

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

ЛЕВІН ОЛЕКСАНДР МОЙСЕЙОВИЧ

РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ НЕСТІЙКИХ КРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧ
ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСУМІСНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

01.01.07 – обчислювальна математика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття наукового ступеня доктора
фізико – математичних наук

Київ – 1995

519.6
Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Донбаському університеті

ЛННБ України ім.В.Стефаника



00761404 (M)

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук, професор,

Петунін Д.І.

Офіційні опоненти:

1. Доктор фізико-математичних наук, професор, Задірака В.К.
2. Доктор фізико-математичних наук, професор, Сявавко М.С.
3. Доктор фізико-математичних наук, професор, Васил'єв Ф.П.

Провідна організація: Інститут математики НАН України, м. Київ.

Захист відбудеться "23" 11 1995 р. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.01.23 Київського університету імені Тараса Шевченка, Київ, пр. Глушкова, 2, корп. 6, ф-т кібернетики, ауд. 40. (Тел. (044-) 266-12-58. Факс 266-12-48. E-mail vprsh@icshq.univ.kiev.ua), в 14⁰⁰.

З дисертацією можна ознайомитися у Науковій бібліотеці Київського університету імені Тараса Шевченка, Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розісланий

"18" 10 1995 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради


В.П.Шевченко

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В останні десятиріччя відбувався інтенсивний розвиток теорії некоректно поставлених задач (НПЗ). Він був зумовлений практичними потребами в таких галузях, як обчислювальна томографія, гравіметрія, геофізика, нестійкі задачі управління, оптимального планування та синтезу, математичне моделювання технологічних процесів, обернені задачі теплопровідності, астрофізики, оптики та інші обернені задачі, застосовна механіка та математична фізика, теорія апроксимації, статистика, обчислювальні задачі лінійної алгебри, чисельні методи розв'язання інтегральних рівнянь.

Основи теорії некоректно поставлених задач були закладені у роботах А.М.Тихонова, М.М.Лаврентьева, В.К.Іванова. Даний напрям обчислювальної математики розвивався у працях цих авторів та в роботах В.Я.Арсеніна, О.М.Аліфанова, А.Б.Бакушинського, Г.М.Вайнікко, Ф.П.Васильєва, В.В.Васіна, В.О.Винокурова, В.В.Воеводіна, Ю.Л.Гапоненко, С.Ф.Гілязова, В.Б.Гласко, О.В.Гончарського, С.Джумаєва, П.Н.Заїкіна, В.В.Іванова, О.С.Леонова, О.А.Лисковця, В.І.Мелешко, В.О.Морозова, Д.І.Петуніна, А.Н.Пличко, І.П.Рязанцевої, В.Н.Страхова, В.П.Танани, А.М.Федотова, А.Г.Яголи, Д.Колтона, Г.Енгла, С.Грьотча, В.Камерера, М.З.Нашеда, А.Нойбауера, Д.Філіпса та багатьох інших авторів.

Згідно Адамару, задача розв'язання операторного рівняння в метричних просторах називається коректно поставленою, якщо для будь якої правої частини рівняння має єдиний розв'язок, який неперервно залежить від правої частини. Узагальненням поняття коректності у випадку несумісного операторного рівняння є існування, єдиність і стійкість його псевдорозв'язку, тобто такого елементу, який мінімізує відхилення рівняння. Аналогічно може бути сформульована коректність задачі мінімізації функціоналів загального вигляду як існування і єдиність розв'язку задачі мінімізації та його стійкість при збурюванні функціоналу.

На практиці виникає необхідність у розв'язанні задач, не задовольняючих переліченим вище вимогам коректності. Основним поняттям теорії НІЗ є запроваджене А.М.Тихоновим поняття *регуляризуючого алгоритму* (РА). В перелічених вище "аргументних НІЗ" у припущенні існування у вихідній задачі розв'язку (псевдорозв'язку) будується алгоритм знаходження по збуреним вхідним даним і деякій додатковій інформації наближеного розв'язку (псевдорозв'язку), яке наближається до шуканого у прагненні похибки вхідних даних до нуля. Методам регуляризації аргументних НІЗ присвячена переважна частина літератури у цій галузі. Серед них можна відзначити метод А.М.Тихонова, метод квазірозв'язків В.К.Іванова, метод регуляризації М.М.Лаврентьєва для рівнянь з самосполученими операторами, метод відхилю, узагальнений метод відхилю і узагальнений принцип відхилю для метода А.М.Тихонова, методи дескриптивної регуляризації, ітераційні методи регуляризації, методи регуляризації задач мінімізації функціоналів та розв'язання варіаційних нерівностей, методи статистичної регуляризації.

Розроблена велика кількість принципів вибору параметру регуляризації у методі А.М.Тихонова, таких як згаданий вище принцип відхилю і узагальнений принцип відхилю, принципи квазіоптимальності і відношення, принцип стабілізуючого функціоналу.

У роботах В.О.Винокурова, Ю.І.Петуніна, А.Н.Пличко, Є.Н.Доманського, Л.Д.Меніхеса, Н.С.Распопової досліджувались теоретичні аспекти регуляризованості відображень та суміжні питання. Велика кількість праць була присвячена поняттям оптимальності, оптимальності по порядку, асимптотичної оптимальності РА. У роботах А.Б.Бакушинського, Г.М.Вайнікко, О.Ю.Веретеннікова, О.В.Гончарського, С.Ф.Гілязова, І.В.Ємеліна, М.О.Красносельського досліджувались загальні принципи побудови РА для аргументних НІЗ, у тому числі ітераційні процедури.

Велика кількість робіт була присвячена методам скінченномірної апроксимації регуляризуючих алгоритмів аргументних НІЗ. ефективним

методам пошуку параметра регуляризації та розв'язанню НПЗ на ЕОМ. Серед них можна відзначити роботи А.Б.Бакушинського, В.В.Васіна, В.В.Воеводіна, О.В.Гончарського, В.І.Гордонової, В.В.Іванова, О.С.Леонова, В.О.Морозова, В.П.Тенани, А.Г.Яголи; роботи В.Я.Арсеніна, М.В.Ареф'євої, О.Ф.Сисоева з швидких регуляризуючих алгоритмів для рівнянь типу згортки; А.М.Тихонова, В.І.Дмитрієва, Є.В.Захарова з методів саморегуляризації розв'язання інтегральних рівнянь I роду; А.М.Тихонова, А.А.Рутіна, Г.М.Агаян з стійких методів розв'язання задач лінійного програмування; Ф.П.Васильєва з регуляризації задач мінімізації на наближено заданих множинах; а також роботи Б.Алієва, В.В.Бадевої, О.І.Гребеннікова, С.Джумаєва, О.Ю.Іваницького, В.О.Кармазіна, В.Н.Трушнікова, Г.Енгла, Г.Гфререра, С.Грьотча, А.Нойбауера, В.Камерера, М.З.Нашеда.

Із зробленого вище стислого огляду можна зробити висновок, що теорія аргументних НПЗ та методи їх регуляризації надто розвинуті і достатньо всебічно вивчені та широко вживаються на практиці.

Однак, крім аргументних НПЗ існує клас так званих нестійких "критеріальних" задач (НКЗ) (або нестійких "за функціоналом" задач), які до теперішнього часу були мало вивчені. До них відносяться нестійкі задачі обчислення нижніх меж функціоналів та побудови мінімізуючих послідовностей для них без припущення про існування точного розв'язку задачі мінімізації; виникаюча при оцінці адекватності математичних моделей задача обчислення міри несумісності операторних рівнянь; деякі нестійкі задачі управління та ряд задач теорії апроксимації. Задачі даного типу виникають у методах інтегральних рівнянь Фредгольма I роду для розв'язання еліптичних рівнянь та в обернених задачах теплопровідності. Вищесказане робить актуальною проблему побудови теорії нестійких критеріальних задач та створення для них спеціальних регуляризуючих за функціоналом алгоритмів. З цим типом нестійких задач тісно пов'язані некоректні аргументні задачі для не-

сумісних операторних рівнянь, методи регуляризації яких потребують подальшого розвитку. Для лінійних несумісних операторних рівнянь дуже перспективним є підхід побудови РА, які не поліпшуються на класах еквівалентних за точністю вхідних даних. У випадку нормально розв'язуваних операторних рівнянь він веде до оптимальних за порядком алгоритмів, похибка яких за порядком прирівнюється до порядку похибки наближення оператора та правої частини.

Ціллю дисертаційної роботи є:

- розробка та дослідження нового напрямку методів регуляризації некоректних задач - теорії нестійких критеріальних задач (НКЗ), яка містить в собі нестійкі задачі обчислення нижніх меж функціоналів, обчислення міри несумісності лінійних та нелінійних операторних рівнянь, задачі побудови за наближеною інформацією мінімізуючих послідовностей функціоналів загального вигляду та функціоналів відхилення операторних рівнянь, нестійкі задачі управління, задачі обчислення значень функціоналів на розв'язках операторних рівнянь, критеріальні задачі теорії апроксимації;

- означення поняття "регуляризуючого за критерієм алгоритму" (РКА) для різних класів НКЗ, будівництва та дослідження методів критеріальної регуляризації НКЗ;

- створення ефективних методів чисельної реалізації РКА та їх скінченномірної апроксимації;

- розвиток та дослідження методів регуляризації розв'язання несумісних операторних рівнянь та використання в них РКА, побудова ефективних регуляризуючих алгоритмів для нормально розв'язуваних рівнянь та задач псевдообернення;

- розробка програмного забезпечення ЕОМ для розв'язання НКЗ;

- застосування розроблених методів регуляризації НКЗ у розв'язанні різних типів обернених задач теплопровідності та в методах еліптичних граничних задач за допомогою інтегральних рівнянь I роду.

Наукова новина результатів, які захищаються у роботі, полягає в тому, що вивчено новий напрямок теорії некоректно поставлених задач - нестійкі критеріальні задачі:

- для критеріальних задач мінімізації функціоналів загального вигляду сформульовано поняття критеріальної стійкості, розроблені РКА для задач обчислення нижніх меж функціоналів та стійкого за функціоналом будування мінімізуючих послідовностей;

- вивчена задача обчислення міри несумісності операторних рівнянь (лінійних та нелінійних), досліджені властивості міри несумісності, одержані необхідні та достатні умови її неперервності для лінійних рівнянь, сформульовано поняття регуляризуючого алгоритму для цієї задачі та побудований такий РКА ("метод найменшої оцінки відхилу" - МНОВ), що дає оцінку зверху для міри несумісності, яка не поліпшується на класі еквівалентних за точністю вхідних даних;

- сформульована та вивчена "узагальнена задача управління", дано нове поняття її критеріальної стійкості та запроваджене означення РКА для неї; знайдені необхідні та достатні умови стійкості узагальненої задачі управління для лінійних операторних рівнянь у нормованих просторах та з'ясовано зв'язок цієї задачі і аргументних задач; доведена збіжність МНОВ при регуляризації даної задачі;

- побудовані ефективні методи реалізації МНОВ для задач без обмеження, засновані на методі регуляризації А.М.Тихонова з новим принципом вибору параметра регуляризації; вивчені прямі градієнтні методи для регуляризації задач з обмеженнями; досліджені питання скінченномірної апроксимації та чисельної реалізації РКА;

- розглянуті методи регуляризації ряду НКЗ теорії апроксимації та обчислення функціоналів на розв'язках операторних рівнянь;

- досліджено ряд питань стійкого розв'язання несумісних операторних рівнянь та використання у таких задачах РКА; одержані нові оцінки параметра регуляризації в узагальненому принципі відхилу як

для сумісних, так і для несумісних рівнянь, які повністю обчислюються за вхідними даними; запропоновані нові завжди збіжні в МНОВ та в узагальненому принципі відхилю модифікації методів Ньютона та січних для пошуку параметра регуляризації;

- дано розвиток методу регуляризації нормально розв'язуваних рівнянь та задач псевдообернення матриць і нормально розв'язуваних операторів.

