Киевский университет им. Тараса Шевченко

На правах рукописи

Фу Ли

УДК 519.21

付利

О СТАТИСТИЧЕСКОМ ОЦЕНИВАНИИ ИМПУЛЬСНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ ФУНКЦИЙ

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Киев – 1995

Диссертация является рукописью.

Работа выполнена на кафедре высшей математики №1 Национального технического университета "Киевский поли[illegible]

Научный руководитель – д[illegible] наук, профессор [illegible] В.В.

Официальный оппоненты – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Иванов А.В.

– кандидат физико-математических наук Кукуш А.Г.

Ведущая организация – Институт прикладной математики и механики НАН Украины (г.Донецк).

Защита состоится "20" ноября 1995 года в 14 часов на заседании специализированного совета К 01.01.21 в Киевском университете им. Тараса Шевченко по адресу: 252127, Киев-127, пр. Акад. Глушкова, 6, корпус механико-математического факультета, ауд. 42.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета.

Автореферат разослан "18" октября 1995 г.

Ученый секретарь
специализированного совета А.А.Курченко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Задача оценивания или идентификации характеристик линейных систем различной физической природы является одной из важных задач радиофизики, гидролокации, сейсмографии. Наряду с детерминированными методами исследования здесь находят широкое применение статистические методы. Различные статистические методы оценивания импульсных переходных (передаточных) функций линейных систем и свойства соответствующих оценок рассматривались в работах Д.Бриллинджера, Д.Бокса и Г.Дженкинса, А.Я.Дороговцева, А.Г.Кукуша и других математиков. Рассматриваемые в работе оценки тесно связаны с совместными коррелограммами совместно стационарных случайных процессов. Кореллограммы и совместные коррелограммы для различных классов случайных процессов и полей детально изучались в работах Т.Андерсона, Д.Бриллинджера, Р.Ю.Бенткуса, З.С.Антошевского, А.В.Иванова, Н.Н.Леоненко, В.В.Булдыгина, Ю.В.Козаченко, А.А.Дыховичного, В.В.Зайца, А.И.Стадник, А.А.Сидоренко, О.О.Демьяненко. Методы этих работ используются и развиваются в диссертации.

В диссертации рассматривается задача оценивания действительнозначной импульсной переходной функции $H(\tau),\tau \geq 0$ ($H(\tau) = 0$, $\tau=0$) непрерывной физически осуществимой однородной линейной системы. Реакция системы на допустимый входной сигнал $x(t)$, $t \in R = (-\infty,\infty)$ имеет вид:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} H(t-s)x(s)ds, t \in R$$

Пусть система возмущается стационарным центрированным действительнозначным стохастически непрерывным гауссовским случайным процессом $X_\Delta(t)$ со спектральной плотностью $f_\Delta(\lambda)$, зависящим от некоторого параметра $\Delta\in(0,\infty)$. При $\Delta\to\infty$ спектральные плотности f_Δ сходятся равномерно на ограниченных интервалах к константе $\frac{c}{2\pi}$, $c > 0$. В качестве оценки для $H(\tau)$ рассматривается совместная коррелограмма

$$\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)=\frac{1}{cT}\int_0^T X_\Delta(t)Y_\Delta(t+\tau)dt, \qquad (1)$$

где $Y_\Delta(t)$ – процесс на выходе системы. Оценка $\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)$ зависит от двух параметров T и Δ и является смещенной. Эти обстоятельства затрудняют изучение свойств оценки при $T\to\infty$, $\Delta\to\infty$ и не позволяют непосредственно воспользоваться известными фактами об асимптотических свойствах совместных коррелограмм.

Отметим еще одно существенное для диссертации обстоятельство. В работе априори не предполагается, что функция H абсолютно интегрируемая. Имеется общее ограничение $H \in L_2(R)$. Поэтому функция H^* (преобразование Фурье функции H в смысле $L_2(R)$) может быть локально неограниченной. Таким образом исследуются как устойчивые ($H \in L_1(R)$), так и неустойчивые линейные системы.

Цель работы. Нахождение условий, при которых имеет место асимптотическая нормальность для оценки импульсной переходной функции и погрешности оценивания.

Научная новизна. В работе получены следующие основные результаты:

–установлены условия асимптотической нормальности оценки импульсной переходной функции;

–установлены условия асимптотической несмещенности оценки импульсной переходной функции;

–установлены условия асимптотической нормальности погрешности оценивания импульсной переходной функции;

–установлены условия асимптотической нормальности оценки импульсной переходной функции и погрешности оценивания в пространстве непрерывных функций.

