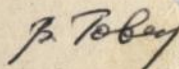


На правах



ГОВОРУХА Володимир Борисович

**ЗАСТОСУВАННЯ  
СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ  
ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ОСОБЛИВОСТЕЙ  
ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ПОЛІВ  
В ОБЛАСТЯХ З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ**

01.05.02 — математичне моделювання та чисельні  
методи в наукових дослідженнях

**АВТОРЕФЕРАТ**

дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Ав 23.348

ЛННБ України ім.В.Стефаніка



00761435 (Q)

ією є рукопис.

робота виконана на кафедрі теоретичної та прикладної механіки  
Дніпропетровського державного університету.

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук,  
професор Лобода В.В.

19.876.5  
9.6

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук,  
старший науковий співробітник Хай М.В.,  
кандидат фізико-математичних наук,  
доцент Балашова С.Д.

Провідня установа - Інститут проблем машинобудування  
НАН України (м. Харків).

Захист відбудеться "14" грудня 1995 р. о 15<sup>30</sup> години  
на засіданні спеціалізованої вченої ради К 03.01.08 при Дніпро-  
петровському державному університеті за адресою: 320044, Дніпро-  
петровськ, пр. К.Маркса 35, корп. 3, ауд. 42.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Дніпропет-  
ровського державного університету.

Автореферат розісланий "11" листопада 1995 р.

ЛННБ ім. В. Стефаніка  
АН України

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради  
канд. фіз.-мат. наук, доцент

Турчина В.А.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми та ступінь її дослідженості. Останнім часом у сучасній техніці значно ускладнюються режими експлуатації машин та механізмів, все частіше використовуються нові конструкційні матеріали. Це приводить до виникнення нових математичних моделей, що дозволяють найбільш повно відображати фізико-механічні процеси, яким піддаються реальні конструкції. При цьому стає потрібним удосконалення вже існуючих та створення нових методик їх аналітичного чи чисельного дослідження. В першу чергу це стосується широкого кола задач, пов'язаних із визначенням особливостей поведінки фізико-механічних полів поблизу кутових точок границь, включень, тріщин, тобто в областях швидкої зміни невідомих величин. Урахування цих ефектів є першорядно важливим, оскільки вони відіграють визначальну роль у описанні фізико-механічних процесів у цілому.

Наявність кутових точок, поблизу яких невідома функція є нерегулярною, утруднює використання прямих чисельних методів типу кінцевих рівниць, кінцевих та граничних елементів. Щодо спеціальних методів, то досить ефективним для розв'язку вказаного класу задач є метод інтегральних перетворень з наступною побудовою і дослідженням відповідних сингулярних інтегральних рівнянь (СІР). При цьому якщо в кутовій точці змінюється характер граничних умов, то СІР значно ускладнюється в зв'язку з появою в їх ядрах нерухомих особливостей, що приводить, як правило, до зміни степеня особливості невідомої функції. Незважаючи на широку вживаність такого роду рівнянь у практиці, методи їх чисельного розв'язку розвинуті недостатньо. Важливим також є розповсюдження методу СІР на нові задачі математичної фізики для еліптичних рівнянь в однорідних та кусково-неоднорідних областях з особливими точками. Такого роду задачі найбільш придатні для розв'язку як раз за допомогою СІР.

Таким чином, зберігає свою актуальність розробка ефективного способу зведення задач математичної фізики для еліптичних рівнянь в областях з особливими точками до СІР, в тому розробка чисельного алгоритму їх розв'язку, адекватно відображаючого особливості поведінки невідомих функцій.

Мета роботи. Розробка економічного чисельного алгоритму розв'язку СІР з рухомими та нерухомими особливостями типу Коші; побудова та апробація чисельно-аналітичного підходу до розв'язання змішаних задач для еліптичних рівнянь в канонічних областях, адекватно відображаючого поведінку біля особливих точок; застосування СІР для дослідження впливу фізико-механічних полів на напружено-деформований стан міжфазної тріщини.

Методика досліджень. В дисертаційній роботі використані поняття та методи математичного і функціонального аналізу, математичної фізики, методів обчислень та теорії пружності.

Наукова новизна. Побудовані нові граничні інтегральні співвідношення, які дозволяють сформулювати СІР з явно виділеними особливостями для широкого кола гармонічних і бігармонічних крайових задач у канонічних областях з кутовими точками і тонкими включеннями; розроблені чисельні алгоритми розв'язку СІР з рухомими та нерухомими особливостями; одержані залежності впливу фізико-механічних полів на особливості деформування міжфазної тріщини в скінченних та напівнескінченних областях.

