Київський університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

СЕЙФУЛЛІН Тимур Рустемович

УДК 512.62

КОРЕНЕВІ ПОЛІНОМИ ТА КОРЕНЕВІ СПІВВІДНОШЕННЯ СИСТЕМ ПОЛІНОМІВ

01.01.06 — алгебра і теорія чисел

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Київ 1995

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор УСТИМЕНКО В. А.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор ШАРКО В. В.,

кандидат фізико-математичних наук БАВУЛА В. В.

Провідна організація: Львівський державний університет імені Івана Франка.

Захист відбудеться «20» листопада 1995 р. о 14 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.01.01 при Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 252127 Київ 127, проспект Академіка Глушкова, 6, механіко-математичний факультет, ауд. 42.

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці університету.

Автореферат розісланий «12» жовтня 1995 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради ОВСІЄНКО С. А.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми, практичне і теоретичне значення. Розв'язання систем поліноміальних рівнянь і перетворення поліноміальних виразів було первісною задачею алгебри, з якої вона виникла, і понині, незважаючи на розширення предмету, залишається центральною її проблемою. Оскільки мова алгебри поліномі і раціональних функцій є основною мовою природничих та технічних наук, а також є фундаментом інших розділів математики - геометрії, диференціального та інтегрального числення, функціонального аналізу, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії імовірностей та інше, то актуальність цієї теми не викликає сумнівів. Особлива складність виникає при розгляді нелінійних виразів, тобто виразів які мають змінні у степені більше одиниці. Розв'язання нелінійних поліноміальних рівнянь, а також виключення невідомих з нелінійних поліноміальних співвідношень в багатьох практичних та теоретичних застосуваннях є зовсім нездоланною перепоною. Особливу актуальність ця проблема набуває з виникненням ЕОМ, та пов'язаними з цим розширеннями технічних обчислювальних можливостей, з розвитком комп'ютерної алгебри.

Задача алгебраїчних (аналітичних) перетворень полягає в тому, щоб систему поліноміальних рівнянь (співвідношень), записаних у вигляді $\forall i=1,s: f_i(x)=0$, звести до належного вигляду. (Тут і нижче $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_m)$, $z=(z_1,\dots,z_l)$). Якщо систему рівнянь вигляду $\forall i: f_i(x,y)=0$, потрібно звести до системи рівнянь вигляду $\forall j: g_j(x)=0$, то це є задача виключення невідомих. Якщо дві системи рівнянь вигляду $\forall i: f_i(x,y)=0$ та вигляду $\forall j: g_j(y,z)=0$ необхідно звести до системи рівнянь вигляду $\forall k: h_k(x,z)=0$, то це є задача суперпозиції двох алгебраїчних функцій, заданих у неявному вигляді. Незвідність або звідність системи рівнянь вигляду $\forall i: f_i(x)=0$ до рівняння вигляду $1=0$ рівнозначна існуванню або неіснуванню коренів у початкової системи рівнянь в алгебраїчно замкненому полі. Звідність системи рівнянь вигляду $\forall i: f_i(x)=0$ до системи рівнянь вигляду $\forall i: x_i-\lambda_i=0$ рівнозначна існуванню одного, з урахуванням кратності, кореня початкової системи рівнянь, а саме зведення до заданого вигляду є розв'язанням початкової системи рівнянь.

Алгебраїчні перетворення системи поліноміальних рівнянь $\forall i: f_i(x)=0$ є отримання лінійних комбінацій обох частин рівностей з поліноміальними коефіцієнтами: $\sum_{i=1}^{s} f_i(x)\cdot g^i(x)=0$, де $g^i(x)$-поліноми від $x=(x_1,\dots,x_n)$. Отже, задача приведення системи поліноміальних рівнянь до заданого вигляду зводиться до задачі розв'язання систем лінійних рівнянь вигляду $F(x)=\sum_{i=1}^{s} f_i(x)\cdot g^i(x)$, де невідомими є поліноми $g^i(x)$, а поліноми $f_i(x)$ - відомі; на коефіцієнти полінома $F(x)$ накладені деякі лінійні умови. Розв'язки зазначеного лінійного рівняння ми будемо записувати у вигляді $\sum_{i=1}^{s} \hat{f}_i\cdot g^i(x)$. Для розв'язання та дослідження властивостей розв'язків рівнянь вигляду $F(x)=\sum_{i=1}^{s} f_i(x)\cdot g^i(x)$ необхідно розглядати рівняння вигляду $\sum_{i=1}^{s} f_i(x)\cdot g^i(x)=0$, розв'язки яких називаються співвідношеннями або сізігіями поліномів $f(x)$. Найпростішим прикладом співвідношення поліномів є комутаційні співвідношення, тобто співвідношення, породжені співвідношеннями вигляду $\hat{f}_i\cdot f_j(x)-\hat{f}_j\cdot f_i(x)$.