Основные результаты работы являются новыми.

Методы исследования. В работе используются методы статистики случайных процессов и спектрального анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение при оценивании или идентификации импульсных переходных функций непрерывных однородных линейных систем.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на семинарах по теории гауссовских процессов (КПИ), на международных научных конференциях по математике им. академика М.Кравчука (КПИ, 1994, 1995), на $1^{-я}$ и $2^{-я}$ Всеукраинской конференции молодых ученых (математика) (Киевский университет им. Т.Шевченко, 1994, 1995).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–3].

Структура и объем работы. Диссертация включает введение, четырнадцать параграфов и список литературы, содержащий 47 наименований. Общий объем работы 135 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, приводятся работы наиболее близкие к теме диссертации, кратко излагаются основные результаты диссертации.

В § 1 вводятся основные понятия и обозначения, а также приводятся утверждения, необходимые для основного текста.

В дальнейшем, как обычно, $L_p(R)$, $p \in [1,\infty)$ – пространство, вообще говоря, комплекснозначных функций $\varphi=(\varphi(x),\ x \in R)$, интегрируемых в $p^{-ой}$ степени: $\|\varphi\|_p = \left(\int_R |\varphi(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty$; $L_\infty(R)$ – пространство ограниченных функций: $\|\varphi\|_\infty = \sup\limits_{x\in R}|\varphi(x)| < \infty$

В § 2 вводится семейство центрированных стохастически непрерывных измеримых, сепарабельных стационарных действительнозначных гауссовских процессов $X_\Delta(t)$, $t\in R = (-\infty,\infty)$, $\Delta\in(0, \infty)$, поступающих на вход непрерывной физически осуществимой однородной линейной системы с действительнозначной импульсной переходной функцией $H(\tau)$, $\tau \geq 0$.

Пусть $f_\Delta(\lambda)$, $\lambda\in R$ – спектральная плотность процесса X_Δ, $B_\Delta(t)= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f_\Delta(\lambda)d\lambda, t \in R$ – корреляционная функция процесса X_Δ. Функция f_Δ является неотрицательной четной функцией и $f_\Delta\in L_1(R)$. Относительно спектральных плотностей f_Δ, $\Delta\in(0,\infty)$ предполагаются постоянно выполненными следующие условия:

а) $M = \sup\limits_{\Delta}\sup\limits_{\lambda}|f_\Delta(\lambda)| < \infty$;

б) для любого $a > 0$, $\lim\limits_{\Delta\to\infty}\sup\limits_{|\lambda|\leq a}\left|f_\Delta(\lambda) - \frac{c}{2\pi}\right| = 0$, где $c > 0$;

в) существует такое $\beta\geq0$, что для всех $\Delta\in(0,\infty)$ $B_\Delta \in L_{1+\beta}(R)$.

<u>Пример 2.1.</u> Пусть $f(x)$, $x \in R$ – действительнозначная неотрицательная четная функция и 1) $f(0)=\frac{c}{2\pi}>0$, 2) $f \in L_1(R)\cap L_\infty(R)$, 3) функция f непрерывна в точке $x = 0$, 4) для некоторого $\beta\geq0$ $B \in L_{1+\beta}(R)$, где $B(t)= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx, t \in R$.

Тогда функции $f_\Delta(\lambda)=f\left(\frac{\lambda}{\Delta}\right), \lambda \in R; \Delta \in(0,\infty)$ удовлетворяют условиям а) – в). Заметим, что если $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, то $\Delta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\Delta(\lambda)d\lambda = EX_\Delta^2(t)$.

Если импульсная переходная функция H такова, что

$$H \in L_{\frac{2+2\beta}{1+2\beta}}(R)\cap L_2(R) \qquad (2)$$

то для каждого $\Delta\in(0,\infty)$ корректно определен процесс

$$Y_\Delta(t)=\int_{-\infty}^{t}H(t-s)X_\Delta(s)ds,\ t\in R,$$

являющийся откликом системы на входной процесс X_Δ.

По процессам X_Δ, Y_Δ строится совместная коррелограмма $\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)$, $\tau\geq 0$ (см. (1)), которая рассматривается в качестве оценки функции H. Заметим, что $E\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)=\frac{1}{c}\int_{0}^{\infty}B_\Delta(t-s)H(s)ds\neq H(\tau)$, т.е. оценка является смещенной.