Практична цінність результатів, що містить робота, складається з того, що :

- розроблені РКА вжиті для розв'язання обернених задач теплопровідності, у тому числі оберненої задачі Стефана управління режимами кристалізації металу у виливницях, а також у методах розв'язання еліптичних граничних задач за допомогою інтегральних рівнянь I роду або методу неортогональних рядів (фундаментальних розв'язків);

- створений комплекс програм RegulF алгоритмічною мовою FORTRAN для розв'язання нестійких критеріальних задач та несумісних операторних рівнянь на ЕОМ;

- результати дисертаційної роботи застосовуються у навчальному процесі Донбаського гірничо-металургійного інституту.

Апробація роботи. Результати досліджень, які увійшли до дисертації, були докладені та отримали позитивну оцінку на Міжнародній конференції "Некоректно поставлені задачі у природних науках" (Москва, 1991 р.), Міжнародній конференції "Теорія наближення та задачі обчислювальної математики" (Дніпропетровськ, 1993 р.), VI Міжнародному симпозіумі "Метод дискретних особливостей у задачах математичної фізики" (Харків, 1993 р.), I Міжнародній конференції "Чисельні методи у гідравліці та гідродинаміці" (Маріуполь, 1994 р.), Всесоюзних симпозіумах "Метод дискретних особливостей у задачах математичної фізики" (Харків, 1985, 1987 рр.), Республіканській науково-технічній конференції "Ефективні чисельні методи розв'язання крайових задач

механіки твердого тіла, яке деформується" (Харків, 1989 р.), Республіканській конференції "Обернені задачі у природознавстві" (Москва, 1994 р.), семінарі "Оптимізація методів розв'язання задач обчислювальної математики" Наукової ради НАН України за проблемою "Кібернетика" (Київ, Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова, 1994 р.), семінарі "Оптимізація методів наближення" Інституту математики НАН України (Київ, 1994 р.); семінарі кафедри обчислювальної математики факультету кібернетики КДУ (Київ, 1994 р.), семінарах "Обернені та некоректні задачі" факультету обчислювальної математики та кібернетики Московського державного університету та наукових семінарах Науководослідного обчислювального центру МДУ (Москва, 1984, 1986, 1987 рр.), науковому семінарі з некоректних задач Інституту математики та механіки Уральського відділення Російської Академії наук (Єкатеринбург, 1992 р.), Всеросійській конференції "Алгоритмічний та чисельний аналіз некоректних задач" (Єкатеринбург, 1995 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані у 25 роботах, наведених у кінці автореферату.

Структура та обсяг дисертації: Дисертація містить вступ, чотири глави, висновок та список літератури з 258 найменувань, приклад з описом пакета програм RegulF для ЕОМ. Обсяг роботи – 237 сторінок, в тому числі 15 малюнків та 29 сторінок приклада.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

Вступ містить короткий огляд літератури та стан питань, які розглядаються у дисертації. Обґрунтована актуальність теми та сформульовані основні наукові результати дисертації.

Вперше задача про стійке обчислення міри несумісності операторних рівнянь була поставлена В.О.Морозовим. Ним був запропонований один регуляризуєчий алгоритм для її розв'язування у випадку лінійних рівнянь у гільбертових просторах. Задачі обчислення нижніх меж функ-

ціоналів загального вигляду без припущення про аргументну розв'язуваність задач мінімізації ставились у роботах А.М.Тихонова, В.Я.Арсеніна, Ф.П.Васильєва. Деякі питання регуляризації обчислення нижніх меж функціоналів при розв'язанні некоректних екстремальних задач розглядалися у роботах О.С.Леонова.

Нестійкі критеріальні задачі виникають в обернених задачах теплопровідності (ОЗТ), вивчення яких підіймається до робіт А.М.Тихонова, Ф.Джона та інших авторів. Для обернених за часом задач теплопровідності (ретроспективних ОЗТ) та ОЗТ управління граничними умовами не завжди існує точний розв'язок задачі, тобто така початкова температура або граничний режим, котрий для заданого моменту часу зводили б до необхідного розподілу температури тіла. Тому виникає задача знаходження наближеного за критерієм (за функціоналом відхилю між шуканою та набутою температурою в кінцевий момент часу) розв'язку задачі з необхідною точністю. У зв'язку з методом квазіобернення Ж.-Л.Ліонса, Р.Латтеса, для розв'язування обернених задач теплопровідності В.К.Івановим була сформульована так звана "нестійка задача управління", яка далі досліджувалась також у роботах Є.Н.Доманського, Н.С.Распопової. Для неї було впроваджено та досліджено цими авторами поняття J -регуляризованості. Однак, для нестійких задач управління не були побудовані регуляризуючі алгоритми при наявності помилок в операторах, і в даних роботах розглядалися тільки рівняння, у яких міра несумісності дорівнює нулю. Невивченими також залишились нестійкі задачі управління з обмеженнями на розв'язок. Різні модифікації методу квазіобернення вивчалися у роботах С.Джумаєва, Д.Колтона, Л.Елдена, А.С.Карассо, Д.Г.Сандерсона, Д.М.Хімена та інших авторів. Алгоритми розв'язання ОЗТ, засновані на зведенні ОЗТ до нелокальних параболічних задач, розглядалися у роботах П.Н.Васіщевіча, Б.Г.Карасика. Різні ітераційні процедури, в тому числі градієнтні методи регуляризації ОЗТ, вивчалися О.М.Аліфановим, Є.О.Артюхіним,

С.В.Румянцевим. Дослідження стійкості розв'язків ОЗТ на класах невід'ємних функцій виконувались Є.О.Григорьевим. Обернені задачі Стефана та методи їх регуляризації розглядались у роботах Н.Л.Гольдман, П.Йохума, Р.Реємстена, А.Кірча.

Важливою галуззю обчислювальної математики, в якій виникають НКЗ, є методи розв'язання еліптичних граничних задач за допомогою інтегральних рівнянь Фредгольма I роду. В теорії пружності та інших задачах механіки такий підхід під назвою "метода компенсуючих навантажень" вивчався у роботах Б.Г.Коренева, Е.С.Венцеля, З.Христіансена, а під назвою метода "джерел та стоків" - у роботах Х.А.Рахматуліна. Дані методи та споріднені їм методи неортогональних рядів або фундаментальних розв'язків в задачах теорії дифракції широко вживались А.Г.Свешніковим, Д.А.Єрьоміним. Ці методи для різних класів еліптичних задач вивчалися у роботах В.Д.Купрадзе, М.А.Алексідзе, Г.Х.Пергамент, І.І.Кочетова, Г.Де Мея, Р.Масона, Р.Л.Джонстона. У методах інтегральних рівнянь I роду та фундаментальних розв'язків наближений розв'язок вихідної еліптичної граничної задачі шукається у вигляді потенціалу з щільністю, яка розподіляється не на межі області, а на деякому віддаленні від неї. При підстановці потенціалів у граничні умови будь якого типу виходять інтегральні рівняння Фредгольма I роду або інтегро-функціональні рівняння, які можуть мати лише наближені розв'язки. Тому виникають НКЗ мінімізації норми відхилення інтегральних рівнянь I роду в умовах наближеного обчислення ядер та правих частин рівнянь і при можливій розбіжності самих щільностей потенціалів. Для деяких граничних задач міра несумісності інтегральних рівнянь може бути більша за нуль і потрібні стійкі алгоритми її оцінки, а також PRA побудови мінімізуючих послідовностей для функціоналів відхилення.

Деякі критеріальні регуляризуючі алгоритми в нестійких за функціоналом задачах автоматичного регулювання (аналогічні квазіопти-

мальному принципу вибору параметра регуляризації) вивчалися у роботах В.О.Морозова, В.В.Бадевої. До збіжних за функціоналом методів регуляризації інтегральних рівнянь I роду відноситься також метод І.І.Кочетова вибору параметра регуляризації за мінімумом відхилю у проміжних точках, а також метод перехресної перевірки Г.Вахи. До нестійких критеріальних задач тісно примикають нестійкі задачі обчислення функціоналів на розв'язках операторних рівнянь I роду, які розглядались у роботах М.К.Ліхта, В.О.Морозова, О.І.Гребеннікова. У роботах В.О.Морозова, В.О.Кармазіна, О.Ю.Іваницького розглядались методи визначення "чебишовських псевдорозв'язків" систем лінійних алгебраїчних рівнянь при поточечному завданні похибки коефіцієнтів та регуляризуючий алгоритм обчислення "чебишовської міри несумісності" таких систем.

Різні нестійкі критеріальні задачі виникають в теорії апроксимації у деяких задачах методу найменших квадратів, задачах оцінки лінійних функціоналів за наближеним значенням інших функціоналів, задачах оптимального відновлення за наближеними даними. У зв'язку з великою кількістю робіт, зв'язаних з цим колом питань, згадаємо лише роботи М.С.Бахвалова, М.П.Корнійчука, А.Г.Марчука, К.Ю.Осипенка, М.П.Жидкова, Ю.А.Білова, В.С.Кас'янюк, В.Л.Макарова, В.В.Хлобистова, С.В.Переверзева, В.Камерера, М.З.Нашеда, А.Мелкмана, С.А.Мічеллі, Т.Рівліна.

У цей час інтенсивно розвиваються методи регуляризації несумісних операторних рівнянь. Вони досліджувались у роботах В.О.Морозова, А.Г.Яголи, І.В.Кочікова, А.Н.Матвієнка, О.В.Гончарського, В.В.Степанова, Б.Алієва; ітераційні алгоритми розв'язання несумісних задач вивчалися у роботах О.М.Аліфанова, Є.О.Артихіна, С.В.Румянцева, С.Ф.Гілязова, Г.М.Вайнікко, О.Ю.Веретеннікова, А.Б.Бакушинського, О.В.Гончарського; оптимальні за порядком методи розв'язання несумісних нормально розв'язуваних рівнянь були розроблені В.О.Морозовим, С.Ф.

Гілязовим, С.Джумаєвим та досліджувались у роботах Г.М.Вайнікко, О.Ю.Веретеннікова (двоетапна схема), Р.А.Розанова (одноетапна схема). З методів регуляризації некоректних несумісних задач лінійної алгебри та псевдообернення матриць ми відзначемо метод мінімальної псевдооберненої матриці О.С.Леонова.

У першій главі розглядаються основні означення теорії нестійких критеріальних задач та їх властивості.

У § 1.1 наводяться відповідні означення теорії аргументних НІЗ та деякі регуляризуючі алгоритми, необхідні надалі для будування та порівняння з означеннями НКЗ. Розглядається розв'язання операторного рівняння I роду у нормованих просторах Z і U з неперервним оператором $A_0: Z \rightarrow U$

$$A_0 z = u_0, \quad z \in Z, \quad (1.1)$$

у припущенні існування у нього розв'язку z_0 , а також задача знаходження псевдорозв'язку $\bar{z}_0^D$ рівняння (1.1) на множині $D \subseteq Z$ при апіорному припущенні його існування

$$\bar{z}_0^D = \operatorname{argmin}_{z \in D} \|A_0 z - u_0\|. \quad (1.2)$$

Для важливого класу лінійних рівнянь з операторами A_0 із нормованого простору $L = L(Z, U)$ лінійних неперервних операторів, діючих із Z в U , сформульовано твердження про існування та єдиність відповідно нормального розв'язку (1.1) та нормального псевдорозв'язку (1.2) у випадку рефлексивності та строгої опуклості Z , а також замкненості та опуклості D . Наведені означення РА для цих задач при їх розв'язуванні за наближеними вхідними даними $A_n \in L$, $u_n \in U$ та відомими точностями наближення $\eta = (h, \delta) \geq 0$

$$\|A_n - A_0\| \leq h, \quad \|u_n - u_0\| \leq \delta \quad (1.3)$$

у випадку лінійних задач, та за неперервним оператором $A_n: Z \rightarrow U$ і правою частиною $u_n \in U$, задовольняючим у нелінійному випадку умовам

$$\|A_n z - A_0 z\| \leq \varphi(h, \|z\|), \quad \|u_n - u_0\| \leq \delta \quad (1.4)$$

з відомою мірою точності наближення оператора $\varphi(x, y)$, неперервній та

невід'ємний при $x, y \geq 0$, монотонно неспадний по y та підпорядкований умові $\Psi(0, y) = 0$ для $\forall y \geq 0$. Сформульована також НІЗ мінімізації функціоналів $f_0(z)$ загального вигляду на $D \subset Z$ за наближеними вхідними даними $f_\eta(z)$, $\eta \geq 0$, задовольняючими умовам

$$|f_\eta(z) - f_0(z)| \leq \Psi(\eta, \Omega(z)), \quad (1.5)$$

де $\Omega(z)$ - так званий "стабілізуєчий" функціонал, запроваджений А.М.Тихоновим, $\eta \in \mathbb{R}_+^k$ - задані параметри похибки наближення.