Практична цінність результатів полягає в одержанні зручних граничних інтегральних співвідношень, що дозволяють формулювати системи СІР рівних задач математичної фізики; у розробці ефективних чисельно-аналітичних алгоритмів розв'язку таких систем; у створенні на базі ПЕОМ комплексу програм, реалізуючого розроблені підходи.

Результати, одержані в дисертаційній роботі, можуть бути застосовані в розрахунковій практиці науково-дослідних та проектно-конструкторських установ. Запропоновані підходи використовуються при читанні спецкурсу на факультеті прикладної математики ДДУ, при виконанні курсових та дипломних робіт студентами ДДУ.

Апробація роботи. Основні положення та результати роботи доповідались і обговорювались на III Міжнародній конференції "Матеріали для будівельних конструкцій" (М'якіївка, 1994), Міжнародній конференції "Recent advances in engineering science" (США, 1994), I Міжнародному симпозиумі "Thermal Stresses'95" (Японія, 1995), III Міжнародному симпозиумі

ICIAM'95 (Німеччина, 1995), II Міжнародному симпозиумі українських інженерів-механіків (Львів, 1995), семінарі "Прикладні методи обчислювальної математики та кібернетики" Інституту проблем машинобудування (Харків, 1995), на наукових семінарах кафедри теоретичної та прикладної механіки і кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики ДДУ (1994, 1995).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 10 робіт, список яких наведено в кінці автореферату. Зміст тез доповідей не викладений в інших публікаціях.

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається із вступу, чотирьох глав, закінчення, додатку і списку літератури, що містить 96 найменувань. Загальний об'єм роботи становить 137 сторінок машинописного тексту і включає 15 рисунків та 12 таблиць.

#### ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтована актуальність теми, зроблено короткий огляд робіт за темою дисертації, сформульовані мета дисертаційної роботи та основні результати, що виносяться на захист, дано анотацію до всіх розділів дисертації.

У першому розділі досліджуються питання чисельного розв'язку СІР з рухомими та нерухомими особливостями типу Коші в ядрі.

На початку розділу розглядається інтеграл

$$I(x) = \int_{-1}^1 \frac{f^*(t)}{t-x} w(t) dt, \quad w(t) = (1-t)^{-\alpha} (1+t)^{-\beta}, \quad \alpha < 1, \beta < 1 \quad (1)$$

який для  $x \in (-1, 1)$  розуміється в сенсі головного значення по Коші;  $f^*(t) \in H$ ,  $H$  - клас функцій, що задовольняє умові Гельдера. Часто для обчислення інтеграла (1) застосовують квадратурну формулу Гаусса-Якобі з вагою  $w(t)$ , яка справедлива для обчислення інтегралів виду (1), коли значення  $x$  збігається з дискретною множиною нулів функції Якобі другого роду (А.А. Корнейчук). Однак на практиці знаходження нулів функції Якобі другого роду є досить складною обчислювальною задачею, яка вимагає значних затрат машинного часу. Тому для

наближеного обчислення інтеграла (1) побудована квадратурна формула інтерполяційного типу, яка не потребує обчислення нулів функції Якобі другого роду і справедлива для точок як належних інтервалу інтегрування, так і виходячих за нього:

$$I(x) \approx \sum_{k=1}^N \left[ \frac{A_k}{\tau_k - x} + \pi_k(x) \delta_N(x) \right] f^*(\tau_k) \quad (2)$$

де

$$\delta_N(x) = I_0(x) - \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\tau_k - x}, \quad I_0(x) = \int_{-1}^1 \frac{w(t)}{t-x} dt,$$

$\pi_k(x)$  - фундаментальні многочлени інтерполяції, за Лагранжем;  $\tau_k$  - нулі многочлена Якобі  $P_N^{(-\alpha, -\beta)}(\tau)$ ;  $A_k$  - вагові коефіцієнти. Інтеграл  $I_0(x)$  у формулі (2) обчислено в замкненому вигляді.