В § 3 устанавливается вид корреляционной функции оценки $\hat{H}_{T,\Delta}$.

Рассмотрим случайный процесс $Z_{T,\Delta}(\tau)=\sqrt{T}\left[\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)-E\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)\right]$, $\tau\geq 0$.

<u>Теорема 3.1.</u> Если выполнено условие (2), то для всех $T>0$, $\Delta>0$, $\tau_1,\tau_2\geq 0$

$$EZ_{T,\Delta}(\tau_1)Z_{T,\Delta}(\tau_2)=C_{T,\Delta}(\tau_1,\tau_2)=$$
$$=\frac{2\pi}{c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i(\tau_2-\tau_1)u_1}\left|H^*(u_1)\right|^2+e^{i(\tau_1u_1+\tau_2u_2)}\cdot H^*(u_1)\cdot H^*(u_2)\right]\times$$
$$\times\Phi_T(u_2-u_1)f_\Delta(u_1)f_\Delta(u_2)du_1du_2;$$

где
$$\Phi_T(x)=\frac{1}{2\pi T}\left(\frac{\sin\frac{Tx}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

В § 4 установлены условия, при которых существует предел функции $C_{T,\Delta}(\tau_1,\tau_2)$ при T, $\Delta\to\infty$ и указан вид предела.

<u>Теорема 4.1.</u> Пусть 1) $H\in L_{\frac{2+2\beta}{1+2\beta}}(R)\cap L_2(R)$; 2) существует такое $p>2$, что $H^*\in\breve{L}_p(R)$; 3) функция H^* непрерывна почти всюду (относительно меры Лебега) на R. Тогда для всех $\tau_1,\tau_2\geq 0$

$$\lim_{\substack{T\to\infty\\ \Delta\to\infty}}C_{T,\Delta}(\tau_1,\tau_2)=C(\tau_1,\tau_2)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i(\tau_2-\tau_1)u}\left|H^*(u)\right|^2+e^{i(\tau_2+\tau_1)u}\left(H^*(u)\right)^2\right]du \tag{3}$$

Следствие 4.1. Пусть в условии в) $\beta = 0$, т.е. для всех $\Delta\in(0,\infty)$ $B_\Delta\in L_1(R)$. Если $H\in L_2(R)$ и выполнены условия 2), 3) теоремы 4.1, то имеет место соотношение (3).

Замечание. Если функция H^* непрерывна на R, то условие 2) теоремы 4.1 можно опустить.

Следствие 4.2. Пусть $H\in L_1(R)\bigcap L_2(R)$, тогда имеет место соотношение (3).

В § 5 получены условия асимптотической нормальности конечномерных распределений процесса $Z_{T,\Delta}=(Z_{T,\Delta}(\tau),\ \tau\geq 0)$. Для асимптотической нормальности требуются дополнительные условия к условиям теоремы 4.1. Рассматриваются два случая, связанные с ограниченностью и неограниченностью функции H^*.

Пусть $Z=(Z(\tau),\ \tau\geq 0)$ – центрированный гауссовский процесс с корреляционной функцией, определенной в (3).

Теорема 5.1. Пусть 1) $H\in L_{\frac{2+2\beta}{1+2\beta}}(R)\bigcap L_2(R)$; 2) $H^*\in L_1(R)\bigcap L_\infty(R)$; 3) функция H^* непрерывна почти всюду на R. Тогда для всех $\tau_1, \ldots \tau_n\in[0,\infty)$; $n\geq 1$

$$\lim_{\substack{T\to\infty\\ \Delta\to\infty}} E\left[\prod_{k=1}^{n} Z_{T,\Delta}(\tau_k)\right] = E\left[\prod_{k=1}^{n} Z(\tau_k)\right] \tag{4}$$

В частности, все конечномерные распределения процесса $Z_{T,\Delta}$ сходятся при T, $\Delta\to\infty$ к соответствующим конечномерным распределениям гауссовского процесса Z.

Замечание. Если $H\in L_1(R)\bigcap L_2(R)$ и $H^*\in L_1(R)$, то имеет место утверждение теоремы 5.1.

Следствие 5.1. Пусть $\beta = 0$; $H\in L_2(R)$; $H^*\in L_1(R)\bigcap L_\infty(R)$; функция H^* непрерывна почти всюду на R. Тогда имеет место утверждение теоремы 5.1.

