ДНІПРОПЕТРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

На правах рукопису

ВАКАРЧУК МИХАЙЛО БОРИСОВИЧ

ДЕЯКІ ПИТАННЯ АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЙ У КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ

01.01.01 - математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дніпропетровськ - 1995

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано на ка[...] Дніпропетровського де[...]

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, професор БАБЕНКО В.Ф.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук, професор Тіман М.П., кандидат фізико-математичних наук, доцент Кермазіна В.В.

Провідна установа - Інститут математики НАН України /м.Київ/.

Захист дисертації відбудеться "17" листопада 1995 р. о 15.30 годині на засіданні спеціалізованої Вченої ради К 03.01.09 при Дніпропетровському держуніверситеті за адресою:

320625, м. Дніпропетровськ, пр. Гагаріна, 72,
Дніпропетровський держуніверситет, корп. I4, ауд. 405.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Дніпропетровського державного університету.

Автореферат розісланий "17" жовтня 1995 р.

Вчений секретар
спеціалізованої Вченої ради Давидов О.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Результати, викладені в дисертації, стосуються питань апроксимації функцій аналітичними і комплексними поліноміальними сплайнами, наближення у комплексній площині функцій декількох змінних, а також питань, які пов'язані з нерівностями для норм проміжних похідних.

В 1967 р. Дж.Албергом, Е.Нільсоном і Дж.Уолшем у ряді робіт було введено комплексні сплайни на спрямлюваних жорданових кривих і так звані аналітичні сплайни в області, обмеженій жордановою кривою, а також досліджено деякі властивості цих сплайнів. Подальші дослідження, пов'язані з вивченням властивостей і апроксимативних можливостей комплексних і аналітичних сплайнів, проводились І.Шенбергом, Дж.Цимбаларіо, К.Мічеллі й А.Шарма, Дж.Опфером і М.Пурі, З.Вронічем, М.Атією, В.І.Білим та І.В.Стрелковською, Ю.В.Крякіним та Е.О.Стороженко та ін.

Разом з тим дана проблематика, на відміну від дійсного випадку, залишається далекою від свого завершення. Крім того, актуальність вивчення комплексних і аналітичних сплайнів обумовлено тим, що вони знайшли застосування в ряді задач чисельного аналізу, пов'язаних з наближеним обчисленням інтегралів типу Коші та наближеним рішенням деяких типів сингулярних інтегральних рівнянь теорії пружності, а також стали основою для створення одного з методів обчислювальної механіки - комплексного методу граничних елементів.

Важливу роль в теорії наближення грають точні нерівності для норм проміжних похідних. Задачі одержання таких нерівностей ведуть походження від робіт Е.Ландау /1913 р./, Ж.Адамара /1914 р./, А.М.Колмогорова /1939 р./. Для функцій дійсної змінної важливі результати було приведено в роботах Г.Х.Харді, І.Е.Літтлвуда і Дж.Пойя, Л.Хермандера, С.Б.Стечкіна, В.В.Арестова, В.М.Габушина, Л.В.Тайкова, А.О.Лигуна, В.М.Коновалова та ін. Однак цю тему далеко не вичерпано і багато питань залишається відкритими, тому одержання нових точних нерівностей для норм проміжних похідних функцій однієї та декількох змінних є актуальним.

В дисертаційній роботі розглядаються також питання, які стосуються наближення функцій багатьох комплексних змінних так званими "кутами". Важливі результати з апроксимації функцій декількох дійсних змінних конструкціями такого типу належать С.Н.Бернштейну, Ю.П.Офману, В.П.Моторному, М.К.Потапову, Ю.А.Брудному, С.О.Пічугову, В.М.Темлякову, М.-Б.А.Бабаеву та ін. На відміну від великої кількості публікацій, в яких розглядається дійсний випадок, в комплексній площині одержано значно менше результатів, пов'язаних з використанням відповідним чином побудованих "кутів" як апарата наближення.

Мета роботи - вивчення апроксимативних властивостей аналітичних і комплексних сплайнів, одержання точних нерівностей типу Колмогорова-Хермандера для дійсних функцій, обмежених на дискретній сітці, а також нерівностей для норм проміжних похідних для деяких банахових просторів аналітичних функцій багатьох змінних; одержання зворотних теорем конструктивної теорії функцій декількох комплексних змінних.

Методи дослідження. Для рішення вище вказаних задач використано методи конструктивної теорії функцій комплексної та дійсної змінних, а також методи наближення сплайн-функціями.

