

ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ІВ. ФРАНКА

На правах рукопису

КОМАРНИЦЬКА  
ЛЕСЯ ІВАНІВНА

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ  
ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНИХ ВІДНОСНО  
СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ ЗА ЧАСОМ

01.01.02. - диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата  
фізико-математичних наук

ЛЬВІВ - 1995

317.95  
#6 20.570  
Дисертація в рукописом.

Робота виконана  
Львівського державного  
Інституті прикладних  
Я.С.Підстригача НАН України.

ЛННБ України ім.В.Стефаника



00761396 (W)

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук,  
професор Пташник Б.Й.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,  
професор Горбачук М.Л.  
(Інститут математики НАН України,  
м.Київ),  
доктор фізико-математичних наук,  
професор Хома Г.П.  
(Тернопільський державний педагогіч-  
ний інститут).

Провідна організація - Національний технічний університет  
України (Київський політехнічний  
інститут).

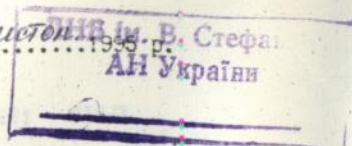
Захист відбудеться "21" *чудня* 1996 р. о 15<sup>30</sup> год. на  
засіданні спеціалізованої вченої Ради Д 04.04.01 при Львівському  
державному університеті ім.Ів.Франка за адресою:

290001, м.Львів, вул. Університетська, 1.

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці  
Львівського держуніверситету (м.Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розіслано "16" *листопада* 1996 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої Ради



Микитюк Я.В.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** При розв'язуванні ряду задач гідродинаміки виникають лінійні диференціальні рівняння із частинними похідними, не розв'язані відносно старшої похідної за часом:

$$D_t^n L_0(x; D_x)u + \sum_{n=0}^{n-1} D_t^m L_{n-m}(x; D_x)u = f(t, x), \quad (1)$$

де оператор  $L_0(x; D_x)$  - еліптичний. Ці рівняння не задовольняють умови Коші-Ковалевської. Некласичність рівнянь (1) проявляється в тому, що навіть найпростіші крайові задачі для них не завжди є розв'язні. У випадку  $n=1$  такі рівняння були отримані при вивченні деяких типів хвиль в тонких шарах рідини на поверхні кулі, що обертається. При  $n=2$  частинними випадками рівняння (1) є рівняння С.Л.Соболева, яке описує малі коливання ідеальної рідини в посудині, що обертається, аналог рівняння С.Л.Соболева для коливань в'язкої рідини, рівняння динаміки стратифікованих рідин тощо.

Основи теорії рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної, були закладені в роботах С.Л.Соболева, де вивчалися задача Коші, а також мішані задачі для рівняння

$$D_t^2(D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 + D_{x_3}^2)u + \omega^2 D_{x_3}^2 u = f(t, x).$$

Ці дослідження були продовжені в працях Р.А.Александряна, Р.Т.Денчева, Т.І.Зеленяка, С.А.Гальперна, В.Н.Масленникової, А.Г.Костюченка і Г.І.Ескіна, В.П.Маслова, А.Л.Павлова, пізніше - С.І.Янова, А.А.Ляшенка, С.Д.Троїцької та ін. Задачу Коші та мішані задачі для рівнянь (1) при  $n=1$  розглядали Р.Швалтер, Т.Тінг, М.А.Абдрахманов, І.К.Курмушев, А.І.Кожанов, для рівнянь динаміки стратифікованих рідин - С.А.Габов, А.Г.Светніков,

В.Д.Плетнер, Я.С.Якубов, П.А.Крутицький, Х.Б.Аллахвердієв. Досить повне дослідження мішаних задач для диференціальних рівнянь 1 систем вигляду (1) довільного порядку проведено в роботах С.В.Успенського, Г.В.Демиденка, В.Г.Перепелкіна, І.І.Матвеевої, А.Ш.Кахраманова. Крайові задачі для диференціально-операторних рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної, вивчалися в працях М.І.Вишика, М.Л.Горбачука та І.В.Федака, В.К.Романка.

З точки зору загальної теорії крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними, а також конкретних потреб практики представляє інтерес вивчення задач з нелокальними, а також локальними двоточковими та багатоточковими умовами за змінною  $t$  для рівнянь (1). В останні роки такі задачі для гіперболічних і параболічних рівнянь розглядалися в роботах Б.Я.Пташника, В.М.Поліщук, В.С.Ільківа, Б.О.Салиги, В.В.Фіголя, П.І.Штабалека, І.О.Бобика, Н.М.Задорожної. Їх розв'язність у більшості випадків пов'язана з проблемою малих знаменників, для аналізу оцінок знизу яких були використані результати і методи метричної теорії чисел, розроблені В.Г.Сприджуком та його учнями, а також метричні теореми, отримані в працях В.І.Берника та Б.Я.Пташника.

Дана дисертація присвячена вивченню крайових задач з нелокальними двоточковими, а також локальними двоточковими та багатоточковими умовами за змінною  $t$  для диференціальних рівнянь і систем довільного порядку, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом. Значна увага приділяється метричному аналізу оцінок знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків розглядуваних задач. Результати дисертації органічно доповнюють теорію крайових задач із вказаними умовами,

розроблену в роботах названих вище авторів для гіперболічних та параболічних рівнянь.

**Мета роботи.** Знаходження умов коректності крайових задач з нелокальними, двоточковими та багатоточковими умовами за змінною  $t$  для диференціальних рівнянь та систем із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом. Конструктивна побудова розв'язків розглядуваних задач. Доведення теорем метричного характеру про оцінки знизу малих знаменників, з яких випливає виконання достатніх умов існування розв'язків задач для майже всіх (відносно міри Лебега) коефіцієнтів рівнянь, коефіцієнтів граничних умов та параметрів областей.

**Методика дослідження.** В роботі використовуються методи теорії звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь із частинними похідними, функціонального аналізу, теорії рядів Фур'є, лінійної алгебри та метричної теорії чисел.

**Наукова новизна.** Вивчені питання існування, єдиності та неперервної залежності від правих частин рівнянь і граничних умов розв'язків задач з нелокальними двоточковими, а також локальними двоточковими та багатоточковими умовами за часовою змінною та певними умовами за просторовими координатами (періодичності, типу умов Діріхле) для диференціальних рівнянь і систем довільного порядку зі сталими та змінними за  $x$  коефіцієнтами, не розв'язаних відносно старшої похідної. Розв'язність цих задач є нестійкою відносно параметрів задачі і пов'язана з проблемою малих знаменників. Доведені нові метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які в більшості випадків мають складну нелінійну структуру. Побудовані явні формули розв'язків розглядуваних задач у вигляді рядів за системами ортогональних функцій.

Всі отримані результати є новими.