Если $H^{*} \notin L_{\infty}(R)$, то оказывается, что асимптотическая нормальность конечномерных распределений процесса $Z_{T,\Delta}$ имеет место при согласованном стремлении T и Δ к бесконечности. (Напомним, что ent(x) есть целая часть числа x).

Теорема 5.2. Пусть 1) $H \in L_{\frac{2+2\beta}{1+2\beta}}(R) \cap L_2(R)$; 2) существует такое $p > 2$, что $H^{*} \in L_{2p}(R)$; 3) функция H^{*} непрерывна почти всюду на R; 4) $T \to \infty$, $\Delta \to \infty$ так, что для любого натурального числа $m \geq 3$

$$\frac{\|f_\Delta\|_2^{a(m)} \|f_\Delta\|_p^{b(m)}}{T^{\frac{(m-2)(p-2)}{2p}}} \to 0 \tag{5}$$

где $a(m) = 0$, $b(m) = 1$, если $m = 3$, $a(m) = 1$, $b(m) = \mathrm{ent}(m/2) - 1$, если $m \geq 4$. Тогда имеет место соотношение (4) и, в частности, все конечномерные распределения процесса $Z_{T,\Delta}$ сходятся к соответствующим распределениям гауссовского процесса Z.

Условие (5) в конкретных ситуациях достаточно легко проверяется.

Лемма 5.2. Пусть функции f_Δ, $\Delta \in (0,\infty)$ определены в примере 2.1 и $T = \Delta^{\nu}$, $\nu > 0$. Тогда соотношение (5) эквивалентно следующему неравенству: $\nu > \frac{1}{2} + \frac{2}{p-2}$.

Заметим, что при доказательстве теорем 5.1,5.2 используются методы работ Р.Ю.Бенткуса, В.В.Булдыгина, А.А.Дыховичного.

В § 6 изучаются условия асимптотической несмещенности оценки $\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)$.

Рассмотрим условия дополнительные к условиям а) – в): параметры T и Δ стремятся к бесконечности так, что

г) $\sqrt{T}\left(1 - \frac{2\pi f_\Delta(0)}{c}\right) \to 0$;

д) для любого $\varepsilon>0$ $\sqrt{T}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}B_\Delta(t)dt\to 0$;

е) для любого $\varepsilon>0$ $\sqrt{T}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}B_\Delta^2(t)dt\to 0$.

Теорема 6.1. Пусть $H\in L_2(R)$ и точка $\tau\in[0,\infty)$ такова, что функция H удовлетворяет в точке τ условию Липшица с показателем $\alpha\in(0,1]$. Тогда, если T, $\Delta\to\infty$ так, что дополнительно к условиям г) – е) выполняется условие

ж) существует такое $\varepsilon>0$, что $\sqrt{T}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|B_\Delta(t)||t|^\alpha dt\to 0$, то

$$V_{T,\Delta}(\tau)=\sqrt{T}\left[E\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)-H(\tau)\right]\to 0.$$

На функциях, определенных в примере 2.1 проиллюстрируем условия г)–ж).

Для $\alpha\in(0,1]$ и $\rho>0$ положим $\tilde{L}_{\alpha,\rho}^{(T,\Delta)}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{T}}{\Delta^\alpha}, & \text{если}\ \alpha<\rho;\\ \dfrac{\sqrt{T}\ln\Delta}{\Delta^\alpha}, & \text{если}\ \alpha=\rho;\\ \dfrac{\sqrt{T}}{\Delta^\rho}, & \text{если}\ \alpha>\rho.\end{cases}$

Теорема 6.2. Пусть $H\in L_2(R)$ и точка $\tau\in[0,\infty)$ такова, что функция H удовлетворяет в точке τ условию Липшица с показателем $\alpha\in(0,1]$. Пусть также функции f_Δ, $\Delta\in(0,\infty)$ такие же, как в примере 2.1 и для некоторого $\rho>0$ $|B(t)|=O(|t|^{-(1+\rho)})$ при $t\to\infty$. Тогда, если T и Δ стремятся к бесконечности так, что $\tilde{L}_{\alpha,\rho}^{(T,\Delta)}\to 0$, то $V_{T,\Delta}(\tau)\to 0$.