Новизна результатів та їхня наукова цінність. Основні результати дисертації є новими. Їх зміст полягає в наступному:

- доведено теорему типу Джексона для апроксимації функцій аналітичними сплайнами в просторі Смирнова $E_p(G)\ (1<p<\infty)$;
- доведено нерівності типу Бернштейна для похідних комплексних поліноміальних сплайнів, на цій основі встановлено зв'язок між поведінкою послідовності найкращих рівномірних наближень функції комплексними сплайнами і абсолютною неперервністю функції на кривій;
- одержано нерівності різних метрик для найкращих наближень комплексними поліноміальними сплайнами;
- доведено точні нерівності типу Колмогорова-Хермандера для функцій, обмежених на дискретній сітці, а також точні нерівності для норм проміжних похідних функцій із просторів Харді та Бергмана;
- одержано ряд зворотних теорем, що характеризують структурні властивості функцій із простору Харді $H_\infty(U^2)$ на основі поведінки найкращих наближень "кутами" їхніх граничних значень.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались на Міжнародній конференції "Теорія наближення та задачі обчислювальної математики" /м. Дніпропетровськ, 1993 р./, на наукових семінарах кафедр математичного аналізу і теорії функцій Дніпропетровського держуніверситету, а також на науковому семінарі кафедри вищої математики Дніпродзержинського державного технічного університету.

Публікації. За темою дисертації опубліковано 5 робіт, список яких наведено в кінці автореферату.

Структура і об'єм роботи. Дисертація обсягом 83 сторінки машинопису. Складається із вступу, двох розділів та списку літератури, що містить 71 найменування.

ЗМІСТ РОБОТИ

Дисертація складається з двох глав. В першій главі розглядаються задачі, пов'язані з апроксимацією функцій комплексними поліноміальними й аналітичними сплайнами.

Нехай Γ - спрямлювана жорданова крива в комплексній площині $\mathbb{C}$, яка має параметричне зображення $\Gamma=\{z(t)=x(t)+iy(t), 0\le t\le \ell(\Gamma)\}$, де $\ell(\Gamma)$ - довжина кривої; t - довжина кривої, відлічувана від одного з її кінців. Якщо крива Γ є замкненою, точкою відліку обираємо довільну точку кривої, вважаючи при цьому, що при зростанні t точка $z(t)$ рухається по кривій проти годинникової стрілки.

Нехай Γ - гладка жорданова крива в комплексній площині $\mathbb{C}$. Позначимо через $\Theta(t)$ кут між фіксованим напрямом та дотичною до кривої в точці $z(t)$. Назвемо криву Γ ляпуновською кривою, якщо функція $\Theta(t)$ задовольняє умову Гельдера з показником α, $0<\alpha\le 1$. Клас усіх ляпуновських кривих позначимо через Λ.

Нехай Γ - замкнена жорданова спрямлювана крива в комплексній площині $\mathbb{C}$, для будь-яких точок якої z_1 і z_2 $(z_1\ne z_2)$ існує константа K_Γ, що залежить тільки від кривої Γ, така, що $\ell(\widetilde{z_1, z_2})\le K_\Gamma|z_1-z_2|$, де $\ell(\widetilde{z_1, z_2})$ - довжина меншої з дуг, на які крива розбивається точками z_1 і z_2. Множину всіх таких кривих позначимо через $\mathcal{L}$.

Вважаємо, що $z_1 \prec z_2$, якщо при зростанні параметра t точка z_1 передує точці z_2.

Під δ_n розуміємо деяке розбиття відрізку $[0,\ell(\Gamma)]$: $\delta_n: 0=t_0<t_1<\ldots<t_n=\ell(\Gamma)$, а під Δ_n - відповідне розбиття кривої Γ: $\Delta_n=\{z_j=z(t_j)\}_{j=0}^{n}$.

Означимо дугу $\Gamma_j=\{z\in\Gamma: z_{j-1}\prec z\prec z_j\}, j=\overline{1,n}$. Під рівномірним розбиттям кривої ми розуміємо розбиття $\Delta_n^*=\{z_j=z(j\ell(\Gamma)/n)\}_{j=0}^{n}$

Нехай задано деяку послідовність розбиттів $\{\delta_n\}_{n=2}^{\infty}$ відрізку $[0, \ell(\Gamma)]$. Позначимо через $H_n^* = \max_{j=\overline{1,n}} (t_j - t_{j-1})$, $\bar{H}_n^* = \min_{j=\overline{1,n}} (t_j - t_{j-1})$. Якщо існує незалежна від n константа $\lambda > 0$ така, що $H_n^* / \bar{H}_n^* \leq \lambda$, то послідовність розбиттів $\{\delta_n\}_{n=2}^{\infty}$ назвемо λ-квазірівномірною.