Класичним методом розв'язання зазначеного класу задач є метод послідовного виключення невідомих, розроблений Ейлером та записаний Сільвестром у формі результантів. Указаний метод достатньо громіздкий і призводить до виникнення зайвих коренів. Подальший розвиток цього методу було зроблено в працях Маколея (Macaulay F.S.). Серед сучасних методів розв'язання указаного класу задач, побудованих на застосуванні результантів, є алгоритм одноразового виключення змінних для однорідних поліномів запропонований Лазаром Д. (Lazard D.). Цей метод вимагає $O(d^{4n})$ операцій, де n - кількість змінних, d - максимальний степінь поліномів. Інший підхід до розв'язання зазначеного класу задач грунтується на методі базисів Грьобнера, розроблений Бухбергером Б. (Buchberger B.). Цей алгорітм призначений для довільних, не обов'язково однорідних, поліномів, але вимагає до (d^{n^2}) операцій. Кенні Дж.(Canny J.) запропонував зробити деяку деформацію початкової неоднорідної системи поліноміальних рівнянь шляхом введення параметра таким чином, щоб відповідна однорідна система рівнянь мала скінченну кількість коренів, а потім застосувати метод результантів до отриманої однорідної системи рівнянь. Указану деформацію він запозичив з робіт А.Л.Чистова і Д.Ю.Григор'єва. Цей алгорітм потребує $d^{O(n)}$ операцій.

Сізигії (співвідношення) поліномів досліджувалися в працях Д.Гільберта, Кошуля (J.L.Koszul), А.Картана (H.Cartan), Д.Лазаря.

Мета роботи. Метою роботи є дослідження розв'язків лінійних рівнянь вигляду $\sum_{i=1}^{s} f_i(x)\cdot g^i(x)=F(x)$, та розв'язків лінійних рівнянь вигляду $\sum_{i=1}^{s} f_i(x)\cdot g^i(x)=0$, де невідомими є поліноми $g^i(x)$, поліноми $f_i(x)$ відомі; на коефіцієнти полінома $F(x)$ накладені деякі лінійні умови. Розв'язки останнього однорідного лінійного рівнянь називаються співвідношеннями поліномів $f(x)$.

Наукова новизна. Вдалося записати у явному вигляді всі некомутаційні співвідношення поліномів $f(x)=(f_1(x),\dots,f_{n+1}(x))$ від $x=(x_1,\dots,x_n)$ через кореневі функціонали цих поліномів у випадку, коли простір $K[x]/(f(x))_x$ скінченновимірний, та для поліномів $f(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x))$ від $x=(x_1,\dots,x_n)$ вдалося записати явний вигляд елементів $K[x]/(f(x))_x$, через кореневі функціонали цих поліномів і явний вигляд полінома з ідеалу $(f(x))_x$ через поліноми $f_i(x)$ у випадку, коли простір $K[x]/(f(x))_x$ скінченновимірний. Це дає обмеження на степінь некомутаційних співвідношень випадку $n+1$ поліномів від n змінних та обмеження на степінь елементів з $K[x]/(f(x))_x$ у випадку n поліномів від n змінних. В основному відомі підходи розв'язання задач виключення невідомих грунтуються або на розгляданні $K[x_1,\dots,x_n]$ як лінійного простору над полем K, або на розгляданні $K[x_1,\dots,x_n]$ як лінійного простору $K(x_2,\dots,x_n)[x_1]$ над полем $K(x_2,\dots,x_n)$, при цьому комутаційні сізигії постулюються додатково до аксіом лінійного простору, а природа некомутаційних сізигій взагалі лишається невідомою. При нашому підході кожному поліному співставляється n-компонентний поліноміальний вектор від двох пар змінних $x=(x_1,\dots,x_n)$ і $y=(y_1,\dots,y_n)$ та на основі визначників, над кільцем $K[x,y]$ будується вся теорія, на відміну від попередніх теорій, в яких застосовуються визначники, побудовані з коефіцієнтів поліномів $f_i(x)$ над полем K.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідалися на семінарах у Київському університеті на кафедрі алгебри у 1993-1995 роках, на конференції, присвяченій пам'яті Л.А.Калужніна в 1993 році, у Київському політехнічному інституті в 1994 році, в Інституті кібернетики ім. В.М.Глушкова у 1994-1995 роках.