Теоретична і практична цінність. Результати роботи вносять вклад у загальну теорію диференціальних рівнянь із частинними похідними. Вони можуть знайти застосування при вивченні конкретних задач практики, а також служать джерелом нових задач метричної теорії діофантових наближень.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на:

- Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь (1992 р., 1994 р.);
- Всеукраїнській науковій конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (Дрогобич, 1994 р.);
- Міжнародній математичній конференції, присвяченій пам'яті Ганса Гана (Чернівці, 1994 р.);
- семінарі молодих вчених Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, присвяченого пам'яті академіка Я.С.Підстригача (Львів, 1994 р.);
- третій та четвертій Міжнародних наукових конференціях ім. академіка М.Кравчука (Київ, 1994 р., 1995 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1-11].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, 8 параграфів, об'єднаних у 3 розділи, та списку літератури, що включає 93 найменування. Загальний обсяг роботи 140 сторінок.

#### КОРОТКИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі зроблено короткий огляд літератури по темі дисертації, викладено основні результати роботи, наведено допоміжні відомості теоретико-числового характеру, а також

наступні позначення та функціональні простори, що використовуватимуться в роботі:

$Z^P (z^P, \Omega^P)$  - множина точок  $\mathbb{R}^P$  з цілими (цілими невід'ємними, цілими додатними) координатами;  $(y \in Y: P(y))$  - підмножина елементів  $Y$ , що володіють властивістю  $P(y)$ ;  $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^P$ ;  $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^{P+1}$ ;  $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^P$ ;  $s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}^P$ ;  $(k, x) = k_1 x_1 + \dots + k_p x_p$ ;  $\|k\| = (k, k)^{1/2}$ ;  $|k| = |k_1| + \dots + |k_p|$ ;  $|s| = s_1 + \dots + s_p$ ;  $\Omega^P$  -  $p$ -вимірний тор, який отримується шляхом отождоження протилежних граней куба  $(x \in \mathbb{R}^P: 0 \leq x_r \leq \pi, r = \overline{1, p})$ ;  $\Pi^P = (x \in \mathbb{R}^P: 0 \leq x_r \leq \pi, r = \overline{1, p})$ ;  $D^P = [0, T] \times \Omega^P$ ;  $Q^P = [0, T] \times \Pi^P$ ;  $H_q(\Omega^P), q \in \mathbb{Z}$ , - гільбертовий простір  $2\pi$ -періодичних за  $x_1, \dots, x_p$  комплекснозначних функцій  $v(x) = \sum_{|k| \geq 0} v_k \exp(i(k, x))$  з нормою

$$\|v(x)\|_{H_q(\Omega^P)}^2 = (2\pi)^P \sum_{|k| \geq 0} [1 + \|k\|^2]^q |v_k|^2; \quad C^n([0, T], H_q(\Omega^P)),$$

$n \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}$ , - банаховий простір функцій  $u(t, x)$  таких, що для

кожного  $t \in [0, T]$  функції  $\frac{\partial^r u(t, x)}{\partial t^r}, r = \overline{0, n}$ , належать простору  $H_q(\Omega^P)$  і неперервні за  $t$  в нормі  $H_q(\Omega^P)$ ;  $\|u(t, x)\|_{C^n([0, T], H_q(\Omega^P))}$

$$= \sum_{j=0}^n \max_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right\|_{H_q(\Omega^P)}; \quad \text{відповідні простори вектор-функцій}$$

позначено через  $\bar{H}_q(\Omega^P)$  і  $\bar{C}^n([0, T], \bar{H}_q(\Omega^P))$ ;  $C^{(q, r)}(\bar{D}), \bar{D} = [0, T] \times \bar{G}$ ,

$\bar{G}$  - компакт в  $\mathbb{R}^P$ , - банаховий простір функцій  $u(t, x)$  з нормою

$$\|u(t, x)\|_{C^{(q, r)}(\bar{D})} = \sum_{|s| \leq q} \max_{(t, x) \in \bar{D}} \left| \frac{\partial^{|s|} u(t, x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} \right|.$$

У першому розділі дисертації розглядаються крайові задачі з нелокальними умовами за змінною  $t$ , які узагальнюють умови періодичності. Для диференціальних рівнянь зі сталими та змінними за  $x$  коефіцієнтами, не розв'язаних відносно старшої

похідної за часом. На прикладі лінійного оператора зі сталими коефіцієнтами, що є добутком операторів другого порядку, які виникають в теорії коливань стратифікованих рідин, показано, як результати, отримані для лінійного оператора, переносяться на випадок збурення його нелінійним інтегро-диференціальним оператором.

У §1 в паралелепіпеді  $D = \{(t, x, y) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \omega\}$  досліджується задача

$$\int_0^{\pi} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta - a_j^2) + b_j^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] u(t, x, y) = f(t, x, y) + \iint_{\Omega} K(t, x, y, \xi, \eta) \times \\ \times F(t, \xi, \eta, \bar{u}(t, \xi, \eta)) d\xi d\eta, \quad (2)$$

$$\sum_{s_0=0}^{2n-1} \sum_{|s| \leq n} A_{s_0}^s \cdot r \frac{\partial^{2|s|}}{\partial x^{2s_1} \partial y^{2s_2}} \left[ \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} \Big|_{t=0} - \mu \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} \Big|_{t=T} \right] = 0, \quad r = \overline{1, 2n}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^{2q} u}{\partial x^{2q}} \Big|_{x=0, x=\pi} = 0, \quad \frac{\partial^{2q} u}{\partial y^{2q}} \Big|_{y=0, y=\omega} = 0, \quad q = \overline{0, n-1}, \quad (4)$$

де  $a_j, b_j, A_{s_0}^s, r, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$

$$\bar{u}(t, \xi, \eta) = \left\{ \frac{\partial^{s_0+2|s|}}{\partial t^{s_0} \partial \xi^{2s_1} \partial \eta^{2s_2}} u : s_0 \leq 2n, |s| \leq n \right\}.$$

В п.1.1 розглядається випадок, коли  $\varepsilon=0$ . Розв'язок незбуреної задачі шукається у вигляді ряду

$$u^0(t, x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} u_{k,p}^0(t) \sin kx \sin \frac{p y}{\omega}.$$

Для єдиності розв'язку задачі (2)-(4) при  $\varepsilon=0$  в просторі  $C^{(2n, 2n)}(D)$  необхідно і досить, щоб рівняння

$$B(k, p) = 0, \quad \int_0^{\pi} (1 - \mu \exp(\lambda_j T)) = \int_0^{\pi} (\mu^2 - 2\mu \cos(\nu_j(k, p)T) + 1) = 0$$

не мали розв'язків у натуральних числах  $k, p$  (теорема 1.1), де

$$B(k, p) = \det \left\| \sum_{|s| \leq n} (-1)^{|s|} A_{s_0}^s r^k \left(\frac{\pi p}{\omega}\right)^{2s_1} \left(\frac{\pi p}{\omega}\right)^{2s_2} \right\|_{s_0=0, 2n-1, \dots, 2n-1, 2n}$$

$$v_j(k, p) = \frac{\partial_j \omega k}{\omega^2 k^2 + \pi^2 p^2 + a_j^2 \omega^2}, \quad \lambda_j = i v_j(k, p), \quad \lambda_{n+j} = -i v_j(k, p), \quad j = \overline{1, n}.$$

При виконанні умов єдиності розв'язку справедливе таке твердження.