Пример 6.1. Если в теореме 6.2 $T=\Delta^\nu$ и $0<\nu<2\min\{\alpha,\rho\}$, то при $\Delta\to\infty$ $\tilde{L}_{\alpha,\rho}^{(T,\Delta)}\to 0$.

В § 7 изучается асимптотическая нормальность нормированной погрешности оценки импульсной переходной функции, что позволяет судить о качестве оценки $\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)$. На протяжении § 7 предполагается, что в условии в) $\beta=0$.

Положим $W_{T,\Delta}(\tau)=\sqrt{T}\left[\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)-H(\tau)\right], \tau\ge 0.$

Так как $W_{T,\Delta}(\tau) = Z_{T,\Delta}(\tau)+V_{T,\Delta}(\tau)$, то из утверждений §§ 5,6 вытекают утверждения § 7. Пусть $\alpha\in(0,1]$ и $S_\alpha\subseteq[0,\infty)$ множество точек, в которых функция H удовлетворяет условию Липшица с показателем α. Обозначим $W_{T,\Delta}^{(S_\alpha)}, Z^{(S_\alpha)}$ сужения процессов $W_{T,\Delta}$, Z на параметрическое множество S_α.

<u>Теорема 7.1.</u> Пусть выполнены условия 1) – 3) теоремы 5.1 и $\alpha\in(0,1]$. Если T, $\Delta\to\infty$ так, что выполнены условия е) – ж), то все конечномерные распределения процесса $W_{T,\Delta}^{(S_\alpha)}$ сходятся к соответствующим конечномерным распределениям процесса $Z^{(S_\alpha)}$.

<u>Теорема 7.2.</u> Пусть выполнены условия 1) – 3) теоремы 5.2 и $\alpha\in(0,1]$. Если T, $\Delta\to\infty$ так, что выполнено условие 4) теоремы 5.2 и выполнены условия е) – ж), то все конечномерные распределения процесса $W_{T,\Delta}^{(S_\alpha)}$ сходятся к соответствующим конечномерным распределениям процесса $Z^{(S_\alpha)}$.

<u>Пример 7.1.</u> Пусть f_Δ, $\Delta\in(0,\infty)$ – функции, определенные в примере 2.1, а функция f(x) совпадает с одной из следующих функций:

$$\frac{1}{2\pi}e^{-x^2}, \frac{1}{2\pi}e^{-|x|}, \frac{1}{2\pi\left(1+x^2\right)}, \frac{1-|x|}{2\pi}\mathbf{1}\{|x|<1\}(x).$$

Кроме того, пусть $T = \Delta^\nu$. Тогда, если выполнены условия 1) – 3) теоремы 5.1 и $0 < \nu < 2\alpha$, то при $\Delta\to\infty$ имеет место утверждение теоремы 7.1. Соответственно, если выполнены условия 1) – 3) теоремы 5.2 и $\frac{1}{2}+\frac{2}{p-2}<\nu<2\alpha$, где p – параметр из условия 2), то при $\Delta\to\infty$ имеет место утверждение теоремы 7.2.

<u>Пример 7.2.</u> Пусть $H(\tau)=\begin{cases}0, & \tau<0;\\ \dfrac{1}{1+\tau}, & \tau\ge 0.\end{cases}$

Функция H удовлетворяет всем условиям теоремы 7.2. При этом параметр p можно выбрать произвольно из интервала $(2, \infty)$. Условиям теоремы 7.1 функция H не удовлетворряет, так как $\sup_{\lambda}\left|H^{*}(\lambda)\right| = \infty$. Поскольку для всех $\tau>0$ функция H удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha=1$, то $S_{\alpha}=(0,\infty)$. Пусть f_{Δ}, $\Delta\in(0,\infty)$ – функции из примера 7.1. Тогда, если $T = \Delta^{\nu}$ и $\nu\in(1/2,2)$, то при $\Delta\to\infty$ все конечномерные распределения процесса $(W_{T,\Delta}(\tau),\ \tau>0)$ сходятся к соответствующим конечномерным распределениям процесса $(Z(\tau),\ \tau>0)$.

В § 8 на примере функций $f_{\Delta}(x)=\frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{[-\Delta,\Delta]}(x),\ x\in R;\ \Delta\in(0,\infty)$ изучается ситуация, когда в условии в) $\beta > 0$. В теоремах 8.1, 8.2 показано, что при дополнительных предположениях относительно гладкости функции H имеют место теоремы аналогичные теоремам 7.1, 7.2.