Нехай $C(\Gamma)$ - клас неперервних комплекснозначних функцій $f(z)$, означених на Γ і таких, що $\|f\|_{C(\Gamma)} = \sup_{z \in \Gamma} |f(z)|$.

Нехай $L_p(\Gamma)(1 \leq p \leq \infty)$ - простір функцій, заданих на Γ, з кінцевою нормою:

$$\|f\|_{L_p(\Gamma)} = \begin{cases} \left\{ \int_0^{\ell(\Gamma)} |f(z(t))|^p dt \right\}^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{supvrai} \{ |f(z(t))| : t \in [0, \ell(\Gamma)] \}. \end{cases}$$

Комплекснозначну функцію $S(z)$, означену на Γ, називають комплексним поліноміальним сплайном порядку m, дефекту $r (1 \leq r \leq m)$ за розбиттям Δ_n, якщо $S(z)$ має неперервні похідні уздовж кривої Γ аж до $m - r$-ої і на кожній з дуг $\Gamma_j (j = \overline{1,n})$ $S(z)$ співпадає з деяким алгебраїчним поліномом комплексної змінної ступеня не вище m.

Через $S_m^r(\Delta_n, \Gamma)$ позначимо множину комплекснозначних сплайнів ступеня m дефекту r за розбиттям Δ_n кривої Γ.

Нехай X - один із просторів $C(\Gamma)$ або $L_p(\Gamma)(1 \leq p \leq \infty)$ і $f(z) \in X$.

Позначимо через $E_{\Delta_n}^{m,r}(f)_X$ величину найкращого наближення функції f множиною $S_m^r(\Delta_n, \Gamma)$ в просторі X.

Нехай Γ - замкнена спрямлювана жорданова крива; L_p-модулем неперервності функції $f \in L_p(\Gamma)(1 \leq p \leq \infty)$ назвемо наступний вираз: $\omega(f, h)_p = \sup_{|\sigma| \leq h} \|f(z(\cdot + \sigma)) - f(z(\cdot))\|_{L_p(\Gamma)}$.

Якщо $S(z)\in S_m^r(\Delta_n,\Gamma)$, то функцію $\mathcal{S}(z)$, означену в області, яку обмежено кривою Γ, інтегралом типу Коші $\mathcal{S}(z)=1/(2\pi i)\times\int S(\tau)/(\tau-z)d\tau$, називають аналітичним сплайном, породженим комплексним сплайном $S(z)$. Множину аналітичних сплайнів, породжену підпростором $S_m^r(\Delta_n,\Gamma)$, позначимо символом $AS_m^r(\Delta_n,\Gamma)$.

Нехай $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ - послідовність областей, замикання яких лежать всередині однозв'язної області G, обмеженої спрямлюваною жордановою кривою Γ. Межі Γ_n областей G_n спрямлювані та збігаються до межі області G в тому розумінні, що кожна точка $z\in G$ належить до всіх G_n, починаючи з деякого номера n_0. Говорять, що аналітична в G функція $f(z)$ належить до простору Смирнова $E_p(G)(0<p\leq\infty)$, якщо для деякої константи $C_p(f)$, що не залежить від n, мають місце нерівності:

$$\int_0^{\ell(\Gamma_n)}|f(z(t))|^p\,dt\leq C_p(f)<\infty,\quad 0<p<\infty,\ n\in\mathbb{N};$$

$$\operatorname{supvral}\{|f(z(t))|:t\in[0,\ell(\Gamma_n)]\},\ p=\infty,\ n\in\mathbb{N}.$$

хоч би для однієї послідовності спрямлюваних кривих $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ з указаною вище властивістю. При цьому $\|f\|_{E_p(G)}:=\|f^+\|_{L_p(\Gamma)}$, де $f^+(z),(z\in\Gamma)$ - граничні значення функції $f(z)\in E_p(G)$ по всіх н дотичних до Γ шляхах.

Одним з основних результатів першої глави є доведена в § I.I теорема типу Джексона для аналітичної сплайн-апроксимації. Раніше у випадку простору $E_\infty(G)$ нерівність указаного типу було одержано З.Вронічем в 1983 р. На основі використання згладжуючого оператора як проміжного наближення і доведення ряду нових властивостей нормалізованих B-сплайнів одержано таку теорему:

Теорема I.I.2. Нехай G - однозв'язна область, обмежена кривою $\Gamma\in\Lambda$, і послідовність розбиттів $\{\delta_n\}_{n=m+2}^{\infty}$ відрізку

$[0, \ell(\Gamma)]$ є λ-квазірівномірною. Тоді для величини найкращого наближення функції $f(z) \in E_p(G) (1<p<\infty)$ підпростором аналітичних сплайнів $AS^1_{m-1}(\Delta_n, \Gamma)$ має місце нерівність:

$$E(f, AS^1_m(\Delta_n, \Gamma))_{E_p(G)} \leq C(m, p, \Gamma, \lambda)\, \omega(f, H^*_n)_p,$$

при всіх $n \geq m+2$, $(m \geq 2)$.
/тут і далі $C(\alpha, \beta, \ldots)$ - константи, що залежать тільки від указаних в дужках параметрів/.