Розглядені деякі РА для аргументних НІЗ, в тому числі метод А.М.Тихонова, узагальнений метод відхилю (УМВ), узагальнений принцип відхилю (УПВ) та їх модифікації для розв'язання сумісних лінійних та нелінійних операторних рівнянь у рефлексивних просторах.

У § 1.2 формулюється нестійка критеріальна задача 1.1 про обчислення міри несумісності операторних рівнянь (1.1) на $D \subset Z$

$$\mu^D[A_0, u_0] = \inf_{z \in D} \|A_0 z - u_0\| \quad (1.6)$$

без припущення про існування розв'язку задачі мінімізації (1.2). Для лінійних рівнянь позначимо як $W = L(Z, U) \times U$ простір вхідних даних задачі, при цьому позначимо $p = (A, u) \in W$.

Означення 1.11. Назвемо задачу обчислення міри несумісності (1.6) стійкою у точці $p_0 = (A_0, u_0)$, якщо функція $\mu^D[A, u]$ неперервна у цій точці як функція від своїх вхідних даних $p \in W$.

Відмітимо такі відомі властивості міри несумісності:

Лема 1.1. Функція $\mu^D[A, u]$ є невід'ємною, у загальному випадку розривною функцією від $p = (A, u)$, але неперервною по другому аргументу $u \in U$ при фіксованому операторі $A \in L$.

Для НКЗ 1.1 потребуються спеціальні регуляризуючі за функціоналом алгоритми обчислення (1.6) за наближеними вхідними даними (1.3).

Означення 1.12. Регуляризуючі за критерієм алгоритми (РКА) розв'язування НКЗ 1.1 назвемо двопараметричною сім'єю функцій

$r_\eta(A_h, u_h): L \times U \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\eta = (h, \delta)$, $0 < \delta \leq \delta_0$, $0 < h \leq h_0$, таку, що для кожного $p_0 = (A_0, u_0) \in W$ виконується співвідношення

$$u_\delta \in U, \|u_\delta - u_0\| \leq \delta, A_n \in L, \|A_n - A_0\| \leq h \quad |r_\eta(A_n, u_\delta) - \mu^D[A_0, u_0]| \xrightarrow[\eta \rightarrow 0]{} 0.$$

нажучи другими словами, повинна виконуватися рівність

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} r_\eta(A_n, u_\delta) = \mu^D[A_0, u_0]. \quad (1.7)$$

Аналогічно формулюється РКА для нелінійних рівнянь. Задачу 1.1 назвемо *регуляризуемою*, якщо для неї знайдеться хоча б один РКА.

Аналогічно теорії аргументних НІЗ, запроваджуються поняття *точності та оптимальності РКА*. Під *методом* розв'язання критеріальної задачі 1.1 ми будемо розуміти будь яке відображення $\gamma: W \rightarrow R^1$, яке зіставляє вхідним даним $p_\eta = (A_n, u_\delta)$ наближене значення $\gamma(p_\eta)$ міри несумісності на D рівняння (1.1). *Точність методу* γ в точці p_0 характеризується *наближення відбитення*

$$\phi(\eta, p_0, \gamma) = \sup_{u_\delta \in U, \|u_\delta - u_0\| \leq \delta, A_n \in L, \|A_n - A_0\| \leq h} |\gamma(p_\eta) - \mu^D[A_0, u_0]|,$$

а *похибка методу* γ на множині $E \subset W$ означається як

$$\phi(\eta, E, \gamma) = \sup_{p \in E} \phi(\eta, p, \gamma). \quad (1.8)$$

Означення 1.13. Метод γ_η називається *оптимальним* на E , якщо

$$\phi(\eta, E, \gamma_\eta) = \inf_{\gamma} \phi(\eta, E, \gamma);$$

а *асимптотично оптимальним* на E , якщо

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\phi(\eta, E, \gamma_\eta) / \inf_{\gamma} \phi(\eta, E, \gamma) \right) = 1;$$

оптимальним по порядку на E , якщо

$$\phi(\eta, E, \gamma_\eta) \leq C \cdot \inf_{\gamma} \phi(\eta, E, \gamma), \quad C > 0, \quad 0 < \eta \leq \eta_0.$$

Визначним для побудови РКА задачі 1.1 є така доведена в роботі властивість міри несумісності $\mu^D[A, u]$:

Теорема 1.1. Міра несумісності $\mu^D[A, u]$ *півнеперервна зверху* у будь якій точці $p_0 \in W$, тобто виконується співвідношення

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\sup_{A \in L, \|A - A_0\| \leq h, u \in U, \|u - u_0\| \leq \delta} \mu^D[A, u] \right] \leq \mu^D[A_0, u_0]. \quad (1.9)$$

Із цієї теореми випливає ряд властивостей міри несумісності.

Висновок 1.1. Якщо виконується рівність

$$\mu^D[A_0, u_0] = 0, \quad (1.10)$$

тоді функція $\mu^D[A, u]$ неперервна у точці (A_0, u_0) , тобто задача 1.1 стійка у цій точці.

Висновок 1.2. Якщо множина $D \subset Z$ обмежена, тоді функція $\mu^D[A, u]$ неперервна у будь якій точці $(A_0, u_0) \in W$.

У дисертації одержані необхідні та достатні умови стійкості задачі 1.1 для лінійних операторних рівнянь на всьому просторі Z (при $D = Z$ величину (1.6) будемо позначати просто $\mu[A_0, u_0]$). Одна достатня умова стійкості наведена у висновку 1.1 при $D = Z$. Критерій стійкості доводиться за допомогою такого твердження.

Лема 1.3. Існування у оператора $A_0 \in L$ ϵ -околу, кожний лінійний неперервний оператор A з якого має тривіальне ядро $\text{Ker } A = \{0\}$, еквівалентне існуванню такого додатного числа λ_0 , що для всіх елементів з простору Z виконується нерівність

$$\|A_0 z\| \geq \lambda_0 \|z\|, \quad \lambda_0 > 0, \quad \forall z \in Z. \quad (1.11)$$

Умова (1.11) позначає, що оператор A_0 відображає простір Z на свій образ $\text{Im } A_0 \subset U$ взаємно однозначно та взаємно неперервно.

Теорема 1.2 (Критерій стійкості задачі 1.1). Для неперервності функції $\mu[A, u]$ у точці $(A_0, u_0) \in W$ необхідно й досить, щоб виконувалась рівність $\mu[A_0, u_0] = 0$ або щоб оператор A_0 відображав простір Z на свій образ $\text{Im } A_0 \subset U$ взаємно однозначно та взаємно неперервно (тобто виконувалась би умова (1.11)).

З теореми 1.2 виходить, що для несумісних лінійних операторних рівнянь (1.1), коли $\mu[A_0, u_0] > 0$, стійкість критеріальної задачі 1.1 практично еквівалентна коректності аргументної задачі (1.2) (при деяких додаткових припущеннях відносно просторів Z та U).

Далі досліджені деякі властивості міри несумісності нелінійних рівнянь (1.1).

Теорема 1.3. Функція $\mu^D[A, u]$ "півнеперервна зверху" у будь якій точці (A_0, u_0) , тобто виконується співвідношення

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \sup_{\|A - A_0\| = \eta, \|z\| = 1, u \in U, \|u - u_0\| \leq \delta} \mu^D[A, u] \leq \mu^D[A_0, u_0]. \quad (1.12)$$

де δ вир робиться варіювання за будь якими неперервними оператора-ми A , що задовольняють (1.4).

Відповідно, для нелінійних неперервних операторів виконуються аналогі висновків 1.1 і 1.2.

У теорії некоректно поставлених задач для лінійних операторних рівнянь з обмеженими операторами звичайно розглядається збіжність наближених операторів до точного за нормою простору $L(Z,U)$. В критеріальній задачі 1.1 обчислення міри несумісності лінійних операторних рівнянь також припускалась збіжність операторів за нормою простору $L(Z,U)$. Однак, деякі властивості $\mu^D[A,u]$ вірні при сильній збіжності наближених операторів до точного оператора A_0 . Зокрема, лишається вірним твердження про її півнеперервність зверху.

Теорема 1.1'. Нехай довільна послідовність операторів $\{A_n\}$, $A_n \in L$, сильно збігається до оператора $A_0 \in L$ ($\|A_n z - A_0 z\| \rightarrow 0$ для будь якого $z \in Z$ при $n \rightarrow \infty$) та послідовність елементів $\{u_n\}$, $u_n \in U$, збігається до $u_0 \in U$ ($\|u_n - u_0\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$). Тоді вірна нерівність, аналогічна (1.9):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^D[A_n, u_n] \leq \mu^D[A_0, u_0].$$

З цієї теореми випливає і аналог висновку 1.1:

Висновок 1.1'. Якщо вірне рівняння (1.10), то міра несумісності $\mu^D[A,u]$ неперервна у точці (A_0, u_0) при збіжності операторів у сильній операторній топології та правих частин за нормою простору U .

У § 1.3 формулюються та досліджуються задачі обчислення нижніх меж функціоналів загального вигляду та будування мінімізуючих послідовностей для них за наближеною інформацією також без припущення про існування розв'язку у точній задачі мінімізації.

Критеріальна задача 1.2. Обчислити нижню межу на множині D функціоналу $f_0(z)$:

$$\mu^D[f_0] = \inf_{z \in D} f_0(z). \quad (1.13)$$

Задача 1.2 є узагальненням задачі 1.1. Наприклад, для задачі

1.1 стабілізує функціонал дорівнює $\Omega(z) = \|z\|$, похибка наближення визначається виразом $\Psi(\eta, \Omega(z)) = h\|z\| + \delta$ та умова (1.5) має вигляд $\|A_\eta z - u_\delta\| - \|A_0 z - u_0\| \leq h\|z\| + \delta$.

Впроваджується множина $\Sigma_\eta^F = \Sigma_\eta^F(f_0)$ "α-еквівалентних за точністю" функціоналів з деякого заданого класу функціоналів F :

$$\Sigma_\eta^F = \{ f_\eta \in F: |f_\eta(z) - f_0(z)| \leq \Psi(\eta, \Omega(z)), \forall z \in D \}.$$

Означення 1.14. Задачу 1.2 назвемо α-стійкою відносно похибок у вхідних даних для функціоналу $f_0(z)$, якщо виконується рівність

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\sup_{f_\eta \in \Sigma_\eta^F} |\mu^D[f_\eta] - \mu^D[f_0]| \right] = 0. \quad (1.14)$$

Умова (1.14) фактично означає, що для стійкої задачі 1.2 нижня межа "наближеного" функціоналу прагне до нижньої межі вихідного функціоналу при прагненні похибки наближення до нуля.

Означення 1.15. Регуляризує по критерію алгоритмом (РКА) задачі 1.2 назвемо параметричну сім'ю функцій $r_\eta(f_\eta): F \rightarrow \mathbb{R}^1$, $0 < \eta \leq \eta_0$, таку що для кожного $f_0 \in F$ виконується співвідношення

$$\sup_{f_\eta \in \Sigma_\eta^F} |r_\eta(f_\eta) - \mu^D[f_0]| \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0. \quad (1.15)$$

Для задачі 1.2 доведена "півнеперервність зверху" нижньої межі функціоналів.