В §§ 9–12 рассматривается задача несколько отличная от той, что рассматривалась ранее. Пусть наблюдению доступны процессы:

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{t} H(t-s)dW(s),\ t\in R,$$

$$X_{\Delta}(t)=\int_{-\infty}^{t} g_{\Delta}(t-s)dW(s),\ t\in R,$$

где $W(t)$, $t\in R$ – стандартный винеровский процесс на R, а $\Delta\in(0,\infty)$ – некоторый параметр. Предполагается, что действительнозначные импульсные переходные функции $g_{\Delta}(t)$, $t\geq 0$ известны. Требуется оценить действительнозначную импульсную переходную функцию $H(\tau), \tau\geq 0$.

Относительно функций g_{Δ} предполагаются выполненными следующие общие условия:

A) $g_{\Delta}\in L_1(R)\cap L_2(R)$, $\Delta\in(0,\infty)$;

Б) $\sup\limits_{\Delta}\|g_\Delta\|_1 < \infty$;

В) существует такое число $\tilde{c} \in R \setminus \{0\}$, что для любого a>0

$$\lim_{\Delta\to\infty}\sup_{|x|\le a}\left|g_\Delta^*(x) - \tilde{c}\right| = 0,$$

где g_Δ^* – преобразование Фурье функции g_Δ.

Пример 9.1. Пусть $g = (g(t), t\in R)$ – такая действительнозначная функция, что $g(t) = 0$ при $t < 0$, и удовлетворяющая следующим условиям: $g_\Delta\in L_1(R)\cap L_2(R)$; $\int_0^\infty g(t)dt = \tilde{c} \neq 0$. Тогда функции $g_\Delta(t)=\Delta g(\Delta t)$, $t\in R$; $\Delta\in(0,\infty)$ удовлетворяют условиям А) – В).

В качестве оценки для $H(\tau), \tau\ge 0$ рассматриваем

$$\tilde{H}_{T,\Delta}(\tau) = \frac{1}{\tilde{c}T}\int_0^T X_\Delta(t)Y(t+\tau)dt.$$

В § 10 устанавливается вид корреляционной функции процесса $\tilde{Z}_{T,\Delta}(\tau) = \sqrt{T}\left[\tilde{H}_{T,\Delta}(\tau) - E\tilde{H}_{T,\Delta}(\tau)\right], \tau \ge 0$ и находится ее предел при $T, \Delta\to\infty$.

Теорема 10.3. Пусть 1) $H\in L_2(R)$; 2) существует такое $p > 2$, что $H^*\in L_p(R)$; 3) функция H^* непрерывна почти всюду на R. Тогда для всех $\tau_1,\tau_2\ge 0$

$$\lim_{\substack{T\to\infty\\ \Delta\to\infty}} E\tilde{Z}_{T,\Delta}(\tau_1)\tilde{Z}_{T,\Delta}(\tau_2) = C(\tau_1,\tau_2),$$

где функция $C(\tau_1, \tau_2)$ определена в соотношении (3).

В § 11 рассматривается асимптотическая нормальность конечномерных распределений процесса $\tilde{Z}_{T,\Delta}$. Установлены теоремы, аналогичные теоремам 5.1, 5.2.

Пусть Z – гауссовский процесс, определенный в § 5.

Теорема 11.1. Пусть 1) $H\in L_2(R)$; 2) $H^*\in L_1(R)\cap L_\infty(R)$; функция H^* непрерывна почти всюду на R. Тогда для всех $\tau_1,\ldots,\tau_n\in[0,\infty)$; $n\ge 1$

$$\lim_{\substack{T\to\infty\\ \Delta\to\infty}} E\left[\prod_{k=1}^{n}\tilde{Z}_{T,\Delta}(\tau_k)\right]=E\left[\prod_{k=1}^{n}Z(\tau_k)\right]. \qquad (6)$$

В частности, все конечномерные распределения процесса $\tilde{Z}_{T,\Delta}$ сходятся при $T,\ \Delta\to\infty$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса Z.