В теоремі І.І.І доведено нерівність типу Джексона для випадку комплексної поліноміальної сплайн-апроксимації. Нерівність такого типу раніше було доведено З.Вронічем для функції $f \in C(\Gamma)$. У випадку інтегральної метрики теорему типу Джексона з інтегральним модулем гладкості, який задано особливим способом і порядок якого залежить від ступеня сплайну та кількості вузлів розбиття кривої, було одержано в 1985 р. Ю.В.Крячіним.

В § І.2 одержано нерівність типу Бернштейна для комплексних поліноміальних сплайнів. Як і в дійсному випадку, вона грає важливу роль при вирішенні ряду задач теорії наближення. Стандартні доведення нерівностей такого типу виявились непридатними у випадку комплексної апроксимації, і в ході міркування потрібно залучення деяких понять і результатів геометричної та конструктивної теорії функцій комплексної змінної.

<u>Теорема І.2.І.</u> Нехай крива $\Gamma \in \mathcal{L}$. Для будь-якого комплексного сплайну $S(z) \in S^1_m(\Delta^*_n, \Gamma)$ при $k = 1, \ldots, m$ справедливими є нерівності:

$$\|S^{(k)}\|_{L_\infty(\Gamma)} \leq C(m, \Gamma, k)\, n^k\, \|S\|_{C(\Gamma)}.$$

В § І.3 установлено зв'язок між швидкістю прямування до нуля комплексної поліноміальної сплайн-апроксимації і абсолютною неперервністю функції на кривій. У випадку дробово-раціональних наближень результати такого типу одержано Є.П.Долженком в 1966 р. і В.І.Данченком в 1980 р. Відзначимо, що проведення подібних міркувань у випадку, що розглядається нами, стало можливим на основі результатів § I.1 і § I.2.

Введемо таке позначення. Розглянемо розбиття Δ'_{n+1}, яке виходить із Δ^*_n додаванням до нього точки, що ділить дугу Γ_1 на дві дуги однакової довжини. Розбиття Δ'_{n+2}, в свою чергу, виходить із Δ'_{n+1} додаванням точки, яка ділить Γ_2 на дві дуги рівної довжини і так далі.

Теорема I.3.I. Нехай функція $f \in C(\Gamma)$, де Γ - кусково-гладка крива із класу $\mathcal{L}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді, якщо справедливим є співвідношення

$$\sum_{p=n}^{\infty} E^{m,1}_{\Delta'_p}(f)_{C(\Gamma)} < \infty ,$$

то $f(z)$ є абсолютно неперервною на Γ функцією. При цьому функція $f(z)$ майже в кожній точці $z \in \Gamma$ має похідну $f'(z)$ уздовж кривої Γ і при $p \to \infty$

$$\int_0^{\ell(\Gamma)} \left| f'(z(t)) - g'_{m,1}(\Delta'_p, f; z(t)) \right| dt \to 0 ,$$

де $E^{m,1}_{\Delta'_p}(f)_{C(\Gamma)} = \| f - g_{m,1}(\Delta'_p, f) \|_{C(\Gamma)}$.

В § I.4 розглянуто питання, які стосуються співвідношень між апроксимаціями функцій комплексними поліноміальними сплайнами в різних метриках. Для найкращих поліноміальних наближень дана тематика набула свого розвитку в роботах О.О.Конюшкова, С.Б.Стечкіна, П.Л.Ульянова, М.П.Тімана, Е.О.Стороженко та ін. Одержана в § I.4 теорема є у певному розумінні аналогом результату П.Л.Ульянова 1970 р., але при більш жорсткому обмеженні на збіжність ряду з найкращих наближень. Схема доведення, розроблена П.Л.Ульяновим і використана іншими авторами, тут виявилась непридатною через специфіку комплексної площини.

