних функцій на відміну від проекційних та варіаційних підходів, рівнозначно враховує всі незалежні змінні області на відміну від методів зведення типу Канторовича-Власова і не передбачає попереднього знаходження власних функцій, що може виявитися в загальному випадку складною самостійною задачею; побудовані різні варіанти методу (прямі, рекурентні, локально-визначені, інтегральні, колокаційні), що відрізняються зручністю реалізації в конкретних класах задач; метод характеризується лінійною залежністю витрат ЕОМ з ростом числа незалежних змінних області при збереженні достатньої точністі результатів.

2.Побудовано нову методику розв'язання нелінійних граничних задач з декількома назалежними змінними, що грунтується на поєднанні методу повних систем з лініарізацією по

Ньютону-Канторовичу; запропоновано загальний ітераційний процес, що одночасно реалізує лінеарізацію та розв'язування багатовимірних лінійних граничних задач.

3.Запропоновано нову методику розв'язування багатовимірних задач на власні значення, що грунтується на поєднанні методів повних систем та послідовних наближень з побудовою загального ітераційного процесу розв'язування задачі в цілому. Вказане поєднання ітераційних процесів в обох методиках істотньо (у декілька разів) зменшує витрати часу на розв'язання відповідних задач.

4.Розроблений підхід використано для розв'язання таких класів стаціонарних задач теорії пружності та оболонок:тривимірних задач статики, задач про вільні та вимушені усталені гармонійні коливання для анізотропних неоднорідних тіл скінчених розмірів при довільних умовах на обмежуючих поверхнях; двовимірних задач середнього прогину гнучких оболонок та коливань вільних та статично навантажених тонкостінних елементів.

5.Проведено практичне обгрунтування розробленого методу та побудованих на його основі методик в класі сформульованих задач теорії пружності та теорії оболонок. При цьому показано: збіжність ітераційного процесу рішення розв'язуючої системи метода, швидкість якого практично не залежить від вибору початкового наближення; збіжність загального процесу розв'язання нелінійних задач в області опуклості вихідного оператора та задач на власні значення при початковому наближенні загального виду; достатність малої кількості членнів апроксимації (одного-трьох) для одержання результатів з досить високою точністю.

6.На основі розробленого підходу розв'язано задачі статики та коливань (вільних та вимушених гармонійних) для прямокутного паралелепіпеду з анізотропного матеріалу з однією площиною пружної симетрії, порожнистого шаруватого циліндру з ортотропними шарами, що працюють сумісно, пологих прямокутних в плані оболонок та пластин з неоднорідностями типу локалізованих включень.

7.Проведено аналіз статичного та динамічного деформування просторових тіл та оболонкових елементів в залежності від зміни їх геометричних та фізичних параметрів.Досліджено:

- динамічні характеристики товстої анізотропної плити при різних умовах на бічній поверхні в залежності від кута між головними осями пружності ортотропного матеріалу та геометричними осями плити; показано, що отримані залежності є немонотонними , суттєво різними для різних граничних умов, а їх екстремальні точки відповідають положенням симетрії плити в цілому,тобто симетрії геометрії з врахуванням граничних умов та симетрії фізичних властивостей матеріалу; відмічено, що знехтування "побічними" жорсткостями, що утворилися в наслідок зв'язку нормальних і зсувних факторів в узагальненому законі Гука, приводить до підвищення значень нижчих частот , особливо суттєвому (приблизно на порядок) для планарних коливань при умовах жорсткого закріплення;

- вплив розташування та величини локалізованої інерційної маси на частоти і форми коливань квадратної пластинки; показано, що для різних умов закріплення контуру екстремальні значення нижчих частот пластинки в залежності від місця знаходження приєднаної маси відповідають випадкам симетрії системи "пластина + маса" в цілому; при цьому розташування інерційної маси та її величина може в декілька разів знизити значення частотного параметра, не змінюючи модовий характер коливань;

- залежність мінімальної частоти консольної циліндричної панелі від наявності пружних опор, їх кількості, жорсткості та розташування; показано, що при певній жорсткості опор та їх місцезнаходженні відбувається зміна форм коливань панелі на мінімальній частоті;