Теорема 11.2. Пусть 1) $H\in L_2(R)$; 2) существует такое $p>2$, что $H^{*}\in L_{2p}(R)$; 3) функция H^{*} непрерывна почти всюду на R; 4) $T\to\infty$, $\Delta\to\infty$ так, что для любого $m\geq 3$

$$\frac{\left\|\tilde{f}_{\Delta}\right\|_2^{a(m)}\left\|\tilde{f}_{\Delta}\right\|_p^{b(m)}}{T^{\frac{(m-2)(p-2)}{2p}}}\to 0,$$

где $\tilde{f}_{\Delta}(x)=\left|g_{\Delta}^{*}(x)\right|^2$, а $a(m)$, $b(m)$ определены в теореме 5.2. Тогда имеет место соотношение (6) и, в частности, все конечномерные распределения процесса $\tilde{Z}_{T,\Delta}$ сходятся к соответствующим конечномерным распределениям процесса Z.

В § 12 устанавливаются условия асимптотической несмещенности оценки $\tilde{H}_{T,\Delta}(\tau)$ и условия асимптотической нормальности погрешности оценивания. Полученные утверждения подобны утверждениям §§ 6,7.

Рассмотрим условия, дополнительные к условиям А) – В): параметры T, Δ стремятся к бесконечности так, что:

Г) $\sqrt{T}\left(1-\dfrac{g_{\Delta}^{*}(0)}{\tilde{c}}\right)\to 0$;

Д) для любого $\varepsilon>0$ $\sqrt{T}\int_{\varepsilon}^{\infty}g_{\Delta}(t)dt\to 0$;

Е) для любого $\varepsilon>0$ $\sqrt{T}\int_{\varepsilon}^{\infty}g_{\Delta}^{2}(t)dt\to 0$.

Лемма 12.1. Пусть $H \in L_2(R)$ и точка $\tau \in [0,\infty)$ такова, что функция H удовлетворяет в точке τ условию Липшица с показателем $\alpha \in (0,1]$. Тогда, если T, $\Delta \to \infty$ так, что дополнительно к условиям Г) – Е) выполняется условие

Ж) существует такое $\varepsilon > 0$, что $\sqrt{T}\int_0^\varepsilon |g_\Delta(t)| t^\alpha dt \to 0$, то

$$\sqrt{T}\left[E\tilde{H}_{T,\Delta}(\tau) - H(\tau)\right] \to 0.$$

Пусть $\tilde{W}_{T,\Delta}(\tau) = \sqrt{T}\left[\tilde{H}_{T,\Delta}(\tau) - H(\tau)\right], \tau \geq 0$.

Теорема 12.1. Пусть выполнены условия 1) – 3) теоремы 11.1 и $\alpha \in (0,1]$. Если T, $\Delta \to \infty$ так, что выполнены условия Е) – Ж), то все конечномерные распределения процесса $\tilde{W}_{T,\Delta}^{(S_a)}$ сходятся к соответствующим конечномерным распределениям процесса $Z^{(S_a)}$.

Теорема 12.2. Пусть выполнены условия 1) – 3) теоремы 11.2 и $\alpha \in (0,1]$. Если T, $\Delta \to \infty$ так, что выполнены условия Е) – Ж), то все конечномерные распределения процесса $\tilde{W}_{T,\Delta}^{(S_a)}$ сходятся к соответствующим конечномерным распределениям процесса $Z^{(S_a)}$.

Пример 12.1. Пусть $g_\Delta(t) = 0$ при $t < 0$ и $g_\Delta(t) = \Delta e^{-\Delta t}$, $t \geq 0$; $\Delta \in (0,\infty)$. Кроме того, пусть $T = \Delta^\nu$. Тогда, если выполнены условия 1) – 3) теоремы 11.1 и $0 < \nu < 2\alpha$, то при $\Delta \to \infty$ имеет место утверждение теоремы 12.1. Соответственно, если выполнены условия 1) –3) теоремы 11.2 и $\frac{1}{2} + \frac{2}{p-2} < \nu < 2\alpha$, где p – параметр из условия 2), то при $\Delta \to \infty$ имеет место утверждение теоремы 12.2.

В §§ 13–14 изучаются условия слабой сходимости процессов $Z_{T,\Delta}$, $W_{T,\Delta}$ к процессу Z в пространстве напрерывных функций. Эти процессы считаем сепарабельными, что вполне естественно в силу их стохастической непрерывности. Пусть C[0,a] – пространство непрерывных действительнозначных функций, заданных на интервале [0,a].