**Теорема 1.2.** Нехай існують додатні сталі  $C_i, \gamma_i, i = \overline{1, 3}$ , такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів  $(k, p) \in \mathbb{N}^2$  виконуються нерівності

$$|B(k, p)| \geq C_1 (k+p)^{-\gamma_1}, \quad (5)$$

$$|1 - \mu \exp(\lambda_l T)| \geq C_2 (k+p)^{-\gamma_2}, \quad l = \overline{1, 2n}. \quad (6)$$

$$\prod_{j \neq \alpha}^{2n} |\lambda_j - \lambda_\alpha| \geq C_3 (k+p)^{-\gamma_3}, \quad \alpha = \overline{1, 2n}, \quad (7)$$

і нехай функція  $f(t, x, y) \in C^{(0, m)}(D)$ ,  $m > \gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3 + 4n^2 + 2n + 2$ , задовольняє умови

$$\frac{\partial^{2j} f}{\partial x^{2j}} \Big|_{x=0, x=\pi} = \frac{\partial^{2j} f}{\partial y^{2j}} \Big|_{y=0, y=\omega} = 0, \quad j = \overline{0, \lfloor (m-1)/2 \rfloor}.$$

Тоді при  $\varepsilon = 0$  існує розв'язок задачі (2)-(4), який належить простору  $C^{(2n, 2n)}(D)$  і неперервно залежить від  $f(t, x, y)$ .

Доведено, що для всіх (крім скінченного числа) векторів  $(k, p) \in \mathbb{N}^2$  нерівність (5) виконується для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі  $\mathbb{R}^2$ ) векторів  $(B_r, |r| \leq 4n^2)$ , де  $\beta$  - число всіх коефіцієнтів  $B_r$  полінома  $B(k, p)$ , а нерівності (6) справджуються для майже всіх чисел  $\pi/T$  при  $\gamma_i > 2, i = \overline{1, 2}$  (теореми 1.3, 1.4).

Для встановлення оцінок (7) використовується наступна лема.

**Лема 1.1.** Для майже всіх (відносно міри Лебега в  $\mathbb{R}^3$ ) векторів  $z = (A, B, C)$  нерівність

$$|Ak^2 + Bp^2 + C| > K(k+p)^{-2-\delta}, \quad 0 < \delta < 1, \quad K > 0,$$

виконуваться для всіх (крім скінченного числа) векторів  $(k, p) \in \mathbb{N}^2$ .

**Теорема 1.5.** Для майже всіх (відносно міри Лебега в  $\mathbb{R}^{2n(n-1)/2}$ ) векторів  $g = (g_{j\alpha}, \quad j, \alpha = \overline{1, n}, \quad j \neq 0)$ , де  $g_{j,0} = ((b_j^2 - b_0^2)\omega^2, (b_j^2 - b_0^2)\pi^2, (b_j^2 \alpha_0^2 - b_0^2 \alpha_j^2)\omega^2)$ , нерівності (7) виконуваться при  $\gamma_3 > 4n-1$  для всіх (крім скінченного числа) векторів  $(k, p) \in \mathbb{N}^2$ .

В п.1.2 розглядається збурена задача (2)-(4). В припущенні, що незбурена задача однозначно розв'язна, задача (2)-(4) зводиться до еквівалентного їй інтегро-диференціального рівняння. За допомогою принципів Шаудера і Каччіополлі-Банаха для досить малих  $|\varepsilon|$  доводиться існування та існування єдиного розв'язку задачі (2)-(4) при виконанні певних умов на функції  $K(t, x, y, \xi, \eta)$  і  $F(t, \xi, \eta, \bar{u})$  (теореми 1.7 та 1.6 відповідно).

В §2 розглядається задача

$$M\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\right)u = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n L\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\right)u + \sum_{\beta=0}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\beta \left[ \sum_{|s| \leq 2l} A_{\beta, s}^s \frac{\partial^{|s|} u}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} \right] = f(t, x), \quad (8)$$

$$\sum_{\beta=0}^{n-1} \sum_{|s| \leq 2l} A_{\beta, r}^s \frac{\partial^{|s|} u}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} \left[ \frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} \Big|_{t=0} - \mu \frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} \Big|_{t=T} \right] = 0, \quad r = \overline{1, n}, \quad (9)$$

в області  $D^p$ , де  $L\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\right) = \sum_{|s|=2l} b^s \frac{\partial^{|s|} u}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}}$  - еліптичний оператор,  $b^s, \alpha_j^s, A_{\beta, r}^s \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_{n-1}^{(0)} \neq 0$ ,  $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Вигляд області  $D^p$  накладає умови  $2\pi$ -періодичності за змінними  $x_1, \dots, x_p$  на функції  $u(t, x)$ ,  $f(t, x)$ . Розв'язок задачі (8), (9) шукається у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} u_k(t) \exp(it(k, x)). \quad (10)$$

Припускається, що для всіх  $k \in \mathbb{Z}^p$   $\lambda$ -корені рівняння  $M(\lambda, (k)) = 0$ , які позначені через  $\lambda_j(k) = \alpha_j(k) + i b_j(k)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , попарно різні і не до-

рівняють нулю. Нехай  $A(k) = \det \left\| \sum_{|s| \leq 2l} A_{\beta, r}^s (ik_1)^s \dots (ik_p)^s \right\|_{\substack{\gamma = \overline{1, n} \\ \beta = \overline{0, n-1}}}$

У припущенні, що виконуться умови єдиності та існування функції  $u_0(t)$  (зауваження 2.1), справедливі наступні твердження.

**Теорема 2.1.** Для єдиності розв'язку задачі (8), (9) в просторі  $C^n((0, T], H_{2l}(\Omega^P))$  необхідно і досить, щоб виконувались умови

$$A(k) \neq 0, k \in \mathbb{Z}^P \setminus \{(0)\}, \quad (11)$$

$$1 - \mu \exp(\lambda_j(k)T) \neq 0, j = \overline{1, n}, k \in \mathbb{Z}^P \setminus \{(0)\}. \quad (12)$$

У зауваженні 2.2 умови (12) сформульовані в термінах чисел  $T, \ln|\mu|, \arg \mu, \alpha_j(k), b_j(k), j = \overline{1, n}$ .