<u>Теорема I.4.I.</u> Нехай $1 \le p < q < \infty$ – функція $f(z) \in L_p(\Gamma)$, де кусково-гладка крива $\Gamma \in \mathcal{L}$ і $n \in \mathbb{N}$. Якщо

$$\sum_{j=n}^{\infty} j^{q/p-1} \left\{ E^{m,1}_{\Delta'_j}(f)_p \right\}^q < \infty,$$

то

$$E^{m,1}_{\Delta^*_n}(f)_q \le C(m,p,q,\Gamma) \left\{ n^{1/p-1/q} E^{m,1}_{\Delta^*_n}(f)_p + \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} j^{q/p-2} \left(E^{m,1}_{\Delta'_j}(f)_p \right)^q \right]^{1/q} \right\}.$$

В § I.5 установлено зв'язок між раціональною та комплексною поліноміальною сплайн-апроксимацією комплекснозначної функції.

Нехай R_n – множина всіх раціональних функцій n-го ступеня, $R_n(f)_{C(\Gamma)}$ – величина найкращого рівномірного наближення функції f множиною R_n.

Символом $S(m,n)$ позначимо множину всіх сплайн-функцій m-го порядку, мінімального дефекту з $n+1$ вузлами, $E^m_n(f)_{C(\Gamma)}$ величину найкращого рівномірного наближення функції $f \in C(\Gamma)$ множиною $S(m,n)$.

В I976 р. В.Поповим було одержано оцінку для дійсної функції $f \in C[0,1]$:

$$E^0_n(f)_{C[0,1]} \le \frac{2^7}{n+1} \sum_{k=0}^{n} R_k(f)_{C[0,1]}.$$

В I986 р. А.О.Пекарським дану нерівність було перенесено на коло $|z| = 1$. В § I.5 приведено аналог нерівності В.Попова для ляпуновської кривої.

<u>Теорема I.5.I.</u> Нехай $f \in C(\Gamma)$, де $\Gamma \in \Lambda$. Тоді для $n = 2,3,\ldots$ справедливі нерівності

$$E_n^0(f)_{C(\Gamma)} \leq \frac{2^6\,\theta_\Gamma}{n+1}\sum_{k=0}^{n} R_k(f)_{C(\Gamma)},$$

де θ_Γ - постійна, що залежить тільки від кривої Γ.

У другій главі дисертації розглянуто нерівності для норм проміжних похідних, а також зворотні теореми конструктивної теорії функцій кількох комплексних змінних.

Позначимо через $L_p^n(\mathbb{R})\ (1\leq p\leq\infty), n\in\mathbb{N}$, простір дійсних функцій $f\in L_p(\mathbb{R})$, які мають локально абсолютно неперервну похідну $f^{(n-1)}$, і таких, що $f^{(n)}\in L_p(\mathbb{R})$. Через L_p^n позначимо множину всіх 2π-періодичних функцій із класу $L_p^n(\mathbb{R})$. Нехай $\varepsilon>0$ і S_ε - деяка рівномірна сітка на $\mathbb{R}$ з кроком ε, покладемо $\|f\|_{S_\varepsilon} := \sup\{|f(x)| : x\in S_\varepsilon\}$.

Нехай $\bar{\varphi}_{\lambda,n}(x)$ - ідеальний сплайн Ейлера. Будемо вважати

$$\varphi_{\lambda,n}(x) := \bar{\varphi}_{\lambda,n}\left(x+\frac{1+(-1)^n}{4\lambda}\pi\right);\quad \varphi_n(x) := \varphi_{1,n}(x).$$

В роботах Ж.Адамара 1914 р., Г.Є.Шилова 1937 р., А.М.Колмогорова 1938 і 1939 рр. було дано рішення задачі про одержання точних оцінок для $\|f^{(k)}\|_\infty (0<k<n)$ функцій $f\in L_\infty^n(\mathbb{R})$ при умові, що відомі $\|f\|_\infty$ і $\|f^{(n)}\|_\infty$:

$$\|f^{(k)}\|_\infty \leq \frac{\|\varphi_{n-k}\|_\infty}{\|\varphi_n\|_\infty^{1-k/n}}\,\|f\|_\infty^{1-k/n}\,\|f^{(n)}\|_\infty^{k/n}. \qquad (1)$$

В 1980 р. В.М.Коновалов розглянув питання про знаходження точних нерівностей для проміжної похідної, якщо відомі $\|f\|_{S_\varepsilon}$ і $\|f^{(n)}\|_\infty$.

В § 2.1 одержано оцінки подібного типу для нерівностей Колмогорова-Хермандера, а також для функцій із L_∞^n дано оцінки L_p-норм проміжних похідних.