- залежність "навантаження-прогин" при докритичній деформації пологих панелей різної гаусової кривини з різними умовами закріплення контуру; показано, що для оболонок нульової кривини характер цієї залежності ("випуклість догори" чи "випуклість донизу") може змінюватися з зміною граничних умов, чого не спостерігається для оболонок ненульової кривини;

- вплив на значення критичного навантаження відносних розмірів жорстко закріпленої по контуру сферичної панелі при сталій площі в плані; показано, що данна залежність є немонотонною і мінімальне критичне навантаження відповідає випадку квадратної панелі, чого не спостерігається, коли дві протилежні сторони жорстко закріплені, а дві інші шарнірно оперті;

- напружено- деформований стан прямокутного паралелепіпеду з гумоподібного матеріалу при нормальних кінематичних обмежаннях по двох протилежних гранях і вільних всіх інших; показана можливість одержання по методу повних систем стійкого рішення при значеннях коефіцієнта Пуасона, близьких до граничних для ізотропного матеріалу; відмічено, що напруження в площинах, що ортогональні напрямку дії обмежень, є практично однорідними, коли розмір паралелепіпеду в цьому напрямку перевищує інші;

- границі використання двох наближених моделей: моделі Кірхгофа-Лява в задачах статики та коливань плит середньої товщини при різних граничних умовах та модифікованої [22] моделі плоскої задачі при розрахунку власних частот планарних коливань пластинчатих тіл; даються кількісні оцінки похибок обох моделей в залежності від товщини пластини.

8. Розроблений підхід може бути використаний для статичного та динамічного розрахунку просторових та тонкостінних елементів конструкцій сучасної техніки. Застосування методу повних систем і побудованих на його основі методик до розв'язання задач статики та динаміки пружних тіл дозволяє при конкретних розрахунках врахувати реальні характеристики матеріалу, його неоднорідність, наявність локалізованих включень, умови на обмежуючих поверхнях та інші фактори для вибора раціональних геометричних і фізичних параметрів конструкції з метою підвищення її надійності.

Основний зміст дисертації відображено в таких публікаціях:

1. Беспалова Е.И. Решение задач теории упругости методами полных систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1989.- 29, N 9.- С.1346-1353.
2. Беспалова Е.И. Об одном подходе к исследованию свободных колебаний упругих элементов конструкций // Прикл. механика.- 1988.- 24, N 1.- С. 43-48.
3. Беспалова Е.И. Решение нелинейных задач теории оболочек с использованием методов полных систем // Прикл. механика.- 1992.- 28, N 8.- С. 43-48.
4. Беспалова Е.И. О свободных колебаниях пологих оболочек

при различных условиях закрепления контура // Сопротивление материалов и теория сооружений.- 1987.- Вып.51.- С.24-27.
5. Беспалова Е.И. О решении задач теории оболочек методами полных систем.- Киев,1988.- 16с. // Деп. в ВИНИТИ 12.12.88.- N 8735-В88.
6. Беспалова Е.И. Неосесимметричные колебания полых слоистых цилиндров при жестком защемлении торцевых плоскостей.- Киев,1988.- 8с. // Деп. в ВИНИТИ 18.11.88.- N 8178-В88.
7. Беспалова Е.И. К расчету свободных колебаний оболочек с упругими связями.- Киев, 1988.- 9с. // Деп. в ВИНИТИ 18.11.88.- N 8177-В88.
8. Беспалова Е.И. Методы полных систем в задачах теории оболочек // Тез. докл. III Всесоюз.конференции "Механика неоднородных структур" / Львов, 17-19 сентября 1991/.- Львов,1991.-Ч.1.-С.29.
9. Беспалова Е.И.,Килина Т.Н.,Михайлов С.Н. Колебания пластин с присоединенными массами, распределенными по участку поверхности // Прикл. механика.- 1987.- 23, N 6.- С. 78-83.
10. Беспалова О.І., Китайгородський А.Б. Про экстремальні властивості власних частот анізотропної плити // Тез. докл. Украин. конф." Моделирование и исследование устойчивости систем/ Киев, 15-19 мая 1995/.- Киев,1995.- С.20.
11. Беспалова Е.И., Сенченков И.К. К расчету пространственных элементов конструкций из эластомерных материалов методами полных систем // Прикл. механика.- 1990.- 26, N 12.- С. 3-7.
12. Григоренко Я.М.,Беспалова Е.И.,Китайгородский А.Б.,Шинкарь А.И.Свободные колебания элементов оболочечных конструкций.- Киев: Наук. думка, 1986.- 170с.
13. Григоренко Я.М.,Беспалова Е.И.,Василенко А.Т.,Голуб Г.П. и др.Численное решение краевых задач статики ортотропных слоистых оболочек вращения на ЭВМ типа М-220.- Київ: Наук. думка,1971.- 152с.
14. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Беспалова Е.И., Панкратова Н.Д. и др.Численное решение задач статики ортотропных оболочек с переменными параметрами .- Киев: Наук.