Теорема 1.4. Функція $\mu^D[f]$ "α-півнеперервна зверху" у будь якій точці $f_0 \in F$, тобто вірна нерівність

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\sup_{f_\eta \in \Sigma_\eta^F} \mu^D[f_\eta] \right] \leq \mu^D[f_0]. \quad (1.16)$$

Далі розглянута нова НКЗ, відмінна від задачі 1.2. Звичайно, як наближене значення нижньої межі обирають значення функціоналу $f_0(z)$ на деяких елементах мінімізуючих послідовностей (м. п.), та якраз будування м. п. відповідних функціоналів у випадку відсутності точних розв'язків аргументних задач мінімізації грає першорядну роль в таких галузях, як ОЗТ і методи інтегральних рівнянь I роду.

Критеріальна задача 1.3. Побудувати мінімізуючу послідовність

функціоналу $f_0(z)$ на множині D , тобто таку послідовність $\{z_n\}$, $z_n \in D$, для якої виконується співвідношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_0(z_n) = \inf_{z \in D} f_0(z) = \mu^0[f_0], \quad z_n \in D. \quad (1.17)$$

При цьому сама м. п. $\{z_n\}$ може розбігатися, так як не припускається існування елемента $\bar{z}_0 \in D$, на якому досягається мінімум функціоналу $f_0(z)$ на множині D .

Нехай нам дана аппроксимуєча послідовність функціоналів з F , $f_{\eta_n}(z) \in F$, $\eta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, яка для кожного n задовольняє умові (1.5) з величиною похибки $\eta_n \geq 0$. Та нехай для довільної послідовності чисел $\{\epsilon_n\}$, $\epsilon_n > 0$, $\epsilon_n \rightarrow 0$, побудована послідовність елементів $\{z_n\}$, $z_n \in D$, задовольняючих умовам

$$f_{\eta_n}(z_n) - \inf_{z \in D} f_{\eta_n}(z) \leq \epsilon_n. \quad (1.18)$$

Тоді природньо вважати задачу будування м. п. функціоналу $f_0(z)$ стійкою за критерієм до похибки у вхідних даних, якщо така послідовність $\{z_n\}$, одержана у результаті все більш точного розв'язання аппроксимуєчих задач мінімізації, буде м. п. функціоналу $f_0(z)$:

Означення 1.16. Задачу 1.3 побудови м. п. функціоналу $f_0(z)$ на множині D назвемо критеріально стійкою, якщо для будь якої послідовності $\eta_n \rightarrow 0$, $\eta_n \geq 0$, та будь якої послідовності функціоналів $f_{\eta_n}(z) \in F$, задовольняючих для кожного n (1.5), а також для довільної послідовності чисел $\{\epsilon_n\}$, $\epsilon_n > 0$, $\epsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, та будь якої послідовності елементів $\{z_n\}$, $z_n \in D$, задовольняючих (1.18), буде виконуватися співвідношення (1.17) (тобто $\{z_n\}$ буде м. п. вихідного функціоналу $f_0(z)$ на D).

Нижче показується, що далеко не усяка задача 1.3 критеріально стійка та її рішення потребує спеціальних методів регуляризації.

Означення 1.17. Регуляризуючим за критерієм алгоритмом (РКА) задачі 1.3 назвемо відображення $R_{\eta,n}(f_{\eta}): H \times N \times F \rightarrow D \subseteq Z$ (H - множина значень похибки: $\eta \in H = R_+^k$, N - множина натуральних

чисел), яке має такі властивості:

1) існує таке $\eta_0 > 0$, $\eta_0 \in H$, що $R_{\eta,n}(f_\eta)$ визначено для будь-яких $n \in \mathbb{N}$, $\eta \in H$, $0 \leq \eta \leq \eta_0$, і $f_\eta \in F$, задовольняючих умові (1.5);

2) для будь-якої послідовності (η_n) , $\eta_n \in H$, $0 \leq \eta_n \leq \eta_0$, $\eta_n \rightarrow 0$, та відповідних даних $f_{\eta_n} \in F$, задовольняючих для кожного η_n умову (1.5), послідовність елементів $z_n = R_{\eta_n,n}(f_{\eta_n})$ є мінімізуючою послідовністю відповідного функціоналу $f_0(z)$ на множині D , для якої вірне (1.17).

Залежність оператора $R_{\eta,n}(f_\eta)$ від натурального n та можливої рівності усіх η_n нулеві в означенні 1.17 забезпечує включення у загальну схему також алгоритмів побудови м. п. за точними вхідними даними $f_0(z)$ при $\eta = 0$. Зауважимо також, що в означенні нічого не говориться про збіжність "регуляризованих" послідовностей (z_n) .

У § 1.4 розглядається сформульована В.К.Івановим "нестійка задача управління", яка для лінійних операторних рівнянь I роду (1.1) складається у побудові для будь-якого заданого числа $\epsilon > 0$ наближеного розв'язку $z_\epsilon \in Z'$, задовольняючого нерівності

$$\|A_0 z_\epsilon - u_0\| \leq \epsilon \quad (1.19)$$

(у припущенні вірності рівності $\overline{\text{Im } A_0} = U$). Для неї раніше було запроваджено поняття J-регуляризатора, котрий є однопараметричною сім'єю операторів $R_\alpha \in L(U, Z)$, $\alpha > 0$, для будь-якого $u \in U$ задовольняючих умові $A_0 R_\alpha u \rightarrow u$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Однак, у роботах багатьох авторів відзначається, що майже для коректних задач ефективні оцінки похибки вигляду (1.19) можна одержати тільки у відносно простих випадках, але не для реальних складних математичних моделей. Крім того, для практичних задач при їх скінченномірній апроксимації оператор A_0 звичайно відомий неточно і "управління" необхідно стійко будувати за наближеними вхідними даними. Тим більше, у цій ситуації для заданого скільки завгодно мало-

го рівня похибки ϵ принципово неможливо забезпечити виконання умови (1.19). Також для ряду практичних задач міра несумісності рівняння (1.1) може бути додатною (особливо для задач з обмеженнями), що не забезпечує умови $\overline{\text{Im } A_0} = U$. Тому в дисертації була сформульована та вивчена

Узагальнена задача управління. Побудувати мінімізуючу послідовність функціоналу $f_0(z) = \|A_0 z - u_0\|$ на множині D , тобто таку послідовність (z_n) , $z_n \in D$, для якої виконується рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_0 z_n - u_0\| = \inf_{z \in D} \|A_0 z - u_0\| = \mu^D[A_0, u_0]. \quad (1.20)$$

Так як вона є важливим окремим випадком критеріальної задачі 1.3, то конкретизується означення з § 1.3. Для лінійних рівнянь її критеріальна стійкість формулюється таким чином:

Означення 1.19. Назвемо узагальнену задачу управління стійкою у точці $p_0 = (A_0, u_0) \in W$, якщо для будь-яких послідовностей відних даних $p_n = (A_n, u_n) \in W$,

$$\|A_n - A_0\| \rightarrow 0, \quad \|u_n - u_0\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (1.21)$$

і для будь-якої послідовності чисел (ϵ_n) , $\epsilon_n > 0$, $\epsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, усяка послідовність елементів (z_n) , $z_n \in D$, задовольняючих нерівностям

$$\|A_n z_n - u_n\| - \inf_{z \in D} \|A_n z - u_n\| \leq \epsilon_n, \quad (1.22)$$

буде л. п. відного функціоналу, тобто буде вірне (1.20).

Аналогічно визначена стійкість у випадку нелінійних рівнянь. Також було сформульовано означення РКА для узагальненої задачі управління, яке конкретизує означення 1.17. Збіжність самих регуляризованих м. п. в ньому не потребується, а за допомогою РКА забезпечується лише збіжність за функціоналом (за критерієм) (1.20).

У § 1.5 знайдені необхідні та достатні умови критеріальної стійкості відповідно означенню 1.19 узагальненої задачі управління.

Теорема 1.5. Критерій стійкості узагальненої задачі управління. Для стійкості узагальненої задачі управління при $A_0 \in L(Z, U)$, $A_0 \neq 0$

і $D = Z$ необхідно й досить виконання умови (1.11) (тобто щоб оператор A_0 відображав простір Z на свій образ $\text{Im } A_0 \subseteq U$ взаємно однозначно і взаємно неперервно).

Теорема 1.5 має важливе значення для встановлення кола стійких узагальнених задач управління. Незважаючи на те, що означення 1.19 стійкості сформульоване тільки у термінах збіжності за функціоналом, на основі теореми 1.5 його можна вважати в деякому сенсі узагальненням означення коректності аргументної задачі пошуку псевдорозв'язків операторних рівнянь. Цей висновок можна зробити тому, що, наприклад, для E -просторів Z та U умова (1.11) еквівалентна коректності задачі (1.2). Якщо у оператора $A_0 \in L$ не існує обмеженого оберненого, то аргументна задача мінімізації (1.2) буде некоректною одночасно з критеріальною задачею (1.20) (і з критеріальною задачею 1.1 при $\mu[A_0, u_0] > 0$). Типовою ситуацією нестійкості чисельного розв'язання НКЗ мінімізації відхилу інтегральних рівнянь Фредгольма I роду є рівність нулевій відхилу у точках колокації та прагнення відхилу до нескінченності у проміжних точках, якщо система лінійних алгебраїчних рівнянь, що дістається при скінченномірній апроксимації, розв'язується без вживання РКА, наприклад, за допомогою метода Гауса (рис. 1.1).

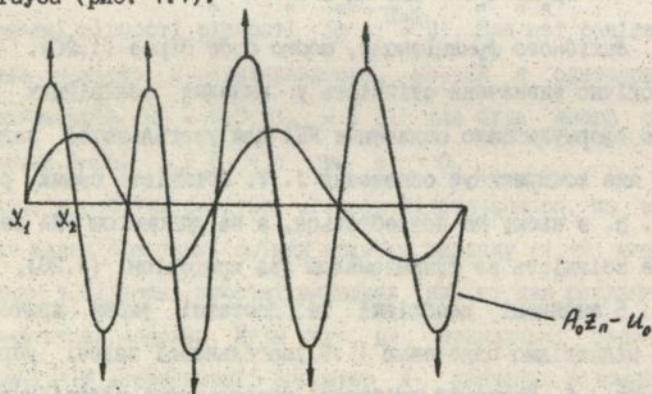


Рис. 1.1. Розбіжність відхилу у проміжних точках

Як ілюстрація проблеми розглядається модельний приклад 1.1 розв'язання за допомогою методу інтегральних рівнянь I роду рівняння Лапласа у колі радіуса $R < 1$, коли розв'язок шукається у вигляді потенціалу простого шару з щільністю потенціалу $z \in L_2$, яка розподілена по допоміжному колу радіуса $R' = 1$. Для цього прикладу образ інтегрального оператора A_0 ортогональний функціям, рівним константі, та, отже, може бути $\mu[A_0, u_0] > 0$. Крім того, для негладкої межевої умови u_0 не існує ні розв'язку, ні псевдорозв'язку у інтегрального рівняння Фредгольма I роду $A_0 z = u_0$, так що це типовий приклад нестійкої узагальненої задачі управління.

