

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. Т. Г. ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

КОНОВАЛОВ Олександр Борисович

**ВІНЦЕВІ ДОБУТКИ
У МУЛЬТИПЛІКАТИВНИХ ГРУПАХ
МОДУЛЯРНИХ ГРУПОВИХ АЛГЕБР
2-ГРУП МАКСИМАЛЬНОГО КЛАСУ**

01.01.06 - алгебра і теорія чисел

А в т о р е ф е р а т
дисертації на одбуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 1995

512

А.В. 33.347

ЛННБ України ім.В.Стефаніка



00761410 (J)

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у ві
України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук СИСАК Я.П.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор ГУДИВОК П. М.,
кандидат фізико-математичних наук БОДНАРЧУК Ю. В.

Провідна установа: Дніпропетровський державний університет.

Захист відбудеться "4" грудня 1995 року о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д.01.01.01 по присудженню вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук при Київському університеті ім. Тараса Шевченка за адресою: 252127, Київ, проспект академіка Глушкова, 6, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Київського університету ім. Тараса Шевченка.

Автореферат розіслано "3" листопада 1995 року.

Вчений секретар спеціалізованої ради

С. А. Двієнко

ЛННБ ім. В. Стефаніка
АН України

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Дисертація присвячена дослідженню модулярних групових алгебр 2-груп максимального класу. У роботі розглядаються питання, пов'язані з одержанням у мультиплікативній групі $U(KG)$ модулярної групової алгебри 2-групи G максимального класу секції, яка ізоморфна вінцевому добутку C_2 wt G' групи порядку 2 з комутантом цієї 2-групи максимального класу (тут і далі C_n - циклічна група порядку n).

Питання одержання вінцевих добутків різних видів як підгруп або секцій групи $U(KG)$ вирішувалось у роботах Д. Коулмена, Д. Пассмана, А. А. Бовді, А. Шалева, А. Манна, Ч. Багінського та інших авторів. Одержання вінцевого добутку саме виду C_2 wt G' дозволяє оцінити зв'язу клас нільпотентності $clU(KG)$ групи $U(KG)$, оскільки клас нільпотентності вказаного вінцевого добутку дорівнює індексу нільпотентності $t(G')$ фундаментального ідеалу групової алгебри KG' . А. Шалев у роботі [7] довів, що у випадку $p \neq 2$ така секція існує, якщо комутант групи G циклічний, або G — група класу 2, комутант якої $G' \cong C_p \times C_p$.

Визначення класу нільпотентності мультиплікативної групи групової алгебри у свою чергу пов'язане з обчисленням таких характеристик, як верхній та нижній лієвські індекси нільпотентності групових алгебр, оскільки для модулярних групових алгебр $clU(G) = t_L(G) - 1 \leq t^L(G) - 1 \leq |G'|$. Бхандарі та Пассі [1] довели, що ці індекси співпадають, коли $p > 3$. Верхній лієвський індекс нільпотентності досить докладно розглядався у роботах С. Дженнінгса, І. В. С. Пассі, Д. Пассмана, Д. Сегала, А. Шалева, Ф. Левина та інших авторів, і тому їх співпадіння є дуже корисним фактом.

На відміну від лієвського індексу нільпотентності групової алгебри, обчислення її ступеню розв'язності $dlKG$ є значно складнішим, та до

90-х років не було відомо специфічних методів його визначення, за винятком результатів Левіна та Розенберґера Для лієвських метабелевих, а також Шарми та Срівастави для лієвських центрально метабелевих групових кілець [9]. Шарма та Срівастава розглядали лієвські центрально метабелеві групові кільця над полями непарної характеристики. Вони довели, що якщо групове кільце KG над полем характеристики $p > 3$ лієвський центрально метабелеве, то G абелева, а для $p = 3$ одержали умови, яким повинна задовольняти неабелева група, групове кільце якої є лієвський центрально метабелевим. Наступний крок у цьому напрямку був зроблений А. Шалевом, який одержав ряд обмежень для $\dim KG$.

Більшість результатів, одержаних у напрямках, близьких до теми дисертації, у тому числі наведені вище, належить до випадків, коли характеристика поля K не дорівнює 2. Тому досить актуальне дослідження становить при $p=2$ та встановлення можливості їх розповсюдження на цей випадок.

Мета роботи. Основна мета дисертації полягає у дослідженні модулярних групових алгебр 2-груп максимального класу та їх мультиплікативних груп, та одержанні для вказаних об'єктів тверджень, аналогічних відомим для $p > 2$, зокрема результатам Шалева про вкладення вінцевого добутку у мультиплікативну групу групової алгебри та про співпадіння $\dim U(G)$ з $|G'|$ тоді й тільки тоді, коли комутант G' циклічний; Бхадарі та Пассі про співпадіння верхнього та нижнього лієвських індексів нільпотентності групових алгебр при $p > 3$, Шарми та Срівастави про лієвську центрально метабелевість групових алгебр, та інших.

Методи дослідження. Результати роботи отримані шляхом застосування методів теорії груп та групових кілець. Для доведення існування секції, яка ізоморфна вінцевому добутку, розвинута спеціальна техніка, яка дозволяє знайти утворюючі елементи підгрупи групи $U(KG)$.

фактор-група якої ізоморфна вінцевому добутку.

Наукова новизна. В дисертаційній роботі автором отримані нові теоретичні результати, зокрема:

— досліджено структуру нормованої мультиплікативної групи $U(G)$ модулярних групових алгебр 2-груп максимального класу; вивчено ряд співвідношень між її елементами, а також введені автором відображення норми та спряження;

— встановлено, що мультиплікативна група $U(KG)$ модулярної групової алгебри довільної 2-групи максимального класу містить як секцію вінцевий добуток групи порядку 2 з комутантом цієї 2-групи максимального класу, що дає можливість обчислити клас нільпотентності групи $U(KG)$;

— встановлено, що для довільної 2-групи максимального класу співпадають верхній та нижній лівські індекси нільпотентності групових алгебр, та обчислені їх значення;

— обчислено лівський ступінь розв'язності вказаних групових алгебр, та встановлена їх лівська центральна метабелевість, якщо порядок 2-групи максимального класу дорівнює 16 або більше;

— одержано верхню оцінку ступеня розв'язності мультиплікативної групи вказаних групових алгебр.

Теоретична і практична цінність. Робота має теоретичний характер. Її результати можуть бути використані у подальших дослідженнях з теорії групових кілець.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались на третій міжнародній конференції з алгебри пам'яті М. І. Каргаполова (Красноярськ, 1993), міжнародній науковій конференції, присвяченій 100-річчю з дня народження Н. Г. Чеботарьова (Казань, 1994), Всеукраїнській конференції молодих вчених (Київський державний університет, 1994), науковій конференції викладачів та співробітників Запорізького дер-

жавного університету (1994), міжнародній конференції "Групи та групові кільця" (Польша, Глівіце, 1994), а також на наукових семінарах Інституту математики Національної Академії Наук України та Київського державного університету.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 4 роботах, список яких приведений в кінці автореферату.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота викладена на 82 сторінках набраного у редакторі \LaTeX тексту, та складається з вступу, трьох розділів, що містять 8 параграфів, додатку та списку літератури, що містить 84 найменування.

Основний зміст дисертації

У вступі дається стислий огляд досліджень, близьких до теми дисертації, обґрунтовується актуальність дисертаційної теми, а також викладаються основні результати, що виносяться на захист.

В першому розділі досліджуються властивості модулярних групових алгебр 2-груп максимального класу та їх мультиплікативних груп, загальні для усіх трьох видів 2-груп максимального класу, тобто дієдральної, квазідієдральної груп та групи узагальнених кватерніонів. Ці групи позначаються відповідно D_n , S_n та Q_n , де 2^n — порядок групи, та задаються наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} D_n &= \langle a, b \mid a^{2^{n-1}} = 1, b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle, \\ S_n &= \langle a, b \mid a^{2^{n-1}} = 1, b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1+2^{n-2}} \rangle, \\ Q_n &= \langle a, b \mid a^{2^{n-1}} = 1, b^2 = a^{2^{n-2}}, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle, \end{aligned}$$

де $n \geq 3$ (при такому вираженні D_3 и S_3 співпадають).

Нехай KG — групова алгебра групи G над полем K характеристики p , та $\Delta(G) = \Delta$ — її фундаментальний ідеал. Мультиплікативна група групової алгебри, яка позначається $U(KG)$, дорівнює $KG \setminus \Delta(G)$.

Нормована мультиплікативна група $U(G)$ складається з елементів виду $1 + x$, де $x \in \Delta$. Структура групи $U(G) = 1 + \Delta(G)$ визначає структуру усієї групи $U(KG)$, яка є прямим добутком $K^* \times U(G)$, де K^* — мультиплікативна група поля K .

Доведення вкладення вінецового добутку у групу $U(G)$ може бути зведено до випадку, коли поле K складається з двох елементів, оскільки якщо вінецовий добуток вкладено у групу $U(\tilde{K}G)$, де \tilde{K} — просте підполе поля K характеристики 2, то його вкладено також і у групу $U(KG)$. При цьому припущенні із властивостей фундаментального ідеалу впливає, що довжина елемента групи $U(G) = 1 + \Delta$ повинна бути непарним числом. Далі, кожний елемент групової алгебри KG може бути єдиним чинном записаний у вигляді $x = x_1 + x_2b$, де сума $x_k = a^{i_1} + a^{i_2} + \dots + a^{i_k}$ називається k -ю компонентою елемента x .

Позначимо через \bar{a} елемент $b^{-1}ab$ групи G , а для $x = a^{i_1} + \dots + a^{i_m}$ через \bar{x} позначимо $b^{-1}xb = \bar{a}^{i_1} + \dots + \bar{a}^{i_m}$. Далі, для $x = x_1 + x_2b$ через \bar{x} позначимо елемент $b^{-1}xb = \bar{x}_1 + \bar{x}_2b$. Тоді відображення $x \mapsto \bar{x}$ — автоморфізм групової алгебри KG , який називається *спряженням*, а елемент \bar{x} називається *спряженим* з x . Елемент x називається *самоспряженим*, якщо $x = \bar{x}$. Безпосередньо із визначення впливає, що елемент групової алгебри комутує з елементом $b \in G$ тоді й тільки тоді, коли він є самоспряженим. Окрім того, виявляється, що самоспряжені елементи комутують між собою.

Введення понять компонент та спряження дозволяє одержати правило множення елементів KG : $(f_1 + f_2b)(h_1 + h_2b) = (f_1h_1 + f_2\bar{h}_2\alpha) + (f_2\bar{h}_1 + f_1h_2)b$, де $\alpha = 1$ для D_n та S_n , $\alpha = b^2$ для Q_n .

У третьому параграфі за допомогою цього правила доводиться теорема 1.5, яка містить правило знаходження обернених елементів у групі $U(G)$.

Теорема 1.5 Нехай $f = f_1 + f_2b \in U(G)$. Тоді $f^{-1} = (\bar{f}_1 + f_2b)R^{-1}$, де $R = f_1\bar{f}_1 + f_2\bar{f}_2\alpha$, $\alpha = 1$ для D_n та S_n , $\alpha = b^2$ для Q_n .

Наслідок 1.1 з цієї теореми має важливе значення для побудови ізоморфної вінцевого добутку секції у групі $U(KG)$. Він використовується для пошуку елементів групи $U(G)$, при спряженні за допомогою яких самоспряжений елемент переходить у самоспряжений.

Наслідок 1.1 Нехай $f, h \in U(G)$, $f = f_1 + f_2b$, $h = h_1 + h_2b$, и $h = \bar{h}$ — самоспряжений елемент. Нехай $R = f_1\bar{f}_1 + f_2\bar{f}_2\alpha$, де $\alpha = 1$ для D_n и S_n , $\alpha = b^2$ для Q_n . Тоді елемент $f^{-1}hf = t_1 + t_2b$ обчислюється за формулами $t_1 = h_1 + h_2(f_1f_2 + \bar{f}_1\bar{f}_2)\alpha R^{-1}$, $t_2 = h_2(\bar{f}_1^2 + f_2^2\alpha)R^{-1}$.

Під час доведення теореми 1.5 та наслідку 1.1 виникає гомоморфізм $\varphi : U(G) \rightarrow U(\langle a \rangle) : x_1 + x_2b \mapsto x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2\alpha$, де $\alpha = 1$ для D_n та S_n , $\alpha = b^2$ для Q_n , який називається *нормою*. Його образ лежить у перетині центра групової алгебри KG з груповою алгеброю $K\langle a \rangle$, а ядро містить комутант групи $U(G)$.

У другому розділі розглядаються модулярні групові алгебри дієдральної та квазідієдральної груп. У першому параграфі за допомогою наслідку 1.1 з теореми 1.5 ведеться пошук обмежень, що мають бути накладеними на елемент у групі $U(G)$ для того, щоб елемент $y^{-1}xy$, де $x \in U(G)$ — самоспряжений елемент, також був самоспряженим. Наприклад, це так, коли сума компонент $y_1 + y_2$ є самоспряженим елементом групової алгебри $K\langle a \rangle$. Якщо при цьому вимагати, щоб $(y_1 + y_2)^2 = 1$, то виявляється, що такий елемент буде самоспряженим, якщо його норма дорівнює одиниці. Ще ефективнішим опиняється розглядання множини $H(G) = \{h_1 + h_2b \in U(G) \mid h_1 + h_2 = 1\}$, яка утворює підгрупу. Обмеження норми на підгрупу $H(G)$, яке позначається ψ , та для зручності також називається *нормою*, має ряд цінних властивостей: норма елемента $f_1 + f_2b$ групи $H(G)$ дорівнює $1 + f_1 + \bar{f}_1$, ядро обмеження норми

на підгрупу $H(G)$ співпадає з множиною самоспряжених елементів групи $H(G)$, для яких правило множення приймає вид

$$(f_1 + f_2b)(h_1 + h_2b) = (1 + f_1 + h_1) + (f_1 + h_1)b. \quad (1)$$

У другому параграфі завершується побудова в $H(G)$ секції, ізоморфної вінцевому добутку $C_2 \text{ wt } G'$, та доводиться теорема 2.2.

Теорема 2.2 *Нехай G — дієдральна або квазідієдральна 2-група, KG — її групова алгебра над полем K характеристики 2. Тоді у групу $U(G)$ вкладено вінцевий добуток $C_2 \text{ wt } G'$ групи порядку 2 з комутантом групи G .*

Для доведення теореми 2.2 необхідно ряд допоміжних тверджень. У підгрупі $H(G)$ розглянемо елемент A наступного виду: $A = a + (1+a)b$. Його норма дорівнює $1 + a + \bar{a}$, звідки $\psi(A^{2^n-2}) = 1$, і тому A^{2^n-2} — самоспряжений елемент порядку 2. З іншого боку, A^k при $k \leq 2^{n-2}$ не дорівнює одиниці та не комутує з b , оскільки його норма нетривіальна. Далі у параграфі доведено, що порядок елемента A дорівнює саме 2^{n-1} .

Таким чином, елементи $b, b^A, b^{A^2}, \dots, b^{A^{2^{n-2}-1}}$ попарно відмінні, самоспряжені, та належать до $H(G)$, і тому $S = \langle b, b^A, b^{A^2}, \dots, b^{A^{2^{n-2}-1}} \rangle$ — елементарна абелева група.

Далі доводиться, що елементи виду b^{A^k} можна виразити через норму елемента A наступним чином: $b^{A^k} = 1 + R^k + R^k b$, де $k = 1, 2, \dots, 2^{n-2}$, та $R = \psi(A)$. Цей факт та вказане вище правило множення (1) елементів в $\text{Ker } \psi$ дозволяють довести, що група S розкладається у прямий добуток $\langle b \rangle \times \langle b^A \rangle \times \langle b^{A^2} \rangle \times \dots \times \langle b^{A^{2^{n-2}-1}} \rangle$.

Таким чином, група $U(G)$ містить напівпрямий добуток F групи S на циклічну групу $\langle A \rangle$, яку породжує елемент $A = a + (1+a)b$, порядок якого дорівнює 2^{n-1} , а крім того, A^{2^n-2} комутує з b . Тоді вінцевий добуток $C_2 \text{ wt } G'$ ізоморфний факторгрупі $F/\langle A^{2^n-2} \rangle$, та теорема доведена.

Головним предметом третього розділу є група узагальнених кватерніонів; останній параграф присвячено наслідкам з теорем 2.2, 3.3 про вкладення вінцевого добутку, та деяким іншим характеристикам модулярних групових алгебр 2-груп максимального класу.

У теоремі 3.1 обчислюється нижній лівський індекс нільпотентності $t_L(G)$, звідки за співвідношенням $\text{cl}U(G) = t_L(G) - 1$ одержуємо клас нільпотентності групи $U(G)$.

Теорема 3.1 *Нехай G — група узагальнених кватерніонів, KG — її групова алгебра над полем характеристики 2. Тоді $\text{cl}U(G) = |G'|$.*

Знання $\text{cl}U(G)$ дозволяє довести теорему 3.2 про достатні умови для комутування з b елемента $A^{2^{n-2}}$, де $A \in U(G)$ — елемент порядку 2^{n-1} .

Теорема 3.2 *Нехай G — група узагальнених кватерніонів, A — елемент групи $U(G)$ порядку 2^{n-1} , де $b^{A^i} b^{A^j} = b^{A^j} b^{A^i}$ для довільних i, j та $b^{A^i} = A^{-i} b A^i$, $b \in G$. Тоді $A^{2^{n-2}}$ комутує з b .*

Необхідність цієї теореми обумовлена тим, що у випадку групи узагальнених кватерніонів утруднено одержання підмножини, аналогічної підгрупі $H(G)$, на який існувала би подібна до описаної у другому розділі характеристика елементів за значенням їх норми. В доведенні теореми 3.2 використані дві лемми, остання з яких також потрібна для доведення теореми 3.3 про вкладення вінцевого добутку. Вони затверджують, що в умовах теореми 3.2 $(b, \underbrace{A, \dots, A}_k)^2 = 1$ і $(b, \underbrace{A, \dots, A}_k, A^{2^m}) = (b, \underbrace{A, \dots, A}_{k+2^m})$ для будь-яких k, m .

Обчисливши нижній лівський індекс нільпотентності, можна зробити висновок, що у випадку групи узагальнених кватерніонів експоненти груп G та $U(KG)$ співпадають. Це випливає з теореми про співпадіння експонент груп G та $U(KG)$, якщо $t^L(G) \leq 1 + (p-1)p^{e-1}$, де $p^e = \exp G$, яка належить А. Шалеву.

У другому параграфі третього розділу побудована підгрупа групи $U(KG)$, фактор-група якої ізоморфна вінцевому добутку $C_2 \text{ wt } G'$. Під час розгляду дієдральної та квазідієдральної груп, як один з утворюючих елементів такої підгрупи, був взятий елемент $A = a + (1 + a)b$, де $a^{2^{n-1}} = 1$. Якщо G — група узагальнених кватерніонів, то спряження за допомогою елемента $a + (1 + a)b$ в загальному випадку вже не переводить самоспряжений елемент групи $U(G)$ в самоспряжений (але виявляється, що для групи порядку не вище 16 він не тільки має цю властивість, а ще й може бути взятий як утворюючий елемент групи $U(G)$).

У випадку довільної 2-групи узагальнених кватерніонів таку властивість має елемент $A = a^{2^{n-3}+1} + (1 + a)b$, де $a^{2^{n-1}} = 1$. Дійсно, якщо h — самоспряжений, то за наслідком 1.1 друга компонента елемента $A^{-1}hA$ дорівнює $h_2(a^{2^{n-2}} + a^{2^{n-2}+2} + a^{2^{n-2}-2})\varphi(A)^{-1}$ та також самоспряжена. Далі, $\varphi(A) = 1 + a^{2^{n-2}+1} + a^{2^{n-2}-1}$, звідки $\text{ord } A \geq 2^{n-2}$. З іншого боку, як доведено у минулому параграфі, експоненти груп G та $U(KG)$ співпадають, і тому $\text{ord } A \leq 2^{n-1}$. Аналогічно випадку дієдральної та квазідієдральної груп, доводиться, що порядок елемента A дорівнює саме 2^{n-1} .

Далі робиться висновок, що A^k при $k < 2^{n-2}$ не комутують з b , оскільки $bA^k = \beta \sum_{i=-1}^{k-1} (b^2R)^i + (b^2R)^k b$, де $\beta = a^{2^{n-3}+1} + a^{-2^{n-3}-1} + a^{2^{n-3}+2} + a^{-2^{n-3}-2}$ та $R = \varphi(A)$.

Параграф завершує основна теорема третього розділу:

Теорема 3.3 *Нехай G — 2-група узагальнених кватерніонів, KG — її групової алгебра над полем характеристики 2. Тоді в групу $U(G)$ вкладено вінцевий добуток $C_2 \text{ wt } G'$ групи порядку 2 з комутантом групи G .*

Доведення засновано на розгляді у групі $U(G)$ підгрупи

$$F_1 = \langle b, b^A, b^{A^2}, \dots, b^{A^{2^{n-2}-1}} \rangle \langle A \rangle,$$

де $b \in G$, $A = a^{2^{n-3}+1} + (1 + a)b$. Нехай тепер $F_2 = F_1 / \langle b^2 \rangle \langle A^{2^{n-2}} \rangle$. Тоді

$\text{cl } F_2 \leq \text{cl } U(G)$, а з їх співпадіння буде випливати, що $F_2 \cong C_2 \text{ wr } G'$.

Дійсно, нехай $M = C_2 \text{ wr } G'$ та $\text{cl } F_2 = 2^{n-2} = \text{cl } M$. Припустимо, що $F_2 \not\cong M$. Тоді існує підгрупа $N \triangleleft M$ така, що $M/N \cong F_2$. Так як $|Z(M)| = 2$, то $Z(M) \subseteq N$. Тоді $\text{cl } F_2 \leq \text{cl } M$, та одержано протиріччя.

Для обмеження знизу $\text{cl } F_2$ показано, що комутатор $(b, \underbrace{A \dots A}_{2^{n-2}-1})$ у групі $U(G)$ не належить до підгрупи $\langle b^2 \rangle \langle A^{2^{n-2}} \rangle$.

У третьому параграфі доводиться ряд наслідків з теорем про вкладення вінцевого добутку, а також розглядаються лієвський ступінь розв'язності групової алгебри KG та ступінь розв'язності групи $U(KG)$.

Вкладення у групу $U(KG)$ вінцевого добутку групи порядку 2 з комутантом групи G дає можливість визначити її клас нільпотентності, оскільки клас нільпотентності такого вінцевого добутку дорівнює $|G'| = t(H)$ [3], а, з іншого боку, $\text{cl } U(G) \leq |G'|$ [8] (у цей же час, після зробленого Ду [4] підтвердження гіпотези Дженнінгса, вказаної у [5], для цього також може бути використане співвідношення $\text{cl } U(G) = t_L(G) - 1$).

Наслідок 3.2 *Нехай G — 2-група максимального класу, KG — її групова алгебра над полем характеристики 2. Тоді $\text{cl } U(G) = |G'|$.*

Визначимо у асоціативній алгебрі R ідеали $R^{[n]}$ та $R^{(n)}$ наступним чином: $R^{[n]}$ — ідеал, утворений усіма (ліво-нормованими) лієвськими комутаторами $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $x_i \in R$, тоді як $R^{(n)}$ задається індуктивно: $R^{(1)} = R$, $R^{(n+1)}$ — асоціативний ідеал, утворений множиною лієвських комутаторів $[R^{(n)}, R]$. Зрозуміло, що для всякого n $R^{(n)} \supseteq R^{[n]}$. Окрім того, для модулярних групових алгебр скінченних p -груп $KG^{(|G|+1)} = 0$.

Верхній та нижній лієвські індекси нільпотентності визначаються наступним чином (нескінченні значення також дозволяються):

$$t_L(R) = \min\{n : R^{[n]} = 0\}, \quad t^L(R) = \min\{n : R^{(n)} = 0\}.$$

Ми користуємось позначеннями $t_L(G)$ та $t^L(G)$ замість $t_L(KG)$ та $t^L(KG)$ відповідно.

Наслідок 3.3 розповсюджує на 2-групи максимального класу результат Бхандарі та Пассі про співпадіння верхнього та нижнього лівських індексів нільпотентності, коли $p > 3$ [1].

Наслідок 3.3 *Нехай G — 2-група максимального класу, KG — її групова алгебра над полем характеристики 2. Тоді $t_L(G) = t^L(G)$.*

Цей наслідок впливає з рівності $\text{cl}U(G) = |G'|$ та послідовності нерівностей $\text{cl}U(G) = t_L(G) - 1 \leq t^L(G) - 1 \leq |G'|$.

Далі, співпадіння експонент груп G та $U(KG)$, яке було доведено для групи узагальнених кватерніонів, може бути аналогічним чином розповсюджено на довільні 2-групи максимального класу.

Наслідок 3.4 *Нехай G — 2-група максимального класу, KG — її групова алгебра над полем характеристики 2. Тоді $\exp G = \exp U(KG)$.*

Треба додати, що це також впливає з теоремами, доведеної у роботі Бовді та Лакатоша [2], згідно з якою для скінченної p -групи з циклічним комутантом експоненти груп G та $U(G)$ співпадають, якщо не співпадають експоненти групи G та її комутанта.

Для більшої повноти картини варто згадати ще одну характеристику — індекс нільпотентності фундаментального ідеалу $t(G)$, який може бути обчислений безпосередньо. За формулою, що доведена Кошитані для $t(G)$ у випадку нециклічної групи G порядку p^n , яка містить циклічну підгрупу індексу p , маємо, що $t(G) = p^{n-1} + p - 1 = 2^{n-1} + 1$.

Решта розділу присвячена лівському ступеню розв'язності групової алгебри KG та ступеню розв'язності групи $U(KG)$. У асоціативному кільці R визначимо ідеали $\delta^{(0)}(R) = R$, $\delta^{(n)}(R) = [\delta^{(n-1)}(R), \delta^{(n-1)}(R)]$. Кільце R називається лівськи розв'язним ступеня n , якщо $\delta^{(n)}(R) = 0$, та $\delta^{(n-1)}(R) \neq 0$. Ступінь лівської розв'язності асоціативного кільця R ми будемо позначати $\text{dl}R$. Аналогічно для групи G будемо позначати

ряд комутантів $\delta^{(0)}(G) = G, \delta^{(n)}(G) = (\delta^{(n-1)}(G), \delta^{(n-1)}(G))$ та ступінь розв'язності $\text{dl } G$.

У випадку групи порядку 8 KG та $U(KG)$ є відповідно лівськи метабелевою та метабелевою. Теорема 3.4 свідчить, що, як і у випадку $p = 3$, некомутативність групи G також можлива при розповсюдженні на випадок $p = 2$ результатів Шарми та Сріваставі [9] про те, що групова алгебра при $p > 3$ є лівськи центрально метабелевою тільки тоді, коли група G абелева, у той час як при $p = 3$ це можливо також і для некомутативних груп за деяких додаткових умов.

Теорема 3.4 *Нехай G — 2-група максимального класу порядку 2^n , де $n > 3$, K — поле характеристики 2. Тоді групова алгебра KG лівськи центрально метабелева.*

У доведенні теореми використана наступна формула для обчислення лівських комутаторів:

$$[x_1 + x_2b, y_1 + y_2b] = (x_2\bar{y}_2 + \bar{x}_2y_2)b^2 + ((x_1 + \bar{x}_1)y_2 + x_2(y_1 + \bar{y}_1))b.$$

На відміну від лівського ступеня розв'язності, для $\text{dl } U(KG)$ одержано тільки обмеження. Безпосереднє обчислення комутаторів по аналогії з останньою теоремою у цьому випадку утруднено. Так, користуючись теоремою 1.5, одержуємо, що комутатор $(x_1 + x_2b, y_1 + y_2b) \in G'$ дорівнює

$$\left(\begin{aligned} & x_1\bar{x}_1y_1\bar{y}_1 + x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_2^2 + \\ & (\bar{x}_1x_2y_1y_2 + \bar{x}_1^2y_2\bar{y}_2 + \bar{x}_1x_2y_1\bar{y}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_2y_1y_2 + x_2\bar{x}_2y_1^2)b^2 + \\ & (x_1\bar{x}_1\bar{y}_1y_2 + \bar{x}_1x_2\bar{y}_1^2 + \bar{x}_1^2\bar{y}_1\bar{y}_2 + \bar{x}_1x_2y_1\bar{y}_1 + \\ & (x_1x_2y_2\bar{y}_2 + x_2^2\bar{y}_1\bar{y}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_2y_2^2 + x_2\bar{x}_2y_1y_2)b^2 \end{aligned} \right) b \varphi(x)^{-1} \varphi(y)^{-1}.$$

Окрім того, $U(G)' \subseteq \text{Ker } \varphi$, і тому $U(G)'' \subseteq (\text{Ker } \varphi)'$. За допомогою індукції ступінь розв'язності групи $U(KG)$ можна обмежити числом $n - 1$, де 2^n — порядок групи G .

Теорема 3.5 Нехай G — 2-група максимального класу порядку 2^n , KG — її групова алгебра над полем характеристики 2. Тоді $\text{dl } U(KG) \leq n - 1$.

Доведення засновано на розгляді ізоморфізму фактор-групи $G/\langle a^{2^{n-1}} \rangle$ та групи дієдра $D_{2^{n-1}}$.

Одержані характеристики групових алгебр 2-груп максимального класу та їх обмеження можуть бути зведені у таблицю.

Таблиця — характеристики групових алгебр
2-груп максимального класу. (2^n — порядок групи G).

$\text{cl } U(G)$	$t_L(G)$	$t^L(G)$	$\exp U(KG)$	$t(G)$	$\text{dl } KG$	$\text{dl } U(KG)$
2^{n-2}	$2^{n-2} + 1$	$2^{n-2} + 1$	2^{n-1}	$2^{n-1} + 1$	2, $n = 3$	не більше
					3, $n > 3$	$n - 1$

У додатку наведені результати обчислень ряду елементів підгруп, фактор-група яких ізоморфна вінцевому добутку $C_2 \text{ wr } G'$, для груп дієдра та узагальнених кватерніонів порядків 16 та 32. Треба зауважити, що згідно з представленнями групи $U(G)$ для 2-груп порядку не вище 16, одержаними Сендлінгом [6], $A = a + (1 + a)b$ є одним з утворюючих елементів групи $U(G)$, якщо G — 2-група максимального класу порядку 8 чи 16. Так, коли $|G'| = 8$, група $U(G)$ утворюється елементами $a, b \in G$ та A , а якщо $|G'| = 16$, — ще й елементом $1 + (a^4 - 1)a$.

На заключення автор вважає приємним обов'язком висловити щиру вдячність науковому керівникові Ярославу Прокоповичу Сисаку за повсякчасну підтримку, інтерес та увагу до роботи.

Список цитованої літератури

- [1] Bhandari A. K., Passi I. B. S. Lie-nilpotency indices of group algebras. // Bull.London Math.Soc. - 1992. - 24. - P.68-70.
- [2] Bovdi A., Lakatos P. On the exponent of the group of normalized units of a modular group algebras. // Publ.Math.Debrecen. - 1993. - 42, N.3-4. - P.409-415.
- [3] Buckley J. T. Polynomial functions and wreath products. // Ill. J. Math. - 1970. - 14. - P.274-282.
- [4] Du X. The centers of radical ring. // Canad. Math. Bull. - 1992. - 35. - P.174-179.
- [5] Jennings S. A. Radical rings with nilpotent associated groups. // Trans. Roy. Soc. Canada. - 1955. - 49, Ser.III. - P.31-38.
- [6] Sandling R. Presentations for unit group of modular group algebras of groups of order 16. // Math.Comp. - October 1992. - 59, N.200. - P.689-701.
- [7] Shalev A. The nilpotency class of the unit group of a modular group algebra I. // Isr. J. Math. - 1990. - 70. - P.257-266.
- [8] Sharma R.K., Bist V. A note on Lie nilpotent group rings. // Bull. Austral. Math. Soc. - 1992. - 45. - P.503-506.
- [9] Sharma R. K., Srivastava J. B. Lie centrally metabelian group rings. // J.Algebra. - 1992. - 151. - P.476-486.

Основні положення дисертації опубліковані у таких роботах:

1. Коновалов А. Б. О классе нильпотентности мультипликативной группы модулярной групповой алгебры группы диэдра порядка 2^n . // Третья международная конференция по алгебре памяти М. И. Каргаполова. Красноярск, 23-28 авг. 1993 г.: Тез. докл. - "Инопроф", Красноярск, 1993. - С.160.
2. Коновалов А.Б. О вложении сплетения в мультипликативную группу модулярной групповой алгебры диэдральной и квазидиэдральной групп порядка 2^n . // Алгебра и анализ. Тез. докл. Междунар. науч. конф., посвященной 100-летию со дня рождения Н. Г. Чеботарева, 5-11 июня 1994 г., Казань. - Изд-во Казан. ун-та, Казань. - 1994. - Ч.1. Теория чисел, группы, алгебры Ли, кольца и модули, теория рекурсии. - С.53-54.
3. Konovalov A.B. Wreath products in the unit group of modular group algebras of 2-groups of maximal class. // Groups and group rings. Abstracts. Gliwice, Poland, 20-23 September, 1994.
4. Коновалов А. Б. О классе нильпотентности мультипликативной группы модулярной групповой алгебры 2-группы диэдра. // Укр. мат. журн. - 1995. - 47, N.1. - С.39-45.

Коновалов А.Б. "Сплетения в мультипликативных группах модулярных групповых алгебр 2-групп максимального класса". Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - алгебра и теория чисел. Рукопись. Институт математики НАН Украины, Киев, 1995.

Работа посвящена изучению модулярных групповых алгебр 2-групп максимального класса и установлению возможности распространения на эти групповые алгебры ряда утверждений, имеющих место при нечетном p .

В диссертации установлено существование в мультипликативной группе модулярной групповой алгебры 2-группы максимального класса секции, изоморфной сплетению группы порядка 2 с коммутантом этой 2-группы.

Следствия, полученные из этого результата, позволяют вычислить такие характеристики этих групповых алгебр, как класс нильпотентности, экспоненту и длину разрешимости мультипликативной группы, а также верхний и нижний левские индексы нильпотентности групповой алгебры и длину ее левской разрешимости.

Konovalov A.B. "Wreath products in the unit group of modular group algebras of 2-groups of maximal class". Candidate of Science in Physics and Mathematics Degree thesis. Speciality 01.01.06 - algebra and number theory. Manuscript. Institute of Mathematics of the Ukrainian National Academy of Sciences, Kyiv, 1995.

The thesis is devoted to studying of modular group algebras of 2-groups of maximal class and obtaining analogues of some valid for $p \neq 2$ statements for this group algebras.

It is proved that the unit group of modular group algebra of 2-group of maximal class possess a section isomorphic to the wreath product of group of order two with the commutator subgroup of this 2-group.

This allows to obtain the nilpotency class, exponent and solvability length of the unit group, as well as the upper and lower lie nilpotency indices of the group algebra and it's lie solvability length.

Ключові слова: групова алгебра, мультиплікативна група, вінцевий добуток, спряження, самоспряженість, норма, компонента, клас нільпотентності, верхній (нижній) лівський індекс нільпотентності.

ЛНБ ім. В. Стефани
АН України

Ав 33.347

Підд. до друку 02.ІІ.95. Формат 60x84/167. Папір друк. Офо.друк.
Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,16. Обл.-від. арк. 0,7.
Тираж 100 пр. Зам. 244 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601, Київ 4, МСП. вул.Терещківська, 8