Теорема 2.1.1. Якщо $f \in L^n_\infty(\mathbb{R})$ і число $\lambda > 0$ вибрано з умови

$$\varphi_{\lambda,n}(\varepsilon/2) = \|f\|_{S_\varepsilon} / \|f^{(n)}\|_\infty , \quad (2)$$

то для будь-якого $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\|f^{(k)}\|_\infty \leq \|\varphi_{\lambda,n-k}\|_\infty \|f^{(n)}\|_\infty , \quad (3)$$

при цьому для будь-якого $m = 2, 3, \ldots$ у множині функцій

$$\left\{ f \in L^n_\infty(\mathbb{R}) : \|f\|_{S_\varepsilon} / \|f\|_\infty = (\pi/(m\varepsilon))^{-n} \varphi_n(\pi/(2m)) \right\}$$

знайдеться функція $f(x) = \varphi_{\lambda,n}(x)$, де $\lambda = \pi/(m\varepsilon)$, яка обертає нерівність (3) у рівність.

Наслідок 1. Нехай $f \in L^n_\infty(\mathbb{R})$ і число $\lambda > 0$ вибрано з умови (1). Тоді

$$\|f^{(k)}\|_\infty \leq \frac{\|\varphi_{n-k}\|_\infty}{\varphi_n(\lambda\varepsilon/2)^{1-k/n}} \|f\|_{S_\varepsilon}^{1-k/n} \|f^{(n)}\|_\infty .$$

Покладемо $\Psi_n(x) = x^{-n} \varphi_n(x)$ для $x \in (0, \pi/2)$.

Наслідок 2. Для будь-якої $f \in L^n_\infty(\mathbb{R})$ при $k = 0, 1, \ldots, n-1$ справедливі нерівності

$$\|f^{(k)}\|_\infty \leq (\varepsilon/2)^{n-k} \Psi_n^{-1}\left((2/\varepsilon)^n \|f\|_{S_\varepsilon} / \|f^{(n)}\|_\infty\right)^{k-n} \|\varphi_{n-k}\|_\infty \|f^{(n)}\|_\infty . \quad (4)$$

Нерівність (4) обертається в рівність для будь-якої функції вигляду $f(x) = \varphi_{\lambda,n}(x)$, де $\lambda = \pi/(m\varepsilon)$.

Покладаючи в (4) $n = 2$ і $k = 1$, одержуємо таке узагальнення нерівності Адамара:

Наслідок 3. Якщо $f \in L^2_\infty(\mathbb{R})$, то

$$\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2\|f''\|_\infty \left(\|f\|_{S_\varepsilon} + (\varepsilon^2/8)\|f''\|_\infty\right)} . \quad (5)$$

Нерівність (5) є точною в тому ж розумінні, що і нерівність (4).

Позначимо через L_∞^n множину 2π -періодичних функцій із класу $L_\infty^n(\mathbb{R})$.

Теорема 2.I.2. Нехай $\varepsilon = \pi/\ell$, $\ell = 2,3,\ldots$. Якщо $f \in L_\infty^n$ і число λ вибрано з умови (I), то для будь-якого $k = 1, 2, \ldots, n-1$ справедливі нерівності

$$\|f^{(k)}\|_p \le \lambda^{-(n-k)} \|\varphi_{n-k}\|_p \|f^{(n)}\|_\infty . \qquad (6)$$

При цьому для будь-якого m - дільника числа ℓ у множині $\left\{ f \in L_\infty^n : \|f\|_{S_\varepsilon} / \|f^{(n)}\|_\infty = (\pi/(m\varepsilon))^{-n} \varphi_n(\pi/(2\ell)) \right\}$ знайдеться функція $f(x) = \varphi_{m,n}(x)$, яка обертає при $\lambda = m$ нерівність (6) у рівність.

В § 2.I із теореми 2.I.2 одержано аналоги наслідків I - 3, а також наведено оцінки подібного типу для нерівності Хермандера. Крім того, в цьому параграфі було доведено теорему, яка дозволяє замінити в нерівності Колмогорова (I) норми $\|f\|_\infty$ і $\|f^{(n)}\|_\infty$ найкращими наближеннями константою.

В § 2.2 дисертаційної роботи одержано нерівності типу Колмогорова для аналітичних в бікрузі функцій.

Нехай $U^2 = \{ z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_j| = 1, j = 1,2 \}$; $T^2 = \{ z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_j| = 1, j = 1,2 \}$; $A(U^2)$ - множина аналітичних в U^2 функцій.

Позначимо через $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \Delta^2 = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$; $\xi = (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \in T^2$; $\rho = (\rho_1, \rho_2) \in [0,1) \times [0,1)$. Нехай $f \in A(U^2)$.