Публікації. Основні результати роботи опубліковані у [1-4].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, списку літератури з 16 найменувань, п'яти глав, містить 104 сторінки машинописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі викладені основні ідеї, мотиви та мета роботи, коротка історія проблеми.

У главі I вводяться і досліджуються поняття лінійного функціонала на просторі $K[x]_{c}$ та кореневого функціонала системи поліномів від $x=(x_1,\dots x_n)$. Поняття кореневого функціонала дає геометричний опис кратного кореня. Встановлюється взаємозв'язок між розв'язками відповідної системи лінійних диференціальних рівнянь у часткових похідних з постійними коефіцієнтами та кореневими функціоналами системи поліномів через перетворення Фур'є - Лапласа; встановлюється зв'язок між многовимірними послідовностями, які задовольняють системі лінійних рекурентних співвідношень та кореневими функціоналами системи поліномів, які відповідають цим рекурентним співвідношенням.

У главі 2 визначаються поняття лінійного виразу поліномів та лінійного співвідношення поліномів, вивчаються їх елементарні властивості; дається означення комутаційного співвідношення поліномів. Далі визначаються поняття різницевого диференціала та різницевої похідної полінома. Для поліномів $f=(f_1,\dots,f_n)$ від $x=(x_1,\dots x_n)$ даються визначення різницевого Якобіана системи поліномів, поняття кореневого полінома, означення одиничного кореневого функціонала та доводятся їх властивості. Зокрема, доводиться те, що коли існує одиничний функціонал, то фактор-простір $K[x]/(f(x))_x$ - скінченновимірний; модуль кореневих функціоналів над кільцем $K[x]$ породжується одиничним функціоналом; довільний поліном $F(x)$ є сумою кореневого полінома степеня $\le \sum_{i=1}(deg(f_i)-1)$ і полінома з ідеала $(f(x))_x$; виводиться формула для вимірності фактор-простору $K[x]/(f(x))_x$. Для поліномів $f=(f_1,\dots,f_n)$ від $x=(x_1,\dots x_n)$ у випадку, коли фактор-простір $K[x]/(f(x))_x$ - скінченновимірний, доводиться існування одиничного кореневого функціоналу і те, що всі співвідношення цих поліномів комутаційні.

У главі 3 для поліномів $f=(f_1,\dots,f_{n+1})$ від $x=(x_1,\dots x_n)$ установлюється взаємозв'язок між співвідношеннями поліномів та кореневими функціоналами; доводиться основний результат роботи, тобто, що у випадку, коли фактор-простір $K[x]/(f(x))_x$ - скінченновимірний, довільне співвідношення цих поліномів є сумою кореневого співвідношення, яке має степінь $\le \sum_{i=1}^{n+1}(deg(f_i)-1)+1$, і комутаційного співвідношення.

У главі 4 розвинута теорія застосовується до систем однорідних поліномів. Для поліномів $f=(f_1,\dots,f_n)$ від $x=(x_1,\dots x_n)$ у випадку, коли фактор-простір $K[x]/(f(x))_x$ - скінченновимірний, обчислена його вимірність; доводиться, що довільний поліном степеня $> \sum_{i=1}^{n}(deg(f_i)-1)$ належить до ідеалу

$(f(x))_x$. Для поліномів $f=(f_1,\dots,f_{n+1})$ від $x=(x_1,\dots x_n)$ у випадку, коли фактор-простір $K[x]/(f(x))_x$ - скінченновимірний, доводиться, що довільне однорідне співвідношення поліномів степеня $>\sum_{i=1}^{n+1}(deg(f_i)-1)+1$ є комутаційним.

У главі 5 розглядаються алгоритмічні аспекти розвинутої в дисертації теорії. Зокрема, для поліномів $f=(f_1,\dots,f_n)$ від $x=(x_1,\dots x_n)$ розглядається взаємозв'язок між цією системою неоднорідних поліномів та системою однорідних поліномів, котра складається із старших за степенем однорідних компонент поліномів $f_i(x)$ у випадку, коли ця система однорідних поліномів має тільки корінь $x=0$. Обчислена вимірність простору $K[x]/(f(x))_x$ і тим самим доведена новим способом теорема Безу. На базі цього будується алгоритм виключення всіх змінних, крім однієї за $O(n\cdot\delta_f^{3n})$ операцій, де $\delta_f=\sum_{i=1}^{n}(deg(f_i)-1)$.