У § 1.6 формулюється НКЗ метода найменших квадратів, розглядається ряд нестійких задач теорії апроксимації, обчислення функціоналів на розв'язках операторних рівнянь та означення "чебишовської міри несумісності" систем лінійних алгебраїчних рівнянь. НКЗ методу найменших квадратів виникає, наприклад, у методах неортогональних рядів та полягає у мінімізації функціоналу вигляду

$$f_0(z) = \|\psi(x) - \sum_{i=1}^n z_i \phi_i(x)\|_H^2 = (A_0 z, z) - 2(b_0, z) + c_0. \quad (1.23)$$

де $z \in Z = \mathbb{R}^n$; $\psi(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$ - дані елементи деякого гільбертового простору функцій H ; A_0 - симетрична невід'ємно означена матриця Грама системи функцій $\phi_1, \dots, \phi_n$; вектор $b_0 \in \mathbb{R}^n$ з елементами $(b_0)_i = (\psi, \phi_i)_H$; скаляр $c_0 = (\psi, \psi)_H$. Особливість НКЗ міститься в тому, що самі параметри z_i не викликають інтересу, а треба знайти їх довільні значення з $\mathbb{R}^n$ (з множини $D \subset \mathbb{R}^n$ при рішенні задачі з обмеженнями), які забезпечують з необхідною точністю мінімально можливе значення (1.23). Система функцій ϕ_i може бути неортогональною і навіть лінійно залежною, а матриця Грама A_0 - погано обумовленою або виродженою. Основна проблема міститься в тому, що звичайно елементи A_0, b_0 і c_0 обчислюються за допомогою чисельного інтегрування, тому замість точних вхідних даних є наближені дані A_n, b_n, c_n . При цьому матриця A_n може загубити влас-

тивість невід'ємної означеності і у задачі мінімізації тоді немає розв'язку ($\inf f_\eta = -\infty$). Виникає НКЗ побудови м. п. функціоналу (1.23) за наближеними даними A_n, b_δ, c_γ і точностями наближення $\eta = (h, \delta, \gamma) \rightarrow 0$:

$$\|A_n - A_0\| \leq h, \quad A'_n = A_n, \quad \|b_\delta - b_0\| \leq \delta, \quad |c_\gamma - c_0| \leq \gamma. \quad (1.24)$$

Друга глава дисертації присвячена методам регуляризації НКЗ.

У § 2.1 будуться РКА для критеріальних задач 1.2 обчислення нижніх меж функціоналів загального вигляду та 1.3 побудови м. п. для них. Розглядається такий функціонал

$$\Phi_\eta(z) = f_\eta(z) + \Psi(\eta, \Omega(z)), \quad z \in D, \quad (2.1)$$

який для кожного $z \in D$ є оцінкою зверху можливого значення $f_0(z)$ за вхідними даними $f_\eta(z)$ і η . РКА $r_\eta(f_\eta)$ задачі 1.2 визначається таким чином:

$$r_\eta(f_\eta) = \inf_{z \in D} \Phi_\eta(z). \quad (2.2)$$

Теорема 2.1. Функція $r_\eta(f_\eta)$ є РКА відносно означення 1.15 для НКЗ 1.2, при цьому вірна нерівність

$$r_\eta(f_\eta) \geq \inf_{z \in D} f_0(z) = \mu^D[f_0]. \quad (2.3)$$

Висновок 2.1. Якщо величина (2.2) обчислюється з точністю $\chi > 0$

$$r_\eta(f_\eta) \leq r_\eta^x(f_\eta) \leq r_\eta(f_\eta) + \chi, \quad (2.4)$$

тоді $r_\eta^x(f_\eta)$ є РКА для задачі 1.2, якщо $\chi \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$.

Виявляється, що викладений підхід може застосовуватися і для побудови РКА задачі 1.3.

Теорема 2.2. Нехай для будь якої послідовності $\{\eta_n\}$, $\eta_n > 0$, $\eta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, та довільної послідовності відомих даних $f_{\eta_n} \in F$, задовольняючих для кожного η_n умови (1.5), знайдена послідовність елементів $z_{\eta_n}^x \in D$, для яких виконуються нерівності

$$r_{\eta_n}(f_{\eta_n}) \leq \Phi_{\eta_n}(z_{\eta_n}^x) \leq r_{\eta_n}(f_{\eta_n}) + \chi_n \quad (2.5)$$

з довільною послідовністю $\chi_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тоді послідовність $(z_{\eta_n}^x)$ буде м. п. вісного функціоналу $f_0(z)$.

У § 2.2 будуються РКА для НКЗ 1.1 та узагальненої задачі управління для випадку нелінійних операторних рівнянь, засновані на півнеперервності зверху міри несумісності за вхідними даними. Означається такий функціонал на Z

$$\Phi_{\eta}[z] = \|A_{\eta}z - u_{\delta}\| + \Psi(h, \|z\|) + \delta. \quad (2.6)$$

Означення 2.1. Назвемо "методом найменшої оцінки відхилю" (МНОВ) такий за означенням 1.12 РКА для задачі 1.1:

$$\rho_{\eta}[A_{\eta}, u_{\delta}] = \inf_{z \in D} \Phi_{\eta}[z] = \inf_{z \in D} [\|A_{\eta}z - u_{\delta}\| + \Psi(h, \|z\|) + \delta]. \quad (2.7)$$

Далі доводиться збіжність МНОВ до $\mu[A_0, u_0]$ зверху:

Теорема 2.3. Для функції (2.7) вірне співвідношення (1.7) та

$$\rho_{\eta}[A_{\eta}, u_{\delta}] \geq \mu^D[A_0, u_0]. \quad (2.8)$$

Аналогічно (2.4) величина (2.7) може обчислюватися з точністю $\chi > 0$, $\chi \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$. Як у теоремі 2.2 показується, що МНОВ є РКА для узагальненої задачі управління. Досліджуються також деякі властивості нижньої межі функціоналу А.М.Тихонова.

У § 2.3 докладно вивчено МНОВ для лінійних операторних рівнянь у нормованих просторах та виникаюча при його реалізації задача негладкої оптимізації. Будувannya використовують новий підхід А.М.Тихонова за регуляризациєю НІЗ на класах еквівалентних за точністю вхідних даних, які визначаються для заданих вхідних даних (1.3) як

$$\Sigma_{\eta} = \Sigma_{\eta}(p_{\eta}) = \{(A, u) \in W: \|A - A_{\eta}\| \leq h, \|u - u_{\delta}\| \leq \delta\}. \quad (2.9)$$

На основі (1.3), невідомі точні вхідні дані p_0 належать Σ_{η} , тому неполіпшуемою на класі (2.9) оцінкою зверху для $\mu^D[A_0, u_0]$ є

$$\tilde{\rho}_{\eta}[A_{\eta}, u_{\delta}] = \sup_{p \in \Sigma_{\eta}} \mu^D[A, u] = \sup_{p \in \Sigma_{\eta}} \left[\inf_{z \in D} \|Az - u\| \right]. \quad (2.10)$$

Доводиться, що (2.10) збігається зверху до $\mu^D[A_0, u_0]$ при $\eta \rightarrow 0$. Однак, безпосереднє розв'язання максимінної задачі (2.10) утруднено. Тому розглядається величина, двоїста до (2.10):

$$\rho_{\eta}[A_{\eta}, u_{\delta}] = \inf_{z \in D} \left[\sup_{p \in \Sigma_{\eta}} \|Az - u\| \right]. \quad (2.11)$$

яка завжди не менш, ніж (2.10).

Теорема 2.6. Для функції $\rho_\eta[A_n, u_0]$ виконуються (2.8), то

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \rho_\eta[A_n, u_0] = \mu^0[A_0, u_0]. \quad (2.12)$$

МНОВ для лінійних операторних рівнянь міститься у розв'язанні задачі (2.11). Розглядається функціонал від $z \in Z$:

$$\phi_\eta[z] = \sup_{p \in \Sigma_\eta} \|Az - u\|, \quad z \in D. \quad (2.13)$$

Основне значення для МНОВ (2.11) має таке твердження.

Теорема 2.7. Для будь яких $A_n \in L$, $u_0 \in U$, $z \in D$, $h \geq 0$, $\delta \geq 0$ знайдуться такі $\bar{p} = (\bar{A}, \bar{u}) \in \Sigma_\eta$, що

$$\|\bar{A} - A_n\| = h, \quad \|\bar{u} - u_0\| = \delta. \quad (2.14)$$

$$\phi_\eta[z] = \|\bar{A}z - \bar{u}\| = \|A_n z - u_0\| + h\|z\| + \delta. \quad (2.15)$$

Вирази для $\bar{A}$ і $\bar{u}$ записуються у явному вигляді. Таким чином, у роботі показано, що МНОВ складається з обчислення "модифікованої міри несумісності"

$$\rho_\eta[A_n, u_0] = \hat{\mu}_\eta[A_n, u_0] = \inf_{z \in D} [\|A_n z - u_0\| + h\|z\| + \delta]. \quad (2.16)$$

У подальшому досліджується задача (2.16) для рефлексивного простору Z та опуклої замкнутої множини $D \subset Z$.

Теорема 2.8. При $h > 0$ знайдеться точка z_η один елемент $z_\eta \in D$, який $\phi_\eta[z]$ на D .

Елементарний приклад $\phi_\eta[z] = |z-1| + |z|$ для $Z = U = \mathbb{R}^1$ показує можливу неєдиність розв'язку задачі (2.16). Однак, умови неєдиності з'являються достатньо жорсткими.

Теорема 2.9. Нехай Z - рефлексивний строго опуклий простір, U - строго опуклий банаховий простір, $D \subset Z$, $h > 0$. Якщо знайдуться два різних елементи z_1 та z_2 , на яких $\phi_\eta[z]$ досягається мінімум функціоналу $\phi_\eta[z]$ (2.15), то виконуються такі твердження:

1) існує розв'язок рівняння

$$A_n z = u_0; \quad (2.17)$$

2) мінімум $\phi_\eta[z]$ досягається на відрізку $[0; \hat{z}]$, де $\hat{z}$ - нормальний розв'язок рівняння (2.17);

$$3) \quad \min_{z \in Z} \Phi_\eta[z] = \|u_\delta\| + \delta = h\|\hat{z}\| + \delta. \quad (2.18)$$

На основі цього твердження доводиться, що в умовах теореми 2.9 при виконанні нерівності $\mu[A_0, u_0] < \|u_0\|$ розв'язок z_η задачі мінімізації (2.16) буде єдиним для достатньо малих η .

Для НКЗ 1.1, за винятком нижчеуказаних особистих випадків, МНОВ дає оцінку зверху для $\mu^D[A_0, u_0]$, яка не поліпшується на класі еквівалентних за точністю вхідних даних (2.9), тобто виконується теорема двоїстості для задач (2.10), (2.11):

Теорема 2.11. Якщо мінімум функціоналу $\Phi_\eta[z]$ на D відстаєся на елементі $z_\eta \in D$, який задовольняє умови $A_n z_\eta = u_\delta$, $z_\eta = 0$, то виконується рівність

$$\tilde{\rho}_\eta[A_n, u_\delta] = \rho_\eta[A_n, u_\delta] = \Phi_\eta[z_\eta].$$

Доведення цього твердження спирається на деякі методи опуклого аналізу та субдиференціального числення.

Важливим для реалізації МНОВ у випадку задачі без обмежень є опрацьований у дисертації новий принцип вибору параметра регуляризації у методі А.М.Тихонова.

Теорема 2.12. В умовах теореми 2.9 та єдиності розв'язку z_η задача безумовної мінімізації функціоналу (2.15) є еквівалентною до задачі мінімізації функціоналу А.М.Тихонова

$$M^\alpha[z] = \|A_n z - u_\delta\|^p + \alpha \|z\|^q \quad (2.19)$$

при $p \geq 1$, $q > 1$ з вибором параметра регуляризації α з "принципу найменшої оцінки відхилу" (ПНОВ):

$$\varphi(\alpha) = \|A_n z_\alpha - u_\delta\| + h \|z_\alpha\| \rightarrow \min, \quad \alpha \geq 0, \quad (2.20)$$

де z_α - єдина екстремаль функціоналу (2.19) для $\alpha > 0$ (або z_α - нормальний розв'язок рівняння (2.17) при $\alpha = 0$, якщо мінімум функціоналу $\Phi_\eta[z]$ відстаєся на розв'язку цього рівняння).

ПНОВ грає основну роль при регуляризації НКЗ у випадку гільбертових просторів. Далі доведена стійкість МНОВ і ПНОВ до малих варіацій вхідних даних A_n , u_δ , h та похибок визначення параметру

регуляризації α з (2.19) – (2.20).