думка, 1975.- 183с.
15. Прокопов В.Г.,Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В. Об одном новом методе математического исследования процессов переноса // Пром. теплотехника.- 1979.-1, N 2.- С. 30-35.
16. Прокопов В.Г.,Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В. об одном методе решения вариационных задач теплопереноса // Пром. теплотехника.- 1981.- 3, N 1.- С. 30-35.
17. Прокопов В.Г., Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В. Метод разделения переменных Фурье и метод полных систем для решения многомерных задач теплофизики // Пром. теплотехника.- 1981.- 3, N 2. - С. 25-32.
18. Прокопов В.Г.,Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В. К развитию вариационных методов решения многомерных задач теплопроводности // Изв. вузов. Энергетика.- 1981.- N 8.- С. 56-62.
19. Прокопов В.Г., Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В., Блинов Д.Г. К исследованию процессов теплопереноса в областях сложной формы при произвольных граничных условиях //Пром. теплотехника.- 1982.- 4, N 3.- С. 44-49.
20. Прокопов В.Г., Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В. Метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Л.В. Канторовича и общий метод решения многомерных задач теплопереноса // Инженерно-физический журнал.- 1982.- 42, N 6.- С. 1007-1013.
21. Прокопов В.Г.,Шеренковский Ю.В., Беспалова Е.И. К созданию методов координатных решеток для решения многомерных задач механики сплошных сред // Пробл. прочности. - 1980.- N 7.- С. 93-97.
22. Сенченков И.К.,Беспалова Е.И.,Козлов В.И., Якименко С.Н. О возможностях уточненного метода расчета планарных колебаний пластинчатых тел // Прикл. механика.- 1991.- 27,N11.- С. 69-77.

Ключові слова: просторові тіла скінчених розмірів, оболонкові елементи,неоднорідність, анізотропія, статика, стаціонарна динаміка, багатовимірні граничні задачі,нелінійні задачі,задачі на власні значення.

Bespalova E.I. The solution of stationary problems of the theory of elasticity and theoty of shells of the full systems methods.

Thes is for a Doctor's degree of physical and mathematical sciences in speciality 01.02.04 - Mechanics of the Solid Body Deformation, Institute of mechanics of the Ukrainian National Academy of Sciences, Kiev, 1995.

The single approach has been developed for the solution of stationary problems of the theory of elasticity and theory of shells for non-homogeneous anisotropic bodies of finite sizes and differentpurpose thin- walled elements. The approach includes the method of solution of linear boundary problems with any number of independent variables, two procedurres of solution of multidimensional non-linear problems and proper value problems, as wellas hardware for their realizing in statics, free and forced harmonic oscillations of a wide class of three-dimensional bodies, and a mean bending of flexible shells at the subcritical stage of deformation. At the sufficiently high accuracy of results the mentioned approach is characterized by a linear increase of the required machine-time of the computer with a grouth of the problem dimension that permits to use it effectively in study of the static and dynamic deforming of structure elements in the conditions close to the service ones. The new problems have been solved.

The main content of thesis is described in 22 publications of the author, among which there are 3 manuscripts.