Основні положення дисертації опубліковані в таких працях:

I.Сейфуллин Т.Р. Корневые функционалы и корневые полиномы системы полиномов// Доп. НАН України. -I995. -N5. -С. 5-9.

2.Сейфуллин Т.Р. Корневые функционалы и корневые соотношения системы полиномов// Там же. -I995. -N6. -С. 7-I0.

3.Сейфуллин Т.Р. Корневые полиномы системы полиномов. - Киев, I994. -I0с.- Деп. в ГНТБ Украины. 05.08.94, N I529-Ун94.

4.Сейфуллин Т.Р. Корневые соотношения системы полиномов. - Киев, I994. -8с.- Деп. в ГНТБ Украины. 05.08.94, N I528-Ун94.

Сейфуллин Т.Р. Корневые полиномы и корневые соотношения систем полиномов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - алгебра и теория чисел, Киевский университет им. Тараса Шевченко, Киев, 1995.

Основной целью работы является исследование соотношений полиномов $f=(f_1,\ldots,f_s)$ от $x=(x_1,\ldots,x_n)$, т.е. выражений вида $\sum_{i=1}^{s}\hat{f}_i\cdot g^i(x)$, таких, что $\sum_{i=1}^{s}f_i(x)\cdot g^i(x)=0$. Коммутационными соотношениями называются соотношения вида $\sum_{p,q}\left[\hat{f}_p\cdot f_q(x)-\hat{f}_q\cdot f_p(x)\right]\cdot G^{pq}(x)$. Для $s=n+1$ установлена связь между соотношениями полиномов и линейными функционалами на $K[x_1,\ldots,x_n]$, аннулирующими идеал, порожденный полиномами $f_i(x)$. Функционалы такого вида называются в работе корневыми функционалами системы полиномов. С каждым корневым функционалом связано корневое соотношение полиномов $f_i(x)$. Доказано, что если число корней конечно, то любое соотношение полиномов есть сумма корневого и коммутационного соотношений. Коэффициенты при $\hat{f}_i$ в корневых соотношениях называются корневыми полиномами. Для $s=n$ были изучены свойства корневых полиномов. Доказано, что если число корней конечно, то любой полином равен сумме корневого полинома и полинома вида $\sum_{i=1}^{s}f_i(x)\cdot g^i(x)$. На основе полученых результатов предложен ряд алгоритмов.

Seifullin T.R. Root polynomials and root syzyges of the systems of polynomials. Master's Dissertation: Speciality 01.01.06 - Algebra and number theory, Taras Shevchenko Kiev University, 1995.

The main goal of this work is to investigate the syzyges of polynomials $f=(f_1,\dots,f_s)$ in $x=(x_1,\dots,x_n)$, which are expressions of the form $\sum_{i=1}^{s}\hat{f}_i\cdot g^i(x)$ such that $\sum_{i=1}^{s}f_i(x)\cdot g^i(x)=0$. The syzygy of the form $\sum_{p,q}\left[\hat{f}_p\cdot f_q(x)-\hat{f}_q\cdot f_p(x)\right]\cdot G^{pq}(x)$ is called the commutationary syzygy. For $s=n+1$, the connection between the syzyges of polynomials and K-linear functionals on the space $K[x_1,\dots,x_n]$ which annul the ideal of polynomials generated by polynomials $f_i(x)$ is established. Such functionals are called root functionals in the system of polynomials. Any root functional corresponds to a root syzygy. It was established that if the number of roots is finite, then any syzygy of polynomials is the sum of root syzygy and commutationary syzygy. The coefficients of $\hat{f}_i$ of root syzyges are called root polynomials. For $s=n$, it was investigated the properties of root polynomials. It was established that if the number of roots is finite, then any polynomial is the sum of root polynomial and polynomial of the form $\sum_{i=1}^{s}f_i(x)\cdot g^i(x)$. Some algoritms are proposed on the base this results.

Ключові слова: кореневий функціонал, кореневий поліном, кореневе співвідношення, комутаційне співвідношення, різницева похідна, різницевий Якобіан.

Підп. до друку 03.08.95. Формат 60x84/16. Папір для розмнож. ап. Офс. друк. Ум. друк. арк. 0,5. Ум. фарбо-відб. 0,62. Обл.-вид. арк. 0,5. Тир. 100 прим. Зам. 672.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею Інституту кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України 252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40