Розглядені питання оптимальності МНОВ, зокрема доведена оптимальність за порядком МНОВ на множинах $D = \{z \in Z: \|z\| \leq R\}$ з оцінкою похибки наближення міри несумісності $O(h+\delta)$.

У § 2.4 будуться ефективні методи реалізації МНОВ для лінійних рівнянь у гільбертових просторах. Знайдені критерії досягнення мінімуму функціоналу $\phi_\eta[z]$ у недеференційованих точках $z = 0$ та на розв'язках рівняння (2.17) при $D = Z$.

Лема 2.3. Для того, щоб мінімум $\phi_\eta[z]$ досягався на елементі $z_\eta = 0$ необхідно й досить, щоб виконувалась умова

$$\|A'_n u_\delta\| \leq h \|u_\delta\|. \quad (2.21)$$

Теорема 2.14. Нехай існує розв'язок (нормальний) $z_\eta = 0$ рівняння (2.17). Щоб функціонал $\phi_\eta[z]$ набував мінімальне значення на елементі $z = z_\eta$, необхідно й досить, щоб виконувалась умова:

$$\mu_v[A'_n, u_\delta] = \inf_{y \in Z, (y, z_\eta) = 0} \|A'_n y - u_\delta\| \geq h \|z_\eta\|.$$

Для регулярного випадку доведені такі твердження, які містять основу реалізації ПНОВ:

Лема 2.5. Функція $\psi(\alpha)$ з (2.20) при $\alpha > 0$ – неперервно диференційована, $\psi'(\alpha) = (R_\alpha z_\alpha, z_\alpha) \cdot g(\alpha)$, $R_\alpha = (A'_n A_n + \alpha E)^{-1}$,

$$g(\alpha) = \frac{\alpha}{\|A'_n z_\alpha - u_\delta\|} - \frac{h}{\|z_\alpha\|}, \quad (2.22)$$

та має єдиний локальний мінімум α_1 , який також є глобальним мінімумом на $[0; +\infty)$; оператор R_α – симетричний додатно означений оператор при $\alpha > 0$.

Теорема 2.15 (Принцип найменшої оцінки відхилю). Задача мінімізації функціоналу $\phi_\eta[z]$ на Z при $h > 0$ еквівалентна такому "принципу найменшої оцінки відхилю":

Якщо виконується умова (2.21), тоді $z_\eta = 0$.

Коли (2.53) не виконується, тоді розв'язується рівняння Вільера для задачі мінімізації функціоналу А.М.Тихонова (2.19) при $p = q = 2$

$$(\hat{A}_n' \hat{A}_n + \alpha E) z_n = \hat{A}_n' u_0, \quad (2.23)$$

а) і якщо при будь-якому $\alpha > 0$ виконується нерівність $g(\alpha) > 0$, тоді існує (нормальний) розв'язок $\hat{z}_n$ рівняння $\hat{A}_n z = u_0$ та

$$z_n = \hat{z}_n = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} z_n; \quad (2.24)$$

б) інакше існує єдиний корінь $\alpha_1 > 0$ рівняння

$$g(\alpha) = 0, \quad (2.25)$$

для якого $\alpha_1 = \arg \min_{\alpha \geq 0} \psi(\alpha)$, та $z_n = z_{\alpha_1}$.

Знайдена оцінка зверху для параметра регуляризації α_1 в ПНОВ.

Теорема 2.16. Для $\|\hat{A}_n u_0\| > h \|u_0\|$, $h > 0$ виконується оцінка

$$0 \leq \alpha_1 \leq \frac{h \|u_0\| \|\hat{A}_n\|^2}{\|\hat{A}_n' u_0\| - h \|u_0\|} = \hat{\alpha}_1. \quad (2.26)$$

Для рішення (2.25) обґрунтований метод простої ітерації.

Теорема 2.17. В умовах теореми 2.16 метод простої ітерації

$$\tilde{\alpha}_{k+1} = \tilde{\phi}(\tilde{\alpha}_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad \tilde{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_1, \quad \tilde{\phi}(\alpha) = \frac{h \|\hat{A}_n z - u_0\|}{\|z\|}$$

збігається до розв'язку α_1 рівняння (2.25).

На прикладі СЛАР з матрицею Гільберта наведені результати чисельних експериментів реалізації ПНОВ. Також запропоновані модифікації методів Ньютона та січних для розв'язання нелінійних рівнянь з опуклими лівими й правими частинами, володіючи гарантованою збіжністю, та обґрунтовано їх вживання у ПНОВ для розв'язання (2.25).

Проведено порівняння ПНОВ з методом регуляризації обчислення міри несумісності, який запропонований В.О.Морозовим і міститься у розв'язанні рівняння $(\hat{A}_n' \hat{A}_n + \alpha E) u_n = \hat{A}_n' u_0$ з вибором параметра регуляризації із умови $\|\hat{A}_n' u_n - \hat{A}_n' u_0\| = 2h \|u_0\|$, після чого за регуляризоване значення для $\mu[\hat{A}_0, u_0]$ вважається $\mu_n = \|u_n - u_0\|$. Доведено, що цей метод еквівалентний розв'язанню рівняння (2.23) з вибором α із умови $\alpha \|z_n\| = 2h \|u_0\|$. На контр-прикладі показано, що метод В.О.Морозова може не давати оцінку зверху для $\mu[\hat{A}_0, u_0]$. впливу, як ми побачимо надалі, для регуляризації розв'язання несумісних

операторних рівнянь за допомогою узагальненого принципу відхилу.

Далі розглядається вживання прямих градієнтних методів мінімізації для розв'язання задачі (2.16). Функціонал $\Phi_n[z]$ у загальному випадку не є строго опуклим, однак при умові $A_n z_n = u_0$ та $z_n = 0$ доведена його строга опуклість у деякому околі точки мінімуму (доведена додатна означеність другої похідної по Фреше $\Phi_n''(z)$) та збіжність методів найшвидкого спуску та спряжених градієнтів. Зазначені економічні алгоритми підрахунку кроку спуску у цих методах для МНОВ.

У § 2.5 обґрунтовані методи скінченномірної апроксимації МНОВ, зокрема проєкційний та скінченнорізницевий методи. Виписані системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які отримуються при регуляризації НКЗ для інтегральних рівнянь I роду, та розглядені ефективні алгоритми їх розв'язання, засновані на методі В.В.Воеводіна. Одержані прості та зручні наближені формули оцінки похибки скінченномірної апроксимації інтегральних операторів та правих частин у випадку кусково-лінійної та кубічної апроксимації.

У § 2.6 побудовано РКА нестійкої критеріальної задачі найменших квадратів (1.23). Аналогічно МНОВ, впроваджується клас Σ_n еквівалентних за точністю вхідних даних для наближених даних (1.24) та розглядається функціонал на $D \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\Sigma_n[z] = \sup_{p \in \Sigma_n} \{(Az, z) - 2(b, z) + c\}, \quad (2.27)$$

який для кожного фіксованого $z \in D$ уявляє собою найменшу оцінку зверху значення зихідного функціоналу $f_0(z)$ на Σ_n .

Теорема 2.24. Для будь якого $z \in \mathbb{R}^n$ виконується рівність

$$\Sigma_n[z] = (A_n z, z) + h(z, z) - 2(b_0, z) + 2\delta \|z\| + c_1 + \gamma, \quad (2.28)$$

при цьому верація леж у (2.27) відстається на вхідних даних з Σ_n

$\bar{p} = (\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}) \in \Sigma_n$, задовольняючих співвідношенням

$$\|\bar{A} - A_n\| = h, \quad \|\bar{b} - b_0\| = \delta, \quad |\bar{c} - c_1| = \gamma.$$

і для $z \neq 0$ рівних $\bar{A} = A_n + hE$, $\bar{b} = b_0 - \delta \|z\|^{-1} z$, $\bar{c}_1 = c_1 + \gamma$.

Метод найменшої оцінки квадратичного відхилення для критеріаль-

ної задачі обчислення нижньої межі функціоналу (1.23) та критеріальної задачі побудови його м. п. міститься в обчисленні величини

$$\rho_{\eta}(p_{\eta}) = \inf_{z \in D} g_{\eta}[z] \quad (2.29)$$

та побудові для $\forall \kappa > 0$ вектору $z_{\eta\kappa} \in D$, задовольняючого умові $g_{\eta}[z_{\eta\kappa}] - \rho_{\eta}(p_{\eta}) \leq \kappa$. Доводиться збіжність цього методу та теорема двоїстості, аналогічна до теореми (2.11) для МНОВ. Основу ефективної чисельної реалізації його складають такі твердження:

Теорема 2.28. При $D = \mathbb{R}^n$ метод найменшої оцінки квадратичного відхилення еквівалентний такому "принципу найменшої оцінки квадратичного відхилення": при $\|b_{\delta}\| \leq \delta$ вектор $z_{\eta} = 0$, $g_{\eta}[z_{\eta}] = c_{\eta} + \gamma$; при $\|b_{\delta}\| > \delta$ розв'язується СЛАР $(A_{\eta} + \alpha E)z_{\alpha} = b_{\delta}$, $\alpha \geq h$, з вибором параметра регуляризації α_{η} з рівняння $\alpha = h + \delta/\|z_{\alpha}\|$, при цьому α_{η} — єдиний її розв'язок, то вектор z_{η} вважається рівним $z_{\eta} = z_{\alpha_{\eta}}$.

Теорема 2.29. При $\|b_{\delta}\| > \delta$ виконується нерівність

$$h \leq \alpha_{\eta} \leq \frac{h\|b_{\delta}\| + \delta\|A_{\eta}\|}{\|b_{\delta}\| - \delta} = \hat{\alpha}_{\eta}.$$

Так само обґрунтовується збіжність методу простої ітерації

$$\alpha_{k+1} = h + \delta/\|z_{\alpha_k}\|, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \alpha_0 = \hat{\alpha}_{\eta}.$$

Розглядені деякі питання регуляризації НКЗ обчислення "чебишовської міри несумісності" СЛАР та обчислення функціоналів на розв'язках операторних рівнянь I роду.

Третя глава дисертації присвячена регуляризації розв'язання несумісних операторних рівнянь та вживанню у таких методах РКА.

У § 3.1 розглядається модифікація узагальненого методу відхилу (УМВ) і узагальненого принципу відхилу (УПВ), досліджених у роботах І.В.Кочікова, А.Н.Матвієнко, А.Г.Яголи для регуляризації несумісних лінійних операторних рівнянь у Е-просторах.

Модифікація УМВ міститься у розв'язанні варіаційної задачі

$$\bar{z}_{\eta} = \operatorname{argmin} \|z\|, \quad z \in \hat{Z}_{\eta}^D \quad (3.1)$$

$$\hat{Z}_{\eta}^D = \{z \in D: \|A_{\eta}z - u_{\delta}\| \leq h\|z\| + \delta + \hat{\mu}_{\eta}(A_{\eta}, u_{\delta})\}. \quad (3.2)$$

де $\hat{\mu}_\eta[A_n, u_\delta]$ — обчислена за допомогою МНОВ модифікована міра не-сумісності (2.16). Модифікація УПВ міститься в тому, що запроваджується "модифікований узагальнений відхил"

$$\hat{\rho}_\eta(\alpha) = \|A_n z_\alpha - u_\delta\| - h\|z\| - \delta - \hat{\mu}_\eta[A_n, u_\delta], \quad (3.3)$$

та якщо не виконується нерівність

$$\|u_\delta\| > \delta + \hat{\mu}_\eta[A_n, u_\delta], \quad (3.4)$$

тоді регуляризований псевдорозв'язок $\bar{z}_\eta = 0$; у протилежному випадку розв'язується задача мінімізації функціоналу А.М.Тихонова (2.19) при $q > 1$ з вибором параметра регуляризації α з рівняння

$$\hat{\rho}_\eta(\alpha) = 0, \quad (3.5)$$

яке має розв'язок $\alpha_0 > 0$ (єдиний при $D = Z$), та далі вважається $\bar{z}_\eta = z_{\alpha_0}$. Аналогічні формулювання мають місце у випадку нелінійних рівнянь з використанням (2.7).