Теорема 13.1. Пусть выполнены условия 1) – 3) теоремы 5.1. Если дополнительно

$$\int_{0+} H_\sigma(\varepsilon)d\varepsilon < \infty, \tag{7}$$

(где $H_\sigma(\varepsilon)$ – энтропия отрезка [0,1] относительно псевдометрики

$$\sigma(\tau_1, \tau_2) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{(\tau_2 - \tau_1)\lambda}{2} \left|H^*(\lambda)\right|^2 d\lambda\right]^{1/4}),$$

то для любого a > 0

(I) $Z \in C[0,a]$ п.н.;

(II) $Z_{T,\Delta} \in C[0,a]$ п.н., T, Δ > 0;

(III) $Z_{T,\Delta} \underset{T,\Delta\to\infty}{\overset{C[0,a]}{\Rightarrow}} Z$.

Теорема 13.2. Пусть выполнены условия 1) – 4) теоремы 5.2 и дополнительно выполнено условие (7). Тогда имеют место утверждения (I)–(III) теоремы 13.1.

Энтропийное условие (7) достаточно просто проверить.

Лемма 13.2. Пусть существует такое δ>0, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\ln(1+|\lambda|)\right]^{4+\delta} \left|H^*(\lambda)\right|^2 d\lambda < \infty.$$

Тогда имеет место соотношение (7).

Теорема 14.1 (14.2). Пусть a > 0 и функция H равномерно на [0,∞) удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha \in (0,1]$. Если выпонены условия теоремы 7.1 (или теоремы 7.2) и выполнено условие (7), то

(I) $Z \in C[0,a]$ п.н.;

(II) $W_{T,\Delta} \in C[0,a]$ п.н., T, Δ > 0;

(III) $W_{T,\Delta} \underset{T,\Delta\to\infty}{\overset{C[0,a]}{\Rightarrow}} Z$, в частности для любого ε>0

$$P\left\{\sqrt{T} \sup_{0\le\tau\le a} \left|\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) - H(\tau)\right| > \varepsilon\right\} \underset{T,\Delta\to\infty}{\to} P\left\{\sup_{0\le\tau\le a} \left|Z(\tau)\right| > \varepsilon\right\}.$$

Итоговые выводы. Таким образом установлено, что при достаточно общих предположениях оценка $\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)$ импульсной переходной функции и погрешность $\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) - H(\tau)$ обладают свойством асимптотической нормальности. Однако при этом параметры T и Δ должны стремиться к бесконечности согласованным образом. Характер этой согласованности определяется в работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1.Булдыгин В.В., Фу Ли. О статистическом оценивании импульсных переходных функций линейных систем. – Киев: Киевский политехнический институт – 1994. – 29с. Деп. в ГНТБ Украины 21.06.94. – № 1201.

2.Фу Ли. Об асимптотических свойствах оценок импульсных переходных функций линейных систем, возмущаемых стационарными гауссовскими процессами. – Киев: Киевский политехнический институт – 1994 – 20 с. Деп. в ГНТБ Украины 27.10.94. – № 2074.

3.Фу Ли. Об оценке импульсной переходной функции линейной системы, возмущаемой белым шумом. – Праці другої Всеукраїнсько конференції молодих вчених. Київ, 16–17 травня, 1995 р. Математика, стор 45–48. - Сборник деп. в ГНТБ Украины 4.09.95. – № 2034 Ук – 95.

Фу Лі. Про статистичне оцінювання імпульсних перехідних функцій. Рукопис. Дисертація на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.05 – теорія ймовірностей та математична статистика. Київський університет ім. Тараса Шевченка, Київ, 1995.

В дисертації досліджено асимптотичні властивості статистичних оцінок імпульсних перехідних функцій лінійних систем.

Fu Li. On statistical estimation of impulse transition functions. Manuscript. Thesis for a degree of Candidate of Science (Ph.D.) in Physics and Mathematics, speciality 01.01.05 – Probability Theory and Mathematical Statistics. Kiev University, Kiev, 1995.

Asymptotic properties of the statistical estimation of the impulse transition functions are investigated.

Ключові слова: статистичні оцінки, імпульсні перехідні функції, лінійні системи, гауссові процеси, асимптотична нормальність.

Підп. до друку 10.10.95. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Папір друк. № 1. Спосіб друку офсетний. Умовн. друк. арк. 0,93.
Умовн. фарбо-відб. 1,04. Обл.-вид. арк. 1,0.
Тираж 100. Зам. № 5-4352.

Фірма «ВІПОЛ»
252151, Київ, вул. Волинська, 60.