**Теорема 2.2.** Нехай існують додатні сталі  $M_i$  і  $\gamma_i \in \mathbb{N}$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів  $k \in \mathbb{Z}^P$  і довільного  $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$ , виконуються нерівності

$$|1 - \mu \exp(\lambda_\gamma(k)T)| \geq M_1 |k|^{-\gamma_1 - \varepsilon/4}, \quad \gamma = \overline{1, n}, \quad (13)$$

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \alpha}}^n |\lambda_j(k) - \lambda_\alpha(k)| \geq M_2 |k|^{-\gamma_2 - \varepsilon/4}, \quad \alpha = \overline{1, n}, \quad (14)$$

$$|A(k)| \geq M_3 |k|^{-\gamma_3 - \varepsilon/4}. \quad (15)$$

Якщо  $f(t, x) \in C((0, T], H_\varphi(\Omega^P))$ ,  $\varphi = q + 2nl + \gamma_1 + 2\gamma_2 + \gamma_3 + 1$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ , то існує розв'язок задачі (8), (9), який належить простору  $C^n((0, T], H_q(\Omega^P))$  і неперервно залежить від функції  $f(t, x)$ .

Доведено, що для всіх (крім скінченного числа) векторів  $k \in \mathbb{Z}^P$  нерівності (13) виконуються при  $\gamma_1 \geq p + 2l$  для майже всіх (відносно міри Лебега в  $\mathbb{R}^{2+0}$ ) векторів  $(\ln|\mu|, T, g)$  або майже всіх векторів  $(\varphi/\pi, T/\pi, g)$ , де  $\varphi = \arg \mu$ ,  $g$  - вектор, компонентами якого є коефіцієнти  $\alpha_0^s, |s| \leq 2l$ , рівняння (8),  $\delta$  - число цих коефіцієнтів (теорема 2.3), нерівність (15) - при  $\gamma_3 \geq p$  для майже всіх (відносно міри Лебега в  $\mathbb{R}^n$ ) векторів  $\alpha$  і для всіх векторів  $\beta$  (або для майже всіх  $\beta$  і для всіх  $\alpha$ ), де вектори  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  і  $\beta \in \mathbb{R}^0$ .

складені із коефіцієнтів поліномів  $\text{Re } A(k)$  і  $\text{Im } A(k)$  відповідно (теорема 2.4), а нерівності (14) - при  $\gamma \geq p(n-1)/2$  для майже всіх (відносно міри Лебега в  $\mathbb{R}^p$ ) векторів  $h = (h_1, \dots, h_p)$ ,  $h_r = \alpha_0 \left( \overbrace{r-1}^{r-1}, \dots, 0, 21, 0, \dots, 0 \right)$ ,  $r = \overline{1, p}$ , і довільних фіксованих коефіцієнтів рівняння (8), які не входять в  $h$  (теорема 2.5).

В §3 розглядаються рівняння зі змінними за  $x$  коефіцієнтами.

Пункт 3.1 присвячений дослідженню в прямокутнику  $Q^1 = [0, T] \times [0, \pi]$  задачі

$$R\left(\frac{\partial}{\partial t}, L_1\right)u = \frac{\partial^n u}{\partial t^n} + \sum_{\beta=0}^{n-1} L_1^\beta u + \sum_{s=0}^1 \sum_{\beta=0}^1 \alpha_{\beta s} \frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} + L_1 u = f(t, x), \quad (16)$$

$$\sum_{\beta=0}^{n-1} \sum_{s=0}^1 A_{\beta s}^r L_1^s \left[ \left. \frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} \right|_{t=0} - \mu \left. \frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} \right|_{t=T} \right] = 0, \quad r = \overline{1, n}, \quad (17)$$

$$L_1^l u \Big|_{x=0} = L_1^l u \Big|_{x=\pi} = 0, \quad l = \overline{0, l-1}, \quad (18)$$

де  $\alpha_{\beta s}, A_{\beta s}^r \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_{0,1} \neq 0$ ,  $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $n \geq 2$ ,  $L_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left[ p(x) \frac{\partial}{\partial x} \right] + q(x)$ ,  $L_1^0 u = u$ ,  $L_1^l u = L_1(L_1^{l-1} u)$ , функції  $p(x) > 0$ ,  $q(x) \geq 0$  - достатньо гладкі на  $[0, \pi]$ . Розв'язок задачі (16)-(18) шукається у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x),$$

де  $X_k(x)$  - нормовані власні функції задачі  $L_1 X = \lambda X$ ,  $X(0) = X(\pi) = 0$ , що відповідають власним значенням  $\lambda_k$ .

Припускається, що для всіх власних чисел  $\lambda_k$  корені  $\nu_j(\lambda_k)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , рівняння  $R(\nu, \lambda_k) = 0$  мають кратність, рівну одиниці, і не дорівнюють нулю. Нехай  $A(\lambda_k) = \det \left\| \sum_{s=0}^1 A_{\beta s}^r \lambda_k^s \right\|_{r=\overline{1, n}}^{\beta=\overline{0, n-1}}$ .

Теорема 3.1. Для єдиності розв'язку задачі (16)-(18) в просторі  $C^{(n, 2l)}(Q^1)$  необхідно і досить, щоб виконувались умови

$$\Delta(\lambda_k) = A(\lambda_k) \prod_{n \geq l} (1 - \text{mepr}(\nu_j(\lambda_k)/T)) \prod_{n \geq l} (\nu_l(\lambda_k) - \nu_j(\lambda_k)) \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Теорема 3.2. Нехай виконуються умови (19) і нехай існують

сталі  $M_1 > 0$ ,  $\gamma_1 \in \mathbb{N}$ ,  $t = \overline{1, 3}$ , такі, що для всіх (крім скінченного числа) значень  $\lambda_k$  і довільного  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , виконуться нерівності

$$|A(\lambda_k)| \geq M_1 \lambda_k^{-\gamma_1/2 - \varepsilon/8}, \quad (20)$$

$$|1 - \mu \exp(\nu_\gamma(\lambda_k)T)| \geq M_2 \lambda_k^{-\gamma_2/2 - \varepsilon/8}, \quad \gamma = \overline{1, n}, \quad (21)$$

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \alpha}}^n |\nu_j(\lambda_k) - \nu_\alpha(\lambda_k)| \geq M_3 \lambda_k^{-\gamma_3/2 - \varepsilon/8}, \quad \alpha = \overline{1, n}. \quad (22)$$

Якщо  $p(x) \in C^{2\psi-1}[0, \pi]$ ,  $q(x) \in C^{2\psi-2}[0, \pi]$ , а функція  $f(t, x) \in C^{(0, 2\psi)}(Q^1)$  задовольняє умови

$$L_j f \Big|_{x=0} = L_j f \Big|_{x=\pi} = 0, \quad t = \overline{0, \psi-1},$$

де  $2\psi \geq 2l + \gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3 + 2n + 2$ , то існує розв'язок задачі (16)-(18), який належить простору  $C^{(n, 2l)}(Q^1)$  і неперервно залежить від  $f(t, x)$ .

Доведені теоретико-числові теореми 3.3-3.5 про виконання оцінок (20)-(22), з яких випливає розв'язність задачі (16)-(18) для майже всіх (відносно міри Лебега) векторів, компоненти яких є функціями коефіцієнтів  $a_{0s}$ ,  $A_{ps}^r$  та параметрів  $\mu$ ,  $T$ .

В п.3.2 результати попереднього пункту переносяться на випадок багатьох просторових змінних. В області  $D = [0, T] \times G$ ,  $G$  - компакт в  $\mathbb{R}^p$  з досить гладкою границею  $\partial G$ , розглядається задача (16), (17), де оператор  $L_j$  замінено на еліптичний оператор  $L = \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial}{\partial x_i} \left( b_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + b(x)$ , з граничними умовами

$$L'u \Big|_{\partial G} = 0, \quad t = \overline{0, T-1}.$$

При дослідженні питання існування розв'язку розглядуваної задачі з'явилися нові аспекти, пов'язані з оцінками власних функцій задачі Діріхле для оператора  $L$  в області  $G$  та їх похідних, які залежать від розмірності  $G$ , що вимагало підвищення гладкості

коефіцієнтів та правої частини рівняння за змінними  $x_1, \dots, x_p$  і вплинуло на порядок апроксимації нулем малих знаменників, які фігурують у формулі для розв'язку задачі (див. теорему 3.6).

Другий розділ присвячений вивченню питань класичної коректності крайових задач з локальними двоточковими умовами за змінною  $t$  і періодичними умовами за просторовими змінними  $x_1, \dots, x_p$  для диференціальних рівнянь і систем зі сталими коефіцієнтами, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом.

В §4 розглядається задача типу задачі Діріхле в області  $D^p$ :

$$U \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^{2n} L \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) u + \sum_{\beta=0}^{n-1} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^{2\beta} \left[ \sum_{|s| \leq 2^1} \alpha_p^s \frac{\partial^{|s|} u}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} \right] = f(t, x), \quad (23)$$

$$\frac{\partial^{2r} u}{\partial t^{2r}} \Big|_{t=0} = \frac{\partial^{2r} u}{\partial t^{2r}} \Big|_{t=T} = 0, \quad r=0, n-1, \quad (24)$$

де оператор  $L \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) = \sum_{|s| \leq 2^1} b^s \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}}$  - еліптичний,  $b^s, \alpha_p^s \in \mathbb{R}$ .

Вигляд області  $D^p$  накладає умови  $2\pi$ -періодичності за  $x_1, \dots, x_p$  на функції  $u(t, x)$ ,  $f(t, x)$ . Припускається, що для всіх  $k \in \mathbb{Z}^p$   $L(k) \neq 0$ , а кратність коренів  $\pm \mu_j(k)$ ,  $j=\overline{1, q}$ , рівняння

$$U(\mu^2, tk) = 0 \quad (25)$$

не залежить від  $k$  і дорівнює відповідно  $m_j$ ,  $m_1 + \dots + m_q = n$ .

В п.4.1 аналізується випадок простих коренів рівняння (25), тобто коли  $q=n$ ,  $m_j=1$ ,  $j=\overline{1, n}$ . Доведено, що виконання умов

$$\exp(-\mu_j(k)T) - \exp(\mu_j(k)T) \neq 0, \quad j=\overline{1, n}, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \quad (26)$$

необхідно і досить для єдиності розв'язку задачі (23), (24) в просторі  $C^{2n}(t \in [0, T], H_r(\Omega^p))$ ,  $r \in \mathbb{Z}$  (теорема 4.1). При виконанні умов (26), які сформульовано в термінах чисел  $T$ ,  $\operatorname{Re} \mu_j(k)$ ,

$\operatorname{Im} \mu_j(k)$ ,  $j=\overline{1, n}$  (зауваження 4.1), справедливе наступне твердження.

**Теорема 4.2.** Нехай існують сталі  $M_1 > 0$  і  $\gamma_1 \in \mathbb{N}$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів  $k \in \mathbb{Z}^p$  і довільного  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , виконуються нерівності

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |\mu_i^2(k) - \mu_j^2(k)| \geq M_1 |k|^{-\gamma_1 - \varepsilon/4}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (27)$$

$$|\mu_j(k)| \geq M_2 |k|^{-\gamma_2 - \varepsilon/4}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (28)$$

$$|\exp(-\mu_j(k)T) - \exp(\mu_j(k)T)| \geq M_3 |k|^{-\gamma_3 - \varepsilon/4}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (29)$$

Якщо  $f(t, x) \in C([0, T], H_\psi(\mathbb{R}^p))$ ,  $\Phi = r + 2\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + 1$ , то існує розв'язок задачі (23), (24), який належить простору  $C^{2\Phi}([0, T], H_r(\mathbb{R}^p))$  і неперервно залежить від  $f(t, x)$ .

При доведенні теореми 4.2 використовуються такі твердження, встановлені в роботі.

**Лема 4.1.** Існують константи  $C_0 > 0$  і  $K = K(C_0) > 0$  такі, що для всіх  $k \in \mathbb{Z}^p$ ,  $|k| \geq K$ ,  $|L(tk)| \geq C_0 |k|^{2\Phi}$ .

**Лема 4.2.** Для коренів  $\pm \mu_1(k), \dots, \pm \mu_n(k)$  характеристичного рівняння (25) справедливі оцінки

$$|\mu_j(k)| \leq C, \quad j = \overline{1, n}, \quad k \in \mathbb{Z}^p,$$

де константа  $C > 0$  не залежить від  $k$ .

Доведені метричні теореми про виконання оцінок (27)–(29), з яких випливає класична коректність задачі (23), (24) для майже всіх векторів, складених з параметрів задачі. А саме, показано, що для всіх (крім скінченного числа) векторів  $k \in \mathbb{Z}^p$  нерівності (27) виконуються при  $\gamma_1 \geq p(n-1)/2$  для майже всіх (відносно міри Лебега в  $\mathbb{R}^p$ ) векторів  $h = (h_1, \dots, h_p)$ ,  $h_r = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{r-1}, 2i, 0, \dots, 0$ ,  $\times \underbrace{(0, \dots, 0)}_{r-1}, 2i, 0, \dots, 0$ ,  $r = \overline{1, p}$ , і довільного фіксованого вектора  $y$ , складеного з коефіцієнтів рівняння (23), які не входять в  $h$  (теорема 4.3). Крім того, доведено, що для всіх (крім скінченного числа) векторів  $k \in \mathbb{Z}^p$  нерівності (22)

виконуються для майже всіх (відносно міри Лебега в  $\mathbb{R}^k$ ) векторів  $\alpha$  і для всіх векторів  $\beta$  (або для майже всіх  $\beta$  і для всіх  $\alpha$ ), а нерівності (29) - для майже всіх (відносно міри Лебега в  $\mathbb{R}^{k+1}$ ) векторів  $(\alpha, \pi/T)$  і для всіх векторів  $\beta$  (або для майже всіх  $(\beta, \pi/T)$  і для всіх  $\alpha$ ) при  $\gamma_i \geq p+2l$ ,  $i=2,3$  (теореми 4.4, 4.5), де  $\alpha \in \mathbb{R}^k$  і  $\beta \in \mathbb{R}^0$  - вектори, складені відповідно із коефіцієнтів  $\alpha_0^s$ ,  $|s|=2r$ ,  $r=\overline{0, l}$ , і  $\alpha_0^s$ ,  $|s|=2r-1$ ,  $r=\overline{1, l}$ , рівняння (23).

В п.4.2 розглядається випадок кратних  $\mu$ -коренів рівняння (25), який пов'язаний з новими труднощами при конструктивній побудові розв'язку задачі (23), (24). Якщо виконані умови єдиності розв'язку (теорема 4.6), які аналогічні умовам (26), то справедливе наступне твердження.

**Теорема 4.7.** Нехай існують такі додатні константи  $M_j$  та  $s_j$ ,  $j=\overline{1,3}$ , що для всіх (крім скінченного числа) векторів  $k \in \mathbb{Z}^p$  виконуються нерівності

$$|\mu_r^2(k) - \mu_v^2(k)| \geq M_1 |k|^{-s_1}, \quad r, v = \overline{1, q}, \quad r \neq v,$$

$$|\mu_r(k)| \geq M_2 |k|^{-s_2}, \quad r = \overline{1, q},$$

$$|\exp(-\mu_v(k)T) - \exp(\mu_v(k)T)| \geq M_3 |k|^{-s_3}, \quad v = \overline{1, q},$$

і нехай  $f(t, x) \in C((0, T], H_r, \{y, \dots\}, \Omega^p)$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ ,

$$y = \beta + \gamma + s_2(\alpha - n)/2, \quad \alpha = \sum_{p=1}^q m_p^2,$$

$$\beta = \max_{1 \leq v \leq q} (m_v(n s_1 + s_2/2 + s_3) - m_v^2(s_1 + s_2/2)),$$

$$\gamma = \max_{1 \leq v \leq q} (m_v n s_1 + m_v^2(s_2 - s_1)).$$

Тоді існує розв'язок задачі (23), (24), який належить простору  $C^{2n}((0, T], H_r, \Omega^p)$  і неперервно залежить від  $f(t, x)$ .

В §5 результати §4 переносяться на задачу з умовами вигляду (24) для сис. зми рівнянь

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2n} L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u + \sum_{\beta=0}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2\beta} \left[ \sum_{|s| \leq 2l} A^{\beta,s} \frac{\partial^{|s|} u}{\partial x_1^s \dots \partial x_p^s} \right] = f(t,x), \quad (30)$$

де  $u = \text{col}(u_1, \dots, u_m)$ ,  $f = \text{col}(f_1, \dots, f_m)$ ,  $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|s| \leq 2l} B^s \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^s \dots \partial x_p^s}$  - матричний еліптичний оператор,  $B^s, A^{\beta,s}$  -  $m \times m$ -матриці зі сталими дійсними елементами  $b_{r,h}^s, a_{r,h}^{\beta,s}$ ,  $r, h = \overline{1, m}$ , відповідно. Результати, отримані при вивченні питань існування та єдиності розв'язку розглядуваної задачі в просторі  $C^{2n}(\{0, T\}, \bar{H}_q(\Omega^p))$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ , формулюються, в основному, аналогічно до результатів дослідження задачі (23), (24) (теореми 5.1, 5.2). Доведено метричні теореми 5.3-5.5 про оцінки знизу малих знаменників (частина з яких має досить складну структуру), які виникли при побудові розв'язку задачі. З цих теорем випливає коректна розв'язність задачі (30), (24) для майже всіх векторів, компоненти яких є функціями коефіцієнтів  $b_{r,h}^s, a_{r,h}^{\beta,s}$ ,  $r, h = \overline{1, m}$ , і  $\pi/T$ .

Природним узагальненням задачі (23), (24) є крайова задача з різною кількістю умов на кінцях відрізка  $0 \leq t \leq T$ , яка розглядається в §6:

$$N\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x) + \sum_{\beta=0}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\beta} \left[ \sum_{|s| \leq 2l} a_{\beta}^s \frac{\partial^{|s|} u(t,x)}{\partial x_1^s \dots \partial x_p^s} \right] = 0, \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^{j-1} u}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=0} &= \varphi_j(x), \\ \frac{\partial^{r-1} u}{\partial t^{r-1}} \Big|_{t=T} &= \varphi_{m+r}(x) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} [j = \overline{1, m}; \\ r = \overline{1, n-m}; \\ 1 \leq m \leq n-1 \end{aligned}, \quad (32)$$

де  $L$  - той же оператор, що і в рівнянні (23).

Розв'язок задачі (31), (32) шукається у вигляді ряду (10). Припускається, що для всіх  $k \in \mathbb{Z}^p$  корені  $\lambda_\gamma(k)$ ,  $\gamma = \overline{1, n}$ , рівняння  $N(\lambda, tk) = 0$  є простими. Для єдиності розв'язку задачі (31), (32) в просторі  $C^n(\{0, T\}, H_q(\Omega^p))$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ , необхідно і досить, щоб

ЛНБ ім. В. Стефанишина  
АН України

виконувались умови  $\Delta(k) \neq 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}^p$  (теорема 6.1), де  $\Delta(k) = \det \|d_{j,\gamma}\|_{j,\gamma=1}^n$ ,  $d_{j,\gamma} = \lambda_\gamma^{j-1}(k)$ ,  $d_{m,r,\gamma} = \lambda_\gamma^{r-1}(k) \exp(\lambda_\gamma(k)T)$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $r = \overline{1, n-m}$ ,  $\gamma = \overline{1, n}$ .

Встановлено існування розв'язку  $u(t, x) \in C^n([0, T], H_q(\Omega^p))$  розглядуваної задачі, який неперервно залежить від функцій  $\varphi_\alpha(x)$ ,  $\alpha = \overline{1, n}$ , якщо для всіх (крім скінченного числа) векторів  $k \in \mathbb{Z}^p$  виконується нерівність

$$|\Delta(k)| \geq M_0 |k|^{-v-\varepsilon_0}, \quad v \in \mathbb{N}, \quad 0 < \varepsilon_0 < 1, \quad (33)$$

і  $\varphi_\alpha(x) \in H_{q, v+1}(\Omega^p)$ ,  $\alpha = \overline{1, n}$  (теорема 6.2).

Збіжність ряду, що зображає розв'язок задачі, пов'язана з оцінкою знизу модуля визначника  $\Delta(k)$ , який, на відміну від розглянутих раніше задач, не факторизується, і його треба оцінювати у цілому. Доведено, що для всіх (крім скінченного числа) векторів  $k \in \mathbb{Z}^p$  оцінка (33) виконується при  $v = p(C_n^m - 1)(n! + 1) + p(n-1)/2$ ,  $C_n^m = n! / (m!(n-m)!)$ , для майже всіх (відносно міри Лебега в  $\mathbb{R}^{np+1}$ ) векторів  $(g_1, \dots, g_p, T)$ ,  $g_r = (g_{n-1,r}, \dots, g_{0,r})$ ,  $g_{p,r} = \alpha_p^{(r-1)}(0, \dots, 0, 2^1, 0, \dots, 0) \cdot \beta^{(r-1)}(0, \dots, 0, 2^1, 0, \dots, 0)$ ,  $\beta = \overline{0, n-1}$ ,  $r = \overline{1, p}$ , і довільних фіксованих коефіцієнтів рівняння (31), які не входять в  $g_r$ ,  $r = \overline{1, p}$  (теорема 6.3).

У третьому розділі досліджуються задачі з багатоточковими умовами для диференціальних рівнянь зі сталими та змінними за  $x$  коефіцієнтами, не розв'язаних відносно старшої похідної. Доводяться нові твердження теоретико-числового характеру, що стосуються оцінок знизу малих знаменників, які мають тут складну нелінійну структуру.

В §7 розглядається рівняння зі сталими коефіцієнтами. В п.7.1 для рівняння (31) в області  $D^p$  вивчається задача з умовами

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x), \quad j = \overline{1, n}, \quad 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T. \quad (34)$$

Припускається, що для всіх  $k \in \mathbb{Z}^P$  корені  $\lambda_j(k)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , рівняння  $N(\lambda, tk) = 0$  є прості. Встановлені необхідні та достатні умови єдиності розв'язку задачі (31), (34) в просторі  $C^n((0, T), H_q(\Omega^P))$ ,  $q \in \mathbb{Z}$  (теорема 7.1), які мають вигляд

$$\Delta(k) = \det \|\exp(\lambda_j(k)t_\gamma)\|_{\gamma, j=1}^n \neq 0, k \in \mathbb{Z}^P,$$

і при виконанні яких справедливе таке твердження.

**Теорема 7.2.** Нехай існують константи  $M_0 > 0$  і  $\nu \in \mathbb{N}$  такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів  $k \in \mathbb{Z}^P$  виконується нерівність

$$|\Delta(k)| \geq M_0 |k|^{-\nu-\varepsilon}, 0 < \varepsilon < 1. \quad (35)$$

Якщо  $\varphi_\gamma(x) \in H_{q, \nu, 1}(\Omega^P)$ ,  $\gamma = \overline{1, n}$ , то існує розв'язок задачі (31), (34) в просторі  $C^n((0, T), H_q(\Omega^P))$ , який неперервно залежить від функцій  $\varphi_\gamma(x)$ ,  $\gamma = \overline{1, n}$ .

Доведена метрична теорема 7.3 про виконання оцінки (35), з якої випливає коректна розв'язність розглядуваної задачі для майже всіх (відносно міри Лебега в  $\mathbb{R}^{P \times n}$ ) векторів  $(h, \bar{t})$  і для довільного фіксованого вектора  $y$ , де  $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$ , а вектори  $h$  та  $y$  визначені в §4.

У випадку виконання співвідношень

$$t_j = (j-1)t_0, j = \overline{1, n}, t_0 > 0,$$

отримані більш ефективні умови існування та єдиності розв'язку задачі (31), (34) (теореми 7.4-7.6).

Далі в п.7.1 для неоднорідного рівняння  $N\left\{\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right\}u = f(t, x)$  розглядається задача з більш загальними умовами

$$\sum_{r=0}^{n-1} d_r \frac{\partial^r u(t_j, x)}{\partial t^r} = 0, j = \overline{1, n}, 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T, d_r \in \mathbb{R}, d_0 \neq 0,$$

що вносить багато нових аспектів в її дослідження (теореми 7.7-7.9).

В п.7.2 на прикладі задачі з умовами (34) для рівняння

$$\int_{.x}^q \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\Delta - 1) + \alpha_j \Delta \right]^{n_j} u(t, x) = 0, \quad (36)$$

де  $n_1 + \dots + n_q = n$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ,  $\Delta = \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ , показано, як результати п.7.1 поширюються на випадок, коли рівняння  $N(\lambda, t, k) = 0$  має кратні  $\lambda$ -корені.

**Теорема 7.10.** Для єдиності розв'язку задачі (36), (34) в просторі  $C^n([0, T], H_r(\Omega^P))$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ , необхідно і досить, щоб виконувались умови

$$\Delta_q(k) \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}^P \setminus \{(0)\}.$$

Тут  $\Delta_q(k)$  - визначник системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^q \sum_{\alpha_j=0}^{n_j-1} C_{\alpha_j, j, \alpha_j} t_{\gamma}^{\alpha_j} \exp(\lambda_j(k) t_{\gamma}) = \Phi_{\gamma, k}, \quad \gamma = \overline{1, p},$$

$\lambda_j(k) = -\alpha_j \|k\|^2 / (\|k\|^2 + 1)$ ,  $j = \overline{1, q}$ . Застосовуючи для оцінки знизу величини  $|\Delta_q(k)|$  методику, розроблену в шостому параграфі, отримано твердження (теорема 7.11), з якого випливає розв'язність задачі (36), (34) для майже всіх (відносно міри Лебега в  $\mathbb{R}^q$ ) векторів  $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ .

В §8 для рівняння

$$\begin{aligned} W \left( \frac{\partial}{\partial t}, L \right) u = & \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^n \left[ \sum_{|s|_1=1}^s b^s L_1^{s_1} \dots L_p^{s_p} \right] u(t, x) + \\ & + \sum_{\beta=0}^{n-1} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\beta} \left[ \sum_{|s|_1 \leq 1}^s \alpha_{\beta}^s L_1^{s_1} \dots L_p^{s_p} \right] u(t, x) = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

в області  $Q^P$  розглядається задача з умовами (34) та умовами

$$L_r^i u(t, x) \Big|_{x_r=0} = L_r^i u(t, x) \Big|_{x_r=\pi} = 0, \quad r = \overline{1, p}, \quad i = \overline{0, l-1}, \quad (38)$$

де  $b^s, \alpha_{\beta}^s \in \mathbb{R}$ ,  $L_r = \frac{\partial}{\partial x_r} \left[ p_r(x_r) \frac{\partial}{\partial x_r} \right] + q_r(x_r)$ ,  $p_r(x_r) \geq p_0 > 0$ ,  $q_r(x_r) \geq 0$ ,

$r = \overline{1, p}$ .

Розв'язок задачі шукається у вигляді ряду за системою

Функція  $(v_{\kappa}(x) = v_{\kappa_1}(x_1) \dots v_{\kappa_p}(x_p))$ , де  $v_{\kappa_r}(x_r)$ ,  $\kappa_r \in \mathbb{N}$ , - власні функції задачі  $L_r v(x_r) = \lambda v(x_r)$ ,  $v(0) = v(\pi) = 0$ ,  $\lambda_{\kappa_r}$  - її власні значення. Позначимо  $\lambda_{\kappa} = (\lambda_{\kappa_1}, \dots, \lambda_{\kappa_p})$ .

Нехай  $\mu_j(\lambda_{\kappa})$ ,  $j = \overline{1, \bar{n}}$ , - прості корені рівняння  $W(\mu, \lambda_{\kappa}) = 0$ ,  $\Delta(\lambda_{\kappa}) = \det \|\exp(\mu_j(\lambda_{\kappa}) t_{\gamma})\|_{\gamma, j=1}^{\bar{n}}$ . Для єдиності розв'язку задачі (37), (34), (38) в просторі  $C^{(n, 2l)}(Q^p)$  необхідно і досить, щоб для всіх векторів  $\lambda_{\kappa}$  виконувалась умова  $\Delta(\lambda_{\kappa}) \neq 0$  (теорема 8.1).

Доведено існування розв'язку розглядуваної задачі при умові, що вираз  $|\Delta(\lambda_{\kappa})|$  при  $|\kappa| \rightarrow \infty$  спадає не швидше, ніж поліноміально (теорема 8.2), а це має місце для майже всіх (відносно міри Лебега в  $\mathbb{R}^{p+n}$ ) векторів  $(a, \bar{t})$  і довільного фіксованого вектора  $\xi$  при  $|\lambda_{\kappa}| > K(a, \bar{t})$ , де  $a$  - вектор з компонентами  $\alpha_0^{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}$ ,  $r = \overline{1, \bar{p}}$ ,  $\xi$  - вектор, складений з решти коефіцієнтів рівняння (37) (теорема 8.3).

В кінці дисертації вказується, що її результати поширяться на випадок, коли оператори  $L_{n-m}(x; D_x)$ ,  $m = \overline{0, \bar{n}-1}$ , в рівнянні (1) не підпорядковуються оператору  $L_0(x; D_x)$  в тому сенсі, що можуть містити похідні порядку, вищого ніж оператор  $L_0(x; D_x)$ . При додаткових умовах на розв'язок можна досліджувати також питання стійкості і регуляризації розглянутих в роботі задач.

#### Основні результати дисертації опубліковані в роботах:

1. Комарницька Л.І., Пташник Б.Я. Задача з нелокальними умовами для диференціального рівняння з частинними похідними, яке не розв'язане відносно старшої похідної по часу // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: Зб. наук. праць. Відп. ред. С.Д.Івасишен. - Чернівці, Редакційно-видавничий відділ

облюліграфвидаву, 1990. - С. 86-95.

2. Комарницька Л.І. Нелокальна крайова задача для рівняння зі змінними коефіцієнтами, не розв'язаного відносно старшої похідної // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. - 1994. -Вип. 40. -С. 17-23.

3. Комарницька Леся. Задача типу задачі Діріхле для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно старшої похідної за часом // Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь (Дрогобич, 25-27 січня 1994 р.): Тези доп. - К.: Ін-т математики АН України, 1994. - С. 70.

4. Комарницька Л.І. Задача типу Діріхле для диференціальних рівнянь і систем з частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // 36. наук. доп. учасників семінару, присвяченого пам'яті академіка Я.С.Підстригача. - Львів: ІПММ НАН України, препр. № 6-94, 1994. - С. 46-50.

5. Комарницька Леся. Крайові задачі для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно старшої похідної за часом // Третя Міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука (Київ, 25-27 травня 1994 р.): Тези доп. - К.: Ін-т математики АН України, 1994. - С. 62.

6. Комарницька Леся. Багатоточкова задача для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно старшої похідної за часом // Міжнародна математична конференція, присвячена пам'яті Ганса Гана (Чернівці, 10-15 жовтня 1994 р.): Тези доп. - Чернівці: Рута, 1994. - С. 72.

7. Комарницька Л.І. Багатоточкова задача для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно старшої похідної за часом // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана. - Чернівці: Рута, 1995. - С. 177-185.

8. Комарницька Леся. Багатоточкова задача для диференціального рівняння із змінними коефіцієнтами, не розв'язаного відносно старшої похідної за часом // Четверта Міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука (Київ, 11-13 травня 1995 р.): Тези доп. - К.: Ін-т математики НАН України, 1995. - С. 131.
9. Комарницька Л.І., Пташник Б.М. Крайові задачі для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. - 1995. - 47, № 9. - С. 1197-1208.
10. Пташник Б.М., Комарницька Л.І. Багатоточкова задача для диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Доповіді НАН України. - 1995.- № 10. - С. 20-23.
11. Комарницька Леся, Пташник Богдан. Некласичні задачі для рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом координатою // Всеукраїнська наукова конференція, присвячена 70-річчю від дня народження професора П.С.Казімірського (Львів, 5-7 жовтня 1995 р.): Тези доп., ч.2. - Львів, 1995. - С. 34.

Комарницкая Л.И. Краевые задачи для дифференциальных уравнений и систем с частными производными, не разрешенных относительно старшей производной по времени. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, Львовский государственный университет им. Ив.Франко, Львов, 1995.

В диссертации рассмотрены краевые задачи с нелокальными, двухточечными и многоточечными условиями по временной переменной и некоторыми условиями по пространственным координатам для

дифференциальных уравнений и систем произвольного порядка с постоянными и переменными коэффициентами, не разрешенных относительно старшей производной по времени. Установлены условия существования и единственности решений, которые формулируются в терминах диофантовых свойств чисел. Доказаны теоремы метрического характера об оценках снизу малых знаменателей, возникающих при построении решений задач.

Komarnytska L.I. Boundary-value problems for partial differential equations and systems which are not solved relative to the highest time derivative. Manuscript. Thesis for a degree of candidate of Science (Ph. D) in Physics and Mathematics, speciality 01.01.02. - Differential equations. L'viv Ivan Franko state university, L'viv, 1995.

Boundary-value problems with nonlocal, two-point and multi-point time conditions and some conditions in space coordinates for differential equations and systems of arbitrary order with constant and variable coefficients, which are not solved relative to the highest time derivative, are considered in the dissertation. The conditions of existence and uniqueness of solutions formulated in terms of Diophant properties of numbers are investigated. The theorems of metric nature on lower estimates for small denominators that appear in solutions of the problems are proved.

Ключові слова: нелокальні, двоточкові, багатоточкові умови; рівняння, не розв'язане відносно старшої похідної; еліптичний оператор; функція Гріна; малі знаменники; міра Лебега.

*Л.Комарницька*

---

Зам. № 143. Підписано до друку: 27.10.95 р.  
Формат 60×84 1/16. Папір тип. Друк офсет.  
Ум. друк. арк. 1,5. Тираж 100 пр.

---

Ротапринт Львівської наукової бібліотеки ім.В.Стефаника  
НАН України. Львів, вул. Лермонтова, 15.

---



Handwritten text at the top of the page, possibly a page number or header, appearing as "010.00 8A".

Handwritten text at the bottom right corner, possibly a date or reference number, appearing as "445921".

AB 33.346

**AB 33.346**