При регуляризації сумісних рівнянь у роботі розглядалися модифікації УМВ і УПВ, у яких замість $\hat{\mu}_\eta[A_n, u_\delta]$ стоїть 0, бо використання величини $\mu[A_n, u_\delta]$ є неможливим із-за доведеної нестійкості задачі обчислення міри несумісності до похибок (A_n, u_δ) . Для сумісних рівнянь у гільбертових просторах в дисертації знайдені важливі для чисельної реалізації УПВ оцінки зверху для параметра регуляризації, порядок яких є $O(h+\delta)$. Вони повністю обчислюються за вхідними даними (A_n, u_δ) та η . Перша з них виконується для достатньо малих η та має вигляд (при $\mu = 0$ або $\mu = \mu[A_n, u_\delta]$)

$$\alpha_0 \leq \|A_n\| \frac{h\|A_n' u_\delta\| + \|A_n\|^2(\delta + \mu)}{\|A_n' u_\delta\| - \|A_n\|(\delta + \mu)} = \hat{\alpha}_{\max}. \quad (3.6)$$

Порядок $O(h+\delta)$ у (3.6) має місце через те, що для сумісних рівнянь $\mu[A_n, u_\delta] = O(h+\delta)$. Друга оцінка виконується для будь-яких η :

Теорема 3.2. Для сумісних рівнянь при виконанні умови нерівності $z_\eta \neq 0$ ($\|u_\delta\| > \delta + \mu$) виконується оцінка

$$\alpha_0 \leq h\|A_n\| + (\delta + \mu)\|A_n\|(\|A_n\|^2 + \hat{\alpha}_{\max})\|A_n' u_\delta\|^{-1} = \tilde{\alpha}_{\max}, \quad (3.7)$$

де $\hat{\alpha}_{\max}$ обчислюється за формулою

$$\alpha_{\max} = \frac{(\|A_n\| + h)\|A_n\|\|u_g\|}{\|u_g\| - \delta - \mu} \geq \alpha_0. \quad (3.8)$$

Для модифікації УПВ (3.3) – (3.5) для несумісних рівнянь у дисертації вперше одержані оцінки зверху для параметра регуляризації, які повністю обчислюються за вхідними даними. Вони мають порядок $O(h+\delta)^{0.5}$, при цьому доведено, що він не поліпшується.

Теорема 3.4. При виконанні умови (3.4) параметр регуляризації α_0 з модифікації УПВ для несумісних рівнянь має таку оцінку зверху $\hat{\alpha}_0 = O(h + \delta)^{0.5}$:

$$\alpha_0 \leq \hat{\alpha}_1 + 2(\|A_n\|^2 + \alpha_{\max}) \times \\ \times \left[\frac{\|u_g\|}{\|A_n' u_g\| - h\|u_g\|} \left(h + \delta \frac{\|A_n\|^2 + \alpha_{\max}}{\|A_n' u_g\|} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \hat{\alpha}_0. \quad (3.9)$$

де $\hat{\alpha}_1$ і $\alpha_{\max}$ означені формулами (2.26) та (3.8).

У цьому параграфі також обґрунтовані модифікації методу Ньютона та січних, які гарантовано збігаються до рівняння (3.5).

У § 3.2 досліджується новий підхід А.М.Тихонова побудови РА на класах еквівалентних за точністю вхідних даних. Надається просте доведення, що модифікація УМВ для сумісних рівнянь при $\mu = 0$ еквівалентна пошуку мінімального за нормою розв'язку z_n серед нормальних розв'язків усіх сумісних рівнянь $Az = u$ з вхідними даними з класу еквівалентних за точністю вхідних даних Σ_n (2.9).

Цей же підхід узагальнюється на несумісні рівняння. Позначимо як $\tilde{\Sigma}_n$ клас вхідних даних, у яких існує псевдорозв'язок:

$$\tilde{\Sigma}_n = \{ (\tilde{A}, \tilde{u}) \in \Gamma_n : \tilde{z} = \underset{z \in Z}{\operatorname{argmin}} \|\tilde{A}z - \tilde{u}\| \} \quad (3.10)$$

($\tilde{\Sigma}_n \neq \emptyset$ тому, що по припущенню $(A_0, u_0) \in \Sigma_n$). Позначимо множину нормальних псевдорозв'язків рівнянь $\tilde{A}z = \tilde{u}$ з вхідними даними з $\tilde{\Sigma}_n$ як $\tilde{Z}_n$:

$$\tilde{Z}_n = \{ \tilde{z} \in Z : \tilde{z} = \underset{z \in Z_p^n}{\operatorname{argmin}} \|\tilde{z}\| \}, \quad (3.11)$$

$$Z_p^n = \{ z_p \in Z : \exists (\tilde{A}, \tilde{u}) \in \tilde{\Sigma}_n, z_p = \underset{z \in Z}{\operatorname{argmin}} \|\tilde{A}z - \tilde{u}\| \}. \quad (3.12)$$

Множина $\tilde{Z}_n \neq \emptyset$, тому що $\tilde{z}_0 \in \tilde{Z}_n$.

Означення 3.3. Метод лінійного псевдорозв'язку (ММП) діється в тому, що за регуляризоване наближення до $\bar{z}_0$ обирається елемент $\bar{z}_\eta \in \tilde{Z}_\eta$ з лінійною нормою, якщо така існує:

$$\bar{z}_\eta = \operatorname{argmin} \|\tilde{z}\|, \quad \tilde{z} \in \tilde{Z}_\eta. \quad (3.13)$$

Вхідні дані $(\bar{A}, \bar{u}) \in \tilde{\Sigma}_\eta$, для яких $\bar{z}_\eta$ - нормальний псевдорозв'язок, називаються "реалізуючими" ММП.

З існування псевдорозв'язку у будь якій СЛАР і компактності Σ_η для скінченномірних просторів Z та U легко виводиться

Припущення 3.2. Для СЛАР у скінченномірних просторах Z, U задача (3.13) - розв'язувана та існують "реалізуючі" її вхідні дані $(\bar{A}, \bar{u}) \in \tilde{\Sigma}_\eta$.

Означення 3.4. Метод ϵ -лінійного псевдорозв'язку діється в тому, що для будь якого $\epsilon > 0$ за регуляризоване наближення до $\bar{z}_0$ обирається елемент $z_\eta^\epsilon \in \tilde{Z}_\eta$, для якого виконується нерівність

$$\|z_\eta^\epsilon\| \leq \inf_{\tilde{z} \in \tilde{Z}_\eta} \|\tilde{z}\| + \epsilon \quad (3.14)$$

(такі елементи z_η^ϵ завжди існують для будь яких $\eta \geq 0$ і $\epsilon > 0$).

Основним результатом параграфу є така теорема.

Теорема 3.7. Метод ϵ -лінійного псевдорозв'язку збігається до нормального псевдорозв'язку $\bar{z}_0$ вхідного рівняння при $\eta \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$, тобто виконується співвідношення $\|z_\eta^\epsilon - \bar{z}_0\| \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$.

Аналогічно виконується збіжність ММП, якщо для будь яких η та p_η задача (3.13) розв'язувана. У цьому випадку відмічається "двоїста" до теореми 1.1 про півнеперервність зверху міри несумісності властивість півнеперервності знизу за вхідними даними норми нормальних псевдорозв'язків $\|\bar{z}_0\|$. У роботі ставиться задача про знаходження ефективного алгоритму реалізації ММП та наводяться деякі допоміжні результати для нього, наприклад, такий:

Припущення 3.3. Для гільбертових просторів Z та U розв'язок задачі (3.13) $\bar{z}_\eta = 0$ тоді і тільки тоді, коли

$$\inf_{u \in U, \|u - u_0\| \leq \delta} (\|A'_n u\| - h \|u\|) \approx 0 \quad (3.15)$$

(в (3.15) у випадку знака рівності повинен стояти $\min$).

Перевірка (3.15) легко виконується методом множників Лагранжа. Помітимо, що умова (3.15) рівності $\bar{\varepsilon}_n$ нулю в ММП не еквівалентна відповідній умові (3.4) у модифікації УПВ. Відмічається, що одним із можливих варіантів наближеної реалізації ММП для гільбертових просторів є вживання УМВ для сумісного рівняння $A'_0 A_0 z = A'_0 u_0$.

У § 3.3 розвинуто підхід регуляризації на класах еквівалентних за точністю вхідних даних для нормально розв'язуваних рівнянь у гільбертових просторах, заснований на модифікації методу мінімальної псевдооберненої матриці О.С.Леонова. Цей метод регуляризації вживається також для задач стійкого псевдообернення матриць та нормально розв'язуваних операторів та за аналогією називається у дисертації методом мінімального псевдооберненого оператора (ММПО).

Для задачі псевдообернення матриць він міститься у тому, що розглядається клас еквівалентних за точністю матриць $A_n = A_n(A_n)$:

$$A_n = \{ A \in L: \|A - A_n\| \leq h \} \quad (3.16)$$

і за регуляризоване наближення до шуканої псевдооберненої матриці A_0^+ обирається матриця $\tilde{A}_n^+$, яка має мінімальну спектральну норму серед норм псевдообернених до матриць із класу A_n :

$$\tilde{A}_n = \operatorname{argmin}_{A \in A_n} \|A^+\|. \quad (3.17)$$

Теорема 3.9. Розв'язок задачі (3.16) – (3.17) існує і при $0 \leq h < h_0$, $h_0 = \|A_0^+\|/2$, виконується рівність $\operatorname{Rg} \tilde{A}_n = \operatorname{Rg} A_0$.

Побудова розв'язку задачі (3.17) заснована на сингулярному розкладі матриці A_n : $A_n = V_n D_n U_n$, де V_n, U_n – ортогональні матриці, $D_n = \operatorname{diag}(\rho_1^n, \dots, \rho_k^n)$ – прямокутна діагональна матриця з сингулярними числами $\rho_1^n \geq \dots \geq \rho_k^n \geq 0$. Означимо матрицю $\tilde{A}_n$ у вигляді

$$\tilde{A}_n = V_n \tilde{D}_n U_n, \quad \tilde{D}_n = \operatorname{diag}(\omega_n(\rho_1^n), \dots, \omega_n(\rho_k^n)), \quad (3.18)$$

$$\omega_n(\rho) = \begin{cases} \rho + h & \text{при } \rho > h \\ 0 & \text{при } \rho \leq h \end{cases}$$

Виконується рівність $\|\tilde{A}_n - A_n\| = h$ (тобто $\tilde{A}_n \in A_n$) та

$$\tilde{A}_n^+ = U_n' \tilde{D}_n^+ V_n', \quad \tilde{D}_n^+ = \text{diag}(\theta(\omega_n(\rho_1^n)), \dots, \theta(\omega_n(\rho_K^n))), \quad (3.19)$$

де $\theta(x) = 1/x$ при $x > 0$, $\theta(x) = 0$ при $x = 0$.

Аналогічно методу мінімальної псевдооберненої матриці доводиться оцінка $\|\tilde{A}_n^+ - A_0^+\| = O(h)$. ММПО також можна використовувати для регуляризації знаходження псевдорозв'язків СЛАР. У цьому випадку регуляризований псевдорозв'язок вважається рівним $z_n = \tilde{A}_n^+ u_0$ і для нього справедлива оцінка похибки $\|z_n - z_0\| = O(h + \delta)$.