Розглянемо такі вирази:

$$M_q(\rho, f) = \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Delta^2} |f(\rho\xi)|^q \, d\theta \right\}^{1/q}; \ (1 \le q < \infty); \quad M_\infty(\rho, f) = \sup \{ |f(\rho\xi)| : \xi \in T^2 \}.$$

Через $H_q(U^2) (q \ge 1)$ позначимо простір Харді, який означається у такий спосіб:

$$H_q(U^2)=\{f\in A(U^2): \|f\|_{H_q(U^2)}:=\sup\{M_q(\rho,f): 0<\rho_j<1,\ j=1,2\}<\infty\}.$$

Покладемо $L_q(T^2)=\{f(\xi): \xi\in T^2, \|f\|_{L_q(T^2)}=\{\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Delta^2}|f(\xi)|^q d\theta\}^{1/q}<\infty\}.$

Введемо позначення $f_a^{(\eta,\mu)}:=\partial^{\eta+\mu}(\rho_1 e^{i\theta_1},\rho_2 e^{i\theta_2})/\partial\theta_1^\eta\partial\theta_2^\mu$; $z_j=\rho_j e^{i\theta_j}$ $(j=1,2)$.

Теорема 2.2.I. Якщо функція $f(z)=f(z_1,z_2)$ та її похідні $f_a^{(r_1-v_1,\, r_2-v_2)}$, $f_a^{(r_1,0)}$, $f_a^{(0,r_2)}$, $f_a^{(r_1,r_2)}$; $r_1\in\mathbb{N}$, $v_1=\overline{0,r_1-1}$; $r_2\in\mathbb{N}$, $v_2=\overline{0,r_2-1}$ належать до простору Харді $H_2(U^2)$, то справедливі точні нерівності:

$$\|f_a^{(r_1-v_1,\,r_2-v_2)}\|_{H_2(U^2)}\le\|f_a^{(r_1,r_2)}\|_{H_2(U^2)}^{(1-\frac{v_1}{r_1})(1-\frac{v_2}{r_2})}\|f_a^{(r_1,0)}\|_{H_2(U^2)}^{(1-\frac{v_1}{r_1})\frac{v_2}{r_2}}\times$$

$$\times\|f_a^{(0,r_2)}\|_{H_2(U^2)}^{(1-\frac{v_2}{r_2})\frac{v_1}{r_1}}\|f\|_{H_2(U^2)}^{\frac{v_1}{r_1}\frac{v_2}{r_2}}.$$

В § 2.2 аналогічну нерівність одержано для функцій із простору Бергмана $H_2'(U^2)$. В теоремі 2.2.2' дані нерівності узагальнено на випадок m незалежних змінних.

В § 2.3 доведено теореми, що характеризують структурні властивості функцій із простору $H_\infty(U^2)$ на основі наближення їхніх граничних значень "кутами" /або узагальненими поліномами/. Наведені в § 2.3 результати можна розглядати як своєрідне поширення зворотних теорем С.Н.Бернштейна на випадок аналітичних функцій кількох змінних.

Розглянемо оператор Δ_h^κ, де $h>0$, $\kappa\in\mathbb{N}$, який діє на функцію $f\in H_\infty(U^1)$ за таким правилом:

$$\Delta_h^\kappa(\theta)=\sum_{j=0}^{\kappa}(-1)^{\kappa-j}\binom{\kappa}{j}f(e^{i(\theta+jh)}). \qquad (7)$$

Для комплекснозначних функцій $f\in H_\infty(U^2)$ під $\Delta^{\kappa}_{h,\theta_1}$ $(\Delta^{\kappa}_{h,\theta_2})$ розуміємо оператор (7), який діє на f як на функцію від θ_1 (θ_2). Позначимо

$$\Delta^{p_1,p_2}_{h_1,h_2}(f;\theta_1,\theta_2)=\Delta^{p_1}_{h_1,\theta_1}\left(\Delta^{p_2}_{h_2,\theta_2}(f;\theta_1,\theta_2)\right).$$

Під модулем гладкості порядку (p_1,p_2) розуміємо вираз:

$$\omega_{p_1,p_2}(f;\delta_1,\delta_2)=\sup_{|h_\kappa|\leq\delta_\kappa}\left\|\Delta^{p_1,p_2}_{h_1,h_2}(f;\cdot,\cdot)\right\|_{H_\infty(U^2)}.$$

Теорема 2.3.I. Якщо комплекснозначна функція $\varphi(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})\in L_\infty(T^2)$ і для кожної пари $N,M\in\mathbb{N}$ існує узагальнений полінам $p_{N,M}(z_1,z_2)\in P_{N-1,M-1}$ такий, що $a_{0\kappa}=a_{j0}=0$ $(j,\kappa=0,1,\ldots)$ і

$$\|\varphi-p_{N,M}\|_{L_\infty(T^2)}\leq\frac{C}{N^{r_1+\alpha_1}M^{r_2+\alpha_2}},$$

де $r_1,r_2\in\mathbb{N}$; $0<\alpha_1,\alpha_2\leq 1$, то в бікрузі U^2 існує аналітична функція $f(z_1,z_2)\in H_\infty(U^2)$, для якої $f_a^{(r_1,r_2)}\in H_\infty(U^2)$, і кутові граничні значення $f(z_1,z_2)$ майже всюди збігаються з $\varphi(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})$.

При цьому

$$\omega_{11}\left(f_a^{(r_1,r_2)},\delta_1,\delta_2\right)\leq\begin{cases}C_1\delta_1^{\alpha_1}\delta_2^{\alpha_2}, & \text{якщо } \alpha_1=\alpha_2=1,\\ C_2\delta_1\delta_2(1+|\ln\delta_1\ \ln\delta_2|), & \text{якщо } 0<\alpha_1,\alpha_2<1,\\ C_3\delta_1^{\alpha_1}\delta_2(1+|\ln\delta_2|), & \text{якщо } 0<\alpha_1<1,\ \alpha_2=1,\\ C_4\delta_1\delta_2^{\alpha_2}(1+|\ln\delta_1|), & \text{якщо } 0<\alpha_2<1,\ \alpha_1=1.\end{cases}$$

В теоремах 2.3.2 - 2.3.3 подібні оцінки одержано для модулей гладкості $\omega_{1,2}$, $\omega_{2,1}$ і $\omega_{2,2}$.

Висловлюю щиру вдячність моєму науковому керівникові Бабенко Владіславу Федоровичу за постійну увагу та підтримку в роботі.

Основні положення дисертації
опубліковано в таких роботах:

I. Вакарчук М.Б. Неравенства типа Джексона для комплексных полиномиальных сплайнов // Днепропетровский государственный университет.- Днепропетровск, I995.- 8 с.- Деп. в УкрРГАСНТИ № 357 - УК 95.

2. Вакарчук М.Б. О соотношениях между рациональной и комплексной полиномиальной сплайн-аппроксимацией // Днепропетровский государственный университет.- Днепропетровск, I995.- 7 с.- Деп. в УкрРГАСНТИ, № 356 - УК 95.

3. Вакарчук М.Б. О неравенствах типа Колмогорова для некоторых банаховых пространств аналитических в бикруге функций //Теорія наближення та задачі обчислювальної математики: Тези доповідей міжнародної конференції /Дніпропетровськ, 26 - 28 травня I993 р./.- Дніпропетровськ, I993.- С.35.

4. Вакарчук М.Б. О неравенствах типа Джексона для комплексной полиномиальной сплайн-аппроксимации // Функциональные пространства. Теория приближений. Нелинейный анализ: Тезисы докладов международной конференции /Москва, 27 апреля - 3 мая I995 г./.- М., I995.- С. 70 - 7I.

5. Вакарчук М.Б. Об обратных теоремах конструктивной теории функций нескольких комплексных переменных // Четверта Міжнародна наукова конференція імені акад. М.Кравчука: Тези доповідей /II - I3 травня I995 р./.- К., I995.- С. 55.

ANNOTATION

Vakarchuk M.B. Some questions of the approximation of functions in the complex plane. Dissertation for the degree of the candidate of physical and mathematical sciences in the speciality 01.01.01 "mathematical analysis", Dnepropetrovsk State University, Dnepropetrovsk, 1995.

Some questions of the approximation of functions by subspaces of the complex polynomial splines on the restifiable Jordan curve Г and the questions of the approximation of functions from the Smirnov's spaces $E_p(\Gamma)$ by analitical splines have been considered in the complex plane. In a case of an "angle" approximation, a number of reverse theorems of the inequlities constructive theory of functions of some complex variables and the exact for norms of the intermediate derivatives from real functions and from functions, analitical in a policircle, have been obtained.

The scientific results are published in 5 works.

АННОТАЦИЯ

Вакарчук М.Б. Некоторые вопросы аппроксимации функций в комплексной плоскости. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 "Математический анализ". Днепропетровский государственный университет, Днепропетровск, 1995.

Рассматриваются некоторые вопросы аппроксимации функций в комплексной плоскости на спрямляемой жордановой кривой Г подпространством комплексных полиномиальных сплайнов и приближения функций из пространства Смирнова $E_p(\Gamma)$ аналитическими сплайнами. В случае приближения "углом" был получен ряд обратных теорем конструктивной теории функций нескольких переменных и установлены точные неравенства для норм промежуточных производных вещественных функций и функций аналитических в поликруге.

По теме диссертации опубликовано 5 работ.

Ключові слова: комплексна площина, сплайн-апроксимація, наближення "кутами".

Вакал

тип. КГУ зак. 1791-100