Далі у першому розділі розглядається обчислення інтеграла

$$J(x) = \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f^*(t) p(t) dt, \quad p(t) = t^{-\beta} (1-t)^{-\alpha}, \quad x \in (0, 1) \quad (3)$$

Якщо точка  $x$  розташована далеко від 0, то для обчислення цього інтеграла може бути використана квадратурна формула Гаусса-Якобі. Але для  $x$ , близьких до 0, похибка цієї формули стає значною. Тому в цьому випадку для інтеграла (3) побудована нова квадратурна формула інтерполяційного типу

$$J(x) \approx \sum_{k=1}^N \left[ A_k \frac{t_k}{t_k^2 + x^2} + 0,5 A_k(x) \right] f^*(t_k), \quad (4)$$

де  $A_k(x) = [\pi_k(ix) + \pi(-ix)] \delta_N^{(1)} + ix \delta_N^{(2)} [\pi_k(ix) - \pi(-ix)]$ .

Для побудованих квадратурних формул дано оцінки їх залишкових членів у класі гельдерових функцій, а також проведено тестування на модельних прикладах інтегралів, для яких відомі точні значення.

Значення  $\alpha$  і  $\beta$  в інтегралах (1), (3) визначаються характером особливостей інтегрованої функції на кінцях інтервала інтегрування і впливають в OIP, в яких ці інтеграли зустрічаються. Методика їх визначення наведена в §1.2 і полягає в такому: проводячи аналіз OIP та використовувачи влас-

тивість інтегралів типу Коші в околі кінців інтервала інтегрування (М.І. Мухомелішвілі), одержують трансцендентні рівняння для визначення невідомих степенів особливостей розв'язку  $\alpha$  та  $\beta$ :

$$P_1(\alpha) = 0, \quad P_2(\beta) = 0. \quad (5)$$

З цих рівнянь  $\alpha$  та  $\beta$  визначаються аналітичним, або чисельним шляхом. Показано поширення цієї методики на системи СІР, а також її практичне застосування для конкретних СІР та систем СІР.

Чисельний метод розв'язку СІР розглянуто на прикладі модельного рівняння

$$\int_0^1 \varphi(t) \left[ \frac{1}{t-x} + \frac{\lambda}{t+x} \right] dt = \pi, \quad \lambda - \text{const}. \quad (6)$$

Це рівняння має точний розв'язок (Н. Вукнер), який одержано при додатковій умові

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = 0. \quad (7)$$

Розшукуючи невідому функцію  $\varphi(t)$  у класі інтегрованих функцій  $\varphi(t) = \varphi^*(t)p(t)$ ,  $\varphi^*(t) \in H$ , та використовуючи значення степенів особливостей невідомої функції, які знаходяться з рівнянь виду (5), розв'язок (6), (7) будуть чисельними методами, які в роботі мають назву I та II.

Метод I. Розглядаючи рівняння (6) у точках  $\xi_m^{(1)}$  ( $m=1, N-1$ ) та застосовуючи до (6) квадратурну формулу (2), одержуємо систему  $N$  лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з  $N$  невідомими  $\varphi^*(\tau_k^{(1)})$  ( $\tau_k^{(1)}$  - нулі многочлена Якобі  $p^{(-\alpha, -\beta)}(\tau^{(1)})$ ,  $k=1, N$ ).

Метод II. Вводиться нова невідома функція

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) - \mu_1 \theta_1(t) - \mu_2 \theta_2(t), \quad (8)$$

$\mu_1 = \varphi^*(0)$ ,  $\mu_2 = \varphi^*(1)$ ,  $\theta_1(t) = \left[ \frac{1-t}{t} \right]^\beta$ ,  $\theta_2(t) = \left[ \frac{t}{1-t} \right]^\alpha$ , яка дорівнює нулю на кінцях інтервала інтегрування. Внаслідок цього одержуємо СІР відносно  $\tilde{\varphi}(t)$  та параметрів  $\mu_1$  і  $\mu_2$ , розв'язок якої можна подати у вигляді  $\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}^*(t) t^\xi (1-t)^\eta$ , де  $\xi$ ,  $\eta$  визначаються величинами перших двох коренів рівнянь

(5). Розглядаючи далі одержане рівняння у точках  $z_m^{(2)}$  ( $m=0, N$ ) та застосовуючи квадратурну формулу (2), одержуємо СЛАР відносно  $\tilde{\varphi}^*(\tau_k^{(2)})$  ( $\tau_k^{(2)}$  - нулі многочлена Якобі  $P_N^{(\xi, \eta)}(\tau^{(2)})$ ,  $k=1, N$ ) та параметрів  $\mu_1, \mu_2$ .

Чисельний аналіз показав, що найбільш раціональним в точки зору точності та економічності є вибір точок колокації  $z_m^{(1)}$  у середині відрізків  $[\tau_m^{(1)}, \tau_{m+1}^{(1)}]$  і  $z_m^{(2)}$  у середині відрізків  $[x_m, x_{m+1}]$  ( $x_0 = -1, x_k = \tau_k^{(2)}, x_{N+1} = 1$ ). У цьому випадку при тій же точності витрати машинного часу майже в 4 рази менші, ніж при застосуванні підходу, який базується на процедурі вибору точок колокації в нулях функції Якобі другого роду. Критерієм вибору методу I або II служить поведінка функції  $\varphi^*(t)$  біля особливих точок.

У закінченні першого розділу розглянуто чисельний розв'язок системи двох СІР, яка містить особливості типу (3). Одержані результати свідчать про хорошу збіжність використаного чисельного алгоритму.

Другий розділ присвячено розв'язку гармонічних задач для композитних областей з кутковими точками та тонкими включеннями (під цим терміном розуміються відрізки, на яких задано розподілення потенціалу). Використання при цьому функцій Гріне відповідних граничних задач дозволило значно зменшити обсяг обчислювальної роботи.

Алгоритм побудови функцій Гріне для композитних областей, запропонований В.А. Мельниковим, показано на прикладі розв'язку рівняння  $\Delta u_1(x, y) = F_1(x, y)$  ( $i=1, 2$ ) для прямокутника  $\Omega$  ( $-a \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ ), складеного з двох інших прямокутників  $\Omega_1$  ( $-a \leq x < 0, 0 \leq y \leq b$ ) та  $\Omega_2$  ( $0 < x \leq a, 0 \leq y \leq b$ ). Вважається, що прямокутники  $\Omega_1, \Omega_2$  мають різні фізичні характеристики, на їх бокових сторонах задані однорідні граничні умови, а на лінії  $x=0$  - умови ідеального контакту. При побудові використано метод розкладу в тригонометричні ряди; особливості, що містяться в одержаній таким чином функції Гріне, виділені в явному вигляді.

Цей алгоритм використовується також при побудові функції Гріне аналогічної задачі для рівняння Гельмгольца.

У §2.2 розглянута задача стаціонарної теплопровідності для прямокутника  $\Omega$ , що містить в області  $\Omega_2$  тонке включення

у вигляді відрізка  $(x=x^*, y_1 \leq y \leq y_2)$  на якому підтримується постійна температура. Розв'язок подано у вигляді потенціалу, ядром якого є побудована раніше функція Гріна. Цим, в силу визначальних властивостей функції Гріна, досягається задоволення граничним умовам. Задовольняючи умові на включенні, приходимо до СІР з логарифмічною особливістю в ядрі

$$\int_{y_1}^{y_2} [\ln|y-\eta| + M(y, \eta)] \mu(\eta) = F_0, \quad M(y, \eta) \in H, \quad y \in (y_1, y_2), \quad (9)$$

де  $\mu(\eta)$  - густина розподілу джерел;  $F_0$  - температурний розподіл на включенні. Для чисельного розв'язку одержаного рівняння використано метод ортогональних поліномів.

Особливий інтерес викликає випадок, коли включення виходить на лінію зміни фізичних характеристик матеріалу  $(y=y^*, 0 \leq x \leq x^*)$ . У цьому випадку приходимо до СІР з рухомою та нерухою особливостями типу Коші

$$\int_{-1}^1 \left[ \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \frac{1}{2+z+t} - \frac{1}{z-t} + M'(z, t) \right] \mu(t) dt = 0, \quad z \in (-1, 1) \quad (10)$$

з додавковою умовою

$$\int_{-1}^1 \left[ \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \ln|2+z^*+t| - \ln|z^*-t| + M(z^*, t) \right] \mu(t) dt = F_0, \quad (11)$$

де  $\gamma$  - співвідношення матеріальних констант областей  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$ ;  $z^*$  - деяка точка інтервалу  $(-1, 1)$ .

Чисельний розв'язок (10), (11) проводиться методом І, а при обчисленні інтегралів, пов'язаних з логарифмічними членами, використовується спеціальна квадратурна формула. Одержано температурний розподіл по всій області  $\Omega$ . Показано, що значення  $\mu(t)$  суттєво залежать від  $\gamma$  лише біля точки виходу включення на границю розподілу матеріалів.

§2.4 присвячений розв'язку задачі теорії потенціалу для композитної області, складеної з двох прямокутників різного розміру, один з яких містить у собі включення, на якому задане постійне значення потенціалу. Ця задача зведена до системи СІР з нерухомими особливостями типу Коші, після розв'язання якої одержані коефіцієнти при особливостях в околі куткових точок та залежності вихідних величин від співвідношен-

ня матеріальних констант даних прямокутників.

Основною метою третього розділу є розповсюдження методу СІР для дослідження міжфазної тріщини, розташованої на лінії розмежування двох півплощин, під впливом різних фізико-механічних полів.

У §3.1 будується розв'язок допоміжної задачі теорії пружності для півплощини  $y > 0$ , на границі якої задані граничні умови:  $\tau_{xy}(x, 0) = q_1(x)$ ,  $\partial v(x, 0) / \partial x = q_2(x)$ , а у внутрішніх точках діють зосереджені сили. Застосовуючи до рівнянь Ламе інтегральні перетворення Фур'є, будуються наступні граничні співвідношення:

$$u(x, 0) = \Gamma_1(x), \quad \sigma_y(x, 0) = \Gamma_2(x), \quad (12)$$

де

$$\Gamma_1(x) = \sum_{j=1}^2 \gamma_{1j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_j(t)}{x-t} dt + F_1(x), \quad 1, j=1, 2.$$

Тут коефіцієнти  $\gamma_{1j}$  залежать від властивостей матеріалу, а  $F_1(x)$  виражаються через елементарні функції і відображають вплив зосереджених сил. Одержані співвідношення є дуже зручними при формулюванні СІР для широкого кола конкретних задач. Вони можуть також використовуватись як функції Гріна у випадку розподілених навантажень.

Далі розглядається задача теорії пружності для півплощини, жорстко закріпленої по її границі. Припускається, що на відрізку  $|x| < b$  границі знаходиться ненавантажена тріщина, а в довільних внутрішніх точках прикладені зосереджені сили.

При розгляді міжфазної тріщини у рамках класичної моделі (Г.П. Черепанов) напруження і деформації в околі її вершин мають осциляційні особливості, що, з одного боку, суперечить фізичній суті задачі (взаємне проникнення матеріалів), а з другого – затрудняє використання чисельних методик. Тому в даній роботі застосовується "безосциляційна" модель (И. Сомпіноу), яка ґрунтується на априорному припущенні про гладкий контакт берегів тріщини в околі  $a < |x| < b$  вершини (параметр  $a$  поки що є довільним), що дозволяє уникнути осциляційних особливостей. Використовуючи співвідношення (12) та враховуючи, що в цьому випадку  $q_1(t) = 0$  для  $|t| < b$ ,  $|t| > h$  ( $h > b$ ) а  $q_2(t) = 0$  для  $|t| > a$ , приходимо до системи СІР

$$\gamma_{11} \int_b^a \left[ \frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right] q_1(t) dt + \gamma_{12} \int_{-a}^a \frac{q_2(t)}{x-t} dt = -F_1(x), \quad i=1,2 \quad (13)$$

Додаткові умови до (13) одержуємо з умов симетрії та однозначності зміщень при обході контуру тріщини.

Розв'язок цієї задачі при різних значеннях параметра  $\lambda = (b-a)/(2b)$ , який характеризує довжину зони контакту, буде-тьсся методом II. Обчислюються також основні коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН):

$$K_1 = \lim_{x \rightarrow a+0} \sqrt{2(x-a)} \sigma_y(x,0), \quad K_2 = \lim_{x \rightarrow b+0} \sqrt{2(x-b)} \tau_{xy}(x,0)$$

Показано, що для кожного матеріалу і навантаження, сприяючо-го розкриттю тріщин, існує  $\lambda = \lambda_0$ , при якому  $\sigma_y(x,0) \leq 0$  на  $(a,b)$ ,  $v(x,0) \geq 0$  на  $[-a,a]$ , тобто картина деформації тріщини фізично ймовірна. При  $\lambda = \lambda_0$   $K_1 = 0$  і основним параметром руйнування стає  $K_{20} = K_2 \Big|_{\lambda = \lambda_0}$ .

У роботі також аналізується залежність довжини зони контакту від механічних властивостей матеріалу, величини та точок прикладення навантаження. При цьому слід відзначити, що при  $\lambda = \lambda_0$  основні невідомі функції в околі вершини тріщини змінюються дуже швидко, тому достовірне визначення відповідних КІН потребує розв'язку СЛАР високого порядку. В той же час, як показав чисельний аналіз, у задачі, яку ми розв'язуємо, як і в випадку інших видів навантаження (В.В. Лобода), величина

$$K = \sqrt{\omega K_1^2 + K_2^2}, \quad \omega = \frac{4(1-\nu)}{3-4\nu} \quad (14)$$

для  $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \lambda_*)$  ( $\lambda_* = 0,01$ ) практично не змінюється. Ця об-ставина і в даному випадку для малих  $\lambda_0$  дозволяє застосову-вати наступний алгоритм: проводити розв'язок практичних задач для  $\lambda = \lambda_*$ , знаходити  $K$ , а далі для визначення основного пара-метра руйнування  $K_{20}$  використовувати квазіінваріантність ве-личини  $K$ .

У §3.3 розглянута у рамках "безосцяційної" моделі за-дача термопружності для міфрової тріщини під дією зосеред-жених сил та зосереджених джерел тепла, розташованих у внут-

рісних точках півплощини. Вважається, що температурне поле, викликане цими джерелами, є стаціонарним, а границя розмежування півплощин має нульову температуру. З рівняння стаціонарної теплопроводності знаходимо функцію, що описує шукане температурне поле, а далі визначаємо відповідні термопружні зміщення та напруження. Одержана при цьому система СІР відрізняється від відповідної системи пружної задачі (13) лише правими частинами. Одержано залежність основного параметра руйнування  $K_{20}$  і величини  $\lambda_0$  від потужності теплових джерел. Показано, що за рахунок відповідного вибору місця розташування та потужності теплових джерел можна суттєво зменшити величину КІН аж до повного усунення особливості.

У §§ 3.4, 3.5 розглянута задача електропружності для п'єзоелектричної півплощини  $z > 0$ , стикованої на границі  $z = 0$  з абсолютно жорстким провідником. На відрізку  $|x| < b$  лінії розмежування матеріалів припускаємо наявність тріщини, навантаженої внутрішнім тиском  $P(x)$ .

Вводячи на границі  $z = 0$  функції  $\sigma_{zz}(x, 0) = q_1(x)$ ,  $\partial w(x, 0) / \partial x = q_2(x)$ ,  $\partial \varphi(x, 0) / \partial x = q_3(x)$  ( $\varphi$  - електричний потенціал) і використовуючи інтегральні перетворення Фур'є, будуються граничні інтегральні співвідношення

$$u'(x, 0) = \sum_{k=1}^3 b_{1k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_k(t)}{t-x} dt, \quad \sigma_{zz}(x, 0) = \sum_{k=1}^3 b_{2k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_k(t)}{t-x} dt,$$

$$D_z(x, 0) = \sum_{k=1}^3 b_{3k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_k(t)}{t-x} dt \quad (15)$$

де  $D_z$  - складова вектора електричної індукції;  $b_{jk}$  ( $1, k = 1, 2, 3$ ) - сталі, що визначаються властивостями матеріалу.

Спочатку розглядається "безосциляційна" модель міжфазної тріщини з безперервними величинами електричного потенціалу  $\varphi$  та електричної індукції  $D_z$  на лінії тріщини ( $\varphi(x, 0) = 0$ ,  $|x| < \infty$ ). Використовуючи граничні співвідношення (15) для електропружної півплощини та задовольняючи умовам в області контакту, одержуємо систему СІР відносно функцій  $q_1(x)$  на  $[b, h]$  і  $q_2(x)$  на  $[-a, a]$ . Чисельний розв'язок цієї системи здійснюється методом ІІ. В результаті одержано значення КІН  $K_1$ ,  $K_2$ , а також параметр  $K$ . Установлено, що вели-

чина  $K_1$  у випадку п'єзоелектричного матеріалу є квазіінваріантом по відношенню до довжини зони контакту берегів тріщини  $\lambda$ . Проведено порівняння з точним розв'язком, одержаним у рамках класичної моделі міфазної тріщини (В.В. Партон, Б.А. Кудрягцев). Поза зоною осциляції одержана добра збіжність наближеного розв'язку з точним.

Розглянута також модель міфазної тріщини, яка може бути використана при дослідженнях розкритих тріщин нормального розриву в п'єзоелектричних матеріалах. У цьому випадку можливо припустити, що розкрита тріщина заповнена вакуумом (повітрям). Отже, на границі  $z=0$  для  $|x|<b$  замість умови  $\varphi(x,0)=0$  має місце умова  $D_z(x,0)=0$ . За допомогою співвідношень (15) приходимо до системи трьох СІР відносно  $q_1(x)$  на  $[b,h]$ ,  $q_2(x)$ ,  $q_3(x)$  на  $[-b,b]$ . Дослідження поведінки невідомих функцій біля верхньої тріщини, згідно з методикою, викладеною у першому розділі, показало, що у даному випадку не виникає осциляційної особливості, а має місце степенева особливість із показником степені, відмінним від 0,5. Чисельний розв'язок системи СІР побудовано методом І.

У четвертому розділі розглядаються особливості розв'язку бігармонічних крайових задач в областях з кутковими точками. Дослідження проводиться на прикладі плоскої задачі теорії пружності для ортотропної півплощини  $|x|<h$ ,  $0<y<\infty$ .

Спочатку у §4.1 припускається, що на кромках півплощини задані довільні граничні умови, які забезпечують її рівновагу, а у внутрішніх точках прикладені зосереджені сили. Вводячи на кромках функції

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x,0) &= q_1(x), & v'(x,0) &= q_2(x), \\ \tau_{xy}(h,y) &= f_1(y), & u'(h,y) &= f_2(y), \end{aligned}$$

та застосовуючи до відповідних рівнянь Ламе метод інтегральних перетворень Фур'є, будуть наступні граничні інтегральні співвідношення:

$$\begin{aligned} u'(x,0) &= \Omega_1(x) + \tilde{u}'(x,0), & \sigma_y(x,0) &= \Omega_2(x) + \tilde{\sigma}_y(x,0), \\ v'(h,y) &= \Omega_3(y) + \tilde{v}'(h,y), & \sigma_x(h,y) &= \Omega_4(y) + \tilde{\sigma}_x(\dots,y). \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$\Omega_1(x) = \sum_{j=1}^2 \left\{ \mu_{1j} \int_{-h}^h \left[ \frac{1}{2h-x-t} - \frac{1}{x-t} - \frac{1}{2h+x+t} + M_{1j}(x,t) \right] q_j(t) dt + \right. \\ \left. + \mu_{1,j+2} \int_0^{\infty} \left[ \frac{t}{t^2+(h-x)^2} + \frac{t}{t^2+(h+x)^2} + M_{1,j+2}(x,t) \right] f_j(t) dt \right\},$$

$$\Omega_{1+2}(y) = \sum_{j=1}^2 \left\{ \gamma_{1j} \int_{-h}^h \left[ \frac{h-t}{(h-t)^2+y^2} - \frac{h+t}{(h+t)^2+y^2} + K_{1j}(y,t) \right] q_j(t) dt + \right. \\ \left. + \gamma_{1,j+2} \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{t-y} + \frac{1}{t+y} + K_{1,j+2}(y,t) \right] f_j(t) dt \right\}.$$

Функції  $M_{1l}(x,t)$ ,  $K_{1l}(y,t)$  ( $l=1,2$ ;  $l=1,2,3,4$ ) є обмеженими частинами ядер; доданки  $\tilde{u}'$ ,  $\tilde{\sigma}_y$ ,  $\tilde{v}'$ ,  $\tilde{\sigma}_x$  визначають вплив зосереджених сил і виражаються через елементарні функції. За допомогою співвідношень (16) можуть бути сформульовані системи СІР для різних варіантів граничних умов на кромках півполоси. Ці співвідношення можуть бути також використані як функції Грінє для випадків навантаження, розподіленого по деякій лінії чи площині.

З метою апробації одержаних співвідношень в §4.2 розглянуто випадок жорстко защемленого торця півполоси при відсутності напружень на її поздовжніх кромках. У цьому випадку, враховуючи, що  $q_2(x)=0$ ,  $f_1(y)=0$  та задовольняючи за допомогою співвідношень (16) граничним умовам, що залишилися, одержано систему СІР з вищевказаними особливостями. Невідомі функції розшукуються у вигляді  $q_1(t)=q_1^*(t)(h^2-t^2)^{-\alpha}$ ,  $f_2(t)=f_2^*(t)t^{-\alpha}$ ,  $q_1^*(t), f_2^*(t) \in \mathbb{N}$ . За методикою §1.2 одержуємо трансцендентне рівняння для визначення степені особливості  $\alpha$ . Чисельна реалізація викладеного алгоритму проводилася при різних розташуваннях точок прикладення зовнішніх сил. Зокрема, для випадку навантаження, близького до розглянутого у роботі І.І. Воронича та В.В. Копасько значення напружень на торці півполоси добре погоджуються між собою.

У §4.3 розглянута задача про вдвільвання жорсткого штампу з горизонтальною основою в пружну півполоску. Вважається, що штамп знаходиться в умовах гладкого контакту з участюм  $[-a, a]$  торця півполоси, а бокові кромки жорстко за-

щемлені. У цьому випадку  $q_1(x)=0$ ,  $f_2(y)=0$ , а  $q_2(x) \neq 0$  для  $|x| < a$ , задовольняючи а допомогою співвідношень (16) умови  $v'(h,y)=0$  ( $y>0$ ),  $\sigma_y(x,0)=0$  ( $a < |x| < h$ ), одержуємо систему СІР відносно  $q_2(x)$  на  $[a,h]$  та  $f_1(y)$  на  $[0,\infty)$ . Невідомі функції подамо у вигляді  $q_2(t)=q_2^*(t)(h-t)^{-\alpha}(t-a)^{-0.5}$ ,  $f_1(t)=f_1^*(t)t^{-c}$ , де степінь особливості  $\alpha$  буде мати таке саме значення, як і у §4.2. Чисельний розв'язок одержано методом І. Результати обчислення нормальних напружень під штампом у випадках, коли величина штапцу мала порівняно з шириною півполоси, практично збігається з відомим результатом М.І. Мухомелішвілі про вдвлювання штапца в пружку півплощину.

Розглянуто також випадок відшарування короткого штапцу від торця півполоси під дією зовнішніх сил. Для опису утворених тріщин використовуються "безосциляційна" модель, тобто вважається, що береги тріщин в околі  $|x| \in (a,b)$  їх вершин знаходяться в умовах гладкого контакту. З граничних умов випливає, що  $q_1(x)=0$  для  $|x| > a$ ,  $q_2(x)=0$  для  $|x| < b$ ,  $f_2(y)=0$ , а решта умов за допомогою співвідношень (16) дають систему трьох СІР відносно не ідомих функцій  $q_1(x)$  на  $[-a,a]$ ,  $q_2(x)$  на  $(b,h]$ ,  $f_1(y)$  на  $(0,\infty)$ . Чисельний розв'язок останньої знайдено методом І. Також одержані значення  $K_1$ ,  $K_2$  і параметра  $K$ .

У закінченні сформульовані основні результати роботи, котрі виносяться на захист:

1. Запропоновано чисельний алгоритм розв'язку СІР з рухомими та нерухомими особливостями, який базується на процедурі колокації і квадратурних формулах інтерполяційного типу для інтегралів типу Коші. На прикладі рівняння, яке має точний розв'язок, продемонстровано ефективність вказаного алгоритму.
2. Одержано граничні інтегральні співвідношення рівнянь Пуассона та Ламе в канонічних областях з явно визначеними особливостями в ядрі. Надана методика їх застосування до розв'язку відповідних змішаних задач для таких областей.
3. Сформульовано системи СІР, які відповідають широксму колу гедмонічних і бігармонічних крайових задач для складених областей з кутовими точками і тонкими вкличеннями, а також проведено їх аналітичне дослідження та чисельний розв'язок.
4. Сформульовано математичні моделі міжфазної тріщини та

проаналізовано вплив на неї різних фізико-механічних полів. Показано, що поля суттєво впливають на поведінку невідомих функцій біля вершин тріщини і в ряді випадків навіть змінюють сам характер розв'язку.

- Б. На основі збудованих алгоритмів створено комплекс програм і розв'язано нові задачі стаціонарної теплопровідності, теорії пружності, термопружності та електропружності для областей з тріщинами та кутовими точками.

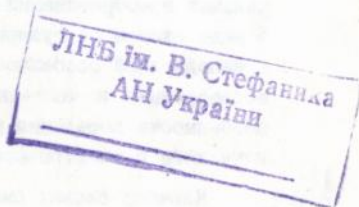