ММПО для нормально розв'язуваних рівнянь міститься в означенні класу еквівалентних за точністю нормально розв'язуваних операторів

$$A_n = \{A \in L: \|A - A_n\| \leq h, \text{Im } A = \overline{\text{Im } A_n}\} \quad (3.20)$$

і у знаходженні оператора, який є розв'язком задачі (3.17) на класі (3.20). Побудова розв'язку цієї задачі носить конструктивний характер та ґрунтується на полярному розкладанні лінійного неперервного оператора $A_n: A_n = V_n S_n$, де $V_n: Z \rightarrow U$ - частково ізометричний оператор, а $S_n \in L(Z, Z)$ - невід'ємно означений симетричний оператор $S_n = (A_n' A_n)^{1/2}$. Далі використовується спектральне розкладання оператора S_n і оператор $\tilde{A}_n$ визначається як деяка функція від оператора S_n . Доводиться збіжність ММПО з оцінкою похибки $O(h)$.

Також наводяться деякі чисельні результати порівняння методів мінімального псевдорозв'язку, мінімального псевдооберненого оператора та модифікації УПВ для несумісних рівнянь. Вони показують перевагу перших двох методів для нормально розв'язуваних рівнянь. Розглянуто також приклад розв'язання інтегрального рівняння Фредголма II роду на спектрі-за допомогою ММПО.

Глава четверта присвячена вживанню розроблених у дисертації РКА для розв'язання обернених задач теплопровідності (ОЗТ), регуляризації методів інтегральних рівнянь I роду і неортогональних рядів для розв'язання еліптичних граничних задач.

У § 4.1 наводяться постановки ОЗТ з оберненим часом (ретроспек-

тивних ОЗТ), ОЗТ управління граничними умовами та обернених задач Стефана. Для ретроспективних ОЗТ розглядаються приклади порівняння МНОВ та методу квазіобернення, а також приклади використання прямих градієнтних методів мінімізації у МНОВ для задач з обмеженнями на початкову температуру. Ці приклади свідчать про високу ефективність та стійкість розроблених РКА.

У § 4.2 розглядається загальний підхід методів інтегральних рівнянь I роду, коли розв'язок еліптичної граничної задачі шукається у вигляді деяких потенціалів з ядрами, утвореними з відповідних фундаментальних розв'язків, і з щільностями потенціалів, розподіленими не по межі області, а на деякому віддаленні від неї. Після підстановки потенціалів у граничні умови виходять інтегральні рівняння Фредгольма I роду, у яких може бути відсутній розв'язок. У виникаючих НКЗ вживається МНОВ. Розглядено приклад розв'язання інтегро-функціональних рівнянь, які одержані при розв'язанні задачі згину тонких пружних платівок у многозв'язних областях з сингулярностями напруг у вхідних кутах.

У висновку наведені основні результати та виведення, одержані у дисертації. Вони містяться у наступному:

Досліджено новий напрямок теорії некоректно поставлених задач - нестійкі критеріальні задачі, які мають практичну вагу. Розглядено ряд постановок НКЗ, у тому числі нова узагальнена задача управління.

Для таких критеріальних задач сформульовані означення критеріальної стійкості. Одержані необхідні та достатні умови критеріальної стійкості задачі обчислення міри несумісності лінійних операторних рівнянь у нормованих просторах та узагальненої задачі управління. Встановлено зв'язок некоректних аргументних та критеріальних задач. Досліджені властивості міри несумісності операторних рівнянь.

Для НКЗ сформульовані поняття регуляризуючих за критерієм алгоритмів та побудовані такі РКА. Вони дозволяють одержувати оцінки,

які не поліпшуються на класах еквівалентних за точністю вхідних даних. Сформульовані деякі означення оптимальності РКА.

Всебічно вивчена задача обчислення узагальненої міри несумісності, яка містить суть методу найменшої оцінки відхилу. Розроблені ефективні алгоритми реалізації МНОВ для лінійних рівнянь у гільбертових просторах, засновані на новому принципі вибору параметра регуляризації. Розглядені прямі градієнтні методи реалізації МНОВ. Побудовано регуляризуючий алгоритм для НКЗ методу найменших квадратів.

Розвинуті методи скінченномірної апроксимації РКА та їх чисельної реалізації на ЕОМ, у тому числі запропоновані нові завжди збіжні модифікації методів Ньютона і січних та обґрунтовано вживання цих модифікацій у МНОВ і в узагальненому принципі відхилу для аргументних задач. Виведені нові оцінки зверху для параметра регуляризації.

Розвинуті методи регуляризації несумісних операторних рівнянь і досліджено вживання у цих методах регуляризуючих за критерієм алгоритмів. Запропонований і теоретично обґрунтований новий метод регуляризації несумісних рівнянь на класах еквівалентних за точністю вхідних даних – метод ϵ -мінімального псевдорозв'язку. Узагальнено метод мінімальної псевдооберненої матриці на нормально розв'язувані операторні рівняння та на задачі псевдообернення.

Розглядено вживання розроблених РКА в обернених задачах теплопровідності, обернених задачах Стефана та методах інтегральних рівнянь Фредгольма I роду при розв'язанні еліптичних граничних задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Венцель Е.С., Кобылинський В.Г., Левін О.М. Деякі питання застосування методу регуляризації для розв'язку бігармонічних задач теорії пружності // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1984. № 3, С. 25–28.
2. Венцель Э.С., Кобылинский В.Г., Левин А.М. Некоторые вопросы применения метода регуляризации для численного решения задачи изгиба тонких упругих пластинок // Ж. вычисл. матем. и матем.

физ. 1984. Т. 24. N 2. С. 323-328.

3. Левин А.М. О регуляризации вычисления нижних граней функционалов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т.24. N 8. С. 1123-1128.
4. Венцель Э.С., Левин А.М. Решение двумерных задач теории упругости методом интегральных уравнений I рода // Проблемы нелинейной электротехники. Тез. докл. II Всес. научно-технич. конф. Ч. 3.- К.: Наукова думка, 1984.- С. 56-59.
5. Левин А.М. О выделении особенностей при решении эллиптических краевых задач методом интегральных уравнений первого рода // ДАН УССР. 1985. N 1. С. 17-19.
6. Левин А.М. О решении бигармонических задач теории упругости в нерегулярных областях методом интегральных уравнений I рода // Метод дискретных особенностей в задачах математической физики. Тез. Всес. симп.- Харьков: Изд-во ХВВАИУ, 1985.- С. 63-65.
7. Левин А.М. О вычислении меры несовместности операторных уравнений I рода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1986. Т. 26. N 4. С. 499-507.
8. Венцель Э.С., Кобылинский В.Г., Левин А.М. Об учете особенностей при численной реализации метода компенсирующих нагрузок в бигармонических задачах теории упругости // Проблемы машиностроения. Вып. 25.- К.: Наукова думка, 1986.- С. 16-18.
9. Левин А.М. Об устойчивости задачи построения минимизирующих последовательностей функционалов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. N 4. С. 483-489.
10. Левин А.М. О выделении особенностей при решении двумерных задач теории упругости в нерегулярных многосвязных областях // Прикл. матем. и механика. 1987. Т.51. N 1. С. 39-46.
11. Венцель Э.С., Левин А.М. Развитие метода интегральных уравнений первого рода в задачах теории упругости // Метод дискретных особенностей в задачах математической физики. Тез. докл. III

Всес. симп.- Харьков: Изд-во ХВВАМУ, 1987.- С. 38-40.

12. Левин А.М. О модификации методов Ньютона и секущих и их применении в регуляризирующих алгоритмах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т.28. N 8. С. 1123-1134.
13. Венцель Э.С., Левин А.М. Решение граничных задач теории упругости путем численной реализации метода компенсирующих нагрузок // Прикладная механика. 1989. Т.25. N 12. С. 101-107.
14. Левин А.М. О регуляризации критериальных задач метода наименьших квадратов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. N 9. С. 1408-1413.
15. Морозов В.А., Левин А.М. О регуляризирующем алгоритме решения обратных задач теплопроводности // О кооперируемых работах НИВЦ МГУ и Будапештского УВЦ.- М.: Изд-во МГУ, 1990.- С. 3-11.
16. Левин А.М. Итерационный алгоритм определения параметра регуляризации в методе наименьшей оценки невязки // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т.31. N 1. С. 151-153.
17. Левин А.М. Методы регуляризации решения неустойчивых критериальных задач // Некорректно поставленные задачи в естественных науках. Тез. докл. Междунар. конф.- М.: Изд-во МГУ, 1991.-С.187.
18. Морозов В.А., Левин А.М. О регуляризации обратных по времени задач теплопроводности // Некорректно поставленные задачи в естественных науках. Тез. докл. Междунар. конф.- М.: Изд-во МГУ, 1991.- С. 201.
19. Левин А.М. Оценка сверху параметра регуляризации для несовместных операторных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т.32. N 8. С. 1170- 1179.
20. Левин А.М. Регуляризация неустойчивых критериальных задач приближения // Теорія наближення та задачі обчислювальної математики. Тез. доп. міжнар. конф.- Дніпропетровськ: Вид-во ДДУ, 1993.- С. 118.

21. Levin A.M. Regularization algorithms for solving ill-posed criterion problems.- Proc. Int. Conf. "Ill-Posed Problems in Natural Sciences. Moscow - August 19 - 25 1991".- Utrecht: VSP/Moscow: TVP Sci. Publ., 1992.- pp. 84-88.
22. Левин А.М., Фролов В.Н., Филатова Г.Б. Численное моделирование процесса управления кристаллизации стали в изложницах // Численные методы в гидравлике и гидродинамике. Тез. докл. I междунар. конф.- Донецк: Изд-во ДонГУ, 1994.- с. 82.
23. Левин А.М. Методы регуляризации неустойчивых критериальных задач // Алгоритмический и численный анализ некорректных задач. Тез. докл. Всерос. конф.- Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 1995.- С. 83.
24. Левин А.М., Филатова Г.Б. Прямые градиентные методы вычисления обобщенной меры несовместности операторных уравнений I рода // Алгоритмический и численный анализ некорректных задач. Тез. докл. Всерос. конф.- Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 1995.- С. 84-85.
25. Левин А.М., Филатова Г.Б. Прямые методы минимизации в задаче оценки меры несовместности операторных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т.35. N 2. С. 282-292.



А Н Н О Т А Ц И Я

Левин А.М. Регуляризация неустойчивых критериальных задач и решение несовместных операторных уравнений.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.07- "Вычислительная математика"

Киевский университет имени Тараса Шевченко, Киев, 1995.

Защищается 25 научных работ.

Исследуется теория неустойчивых по функционалу (по критерию) задач. Она включает в себя такие задачи, как вычисление меры несовместности линейных и нелинейных операторных уравнений, вычисление нижних граней функционалов и построение для них минимизирующих последовательностей, критериальные задачи теории аппроксимации. Строятся регуляризирующие по критерию алгоритмы для этих задач и эффективные численные методы их реализации. Исследуются регуляризирующие алгоритмы решения несовместных операторных уравнений и неустойчивых задач псевдообращения операторов.

Ключевые слова: некорректно поставленная задача, регуляризирующий алгоритм, мера несовместности операторных уравнений, псевдообращение.

A B S T R A C T

Levin A.M. Regularization of ill-posed criterion problems and solving of incompatible operator equations.

Thesis submitted for degree of Doctor of Physics and Mathematics in speciality "Numerical mathematics".

Code of speciality - 01.01.07.

Kiev University named for Taras Shevchenko, Kiev, 1995.

Theory of unstable by functional (by criteria) problems is investigated. It includes such problems, as calculating of measure of incompatibility of linear and nonlinear operator equations, calculating of the least boundaries of functionals and their minimization sequences, criterion problems of approximation theory. The criterion regularization algorithms are founded for these problems and effective methods of their realization are considered. Regularization algorithms of solving incompatible operator equations and problems of pseudoinverses are investigated.

ill-posed problem, regularization algorithm, measure of incompatibility of operator equation, pseudoinverses.

Подписано к печати		Формат 60x84/16.
Офсетная печать,	Печ.л.	Уч.-изд.л.
Тираж 100	Зак. № 454	Цена договорная

Поправление оперативной полиграфии ЛИНТЭИ
48000, г.Луганск, Красная пл., 4.

445958

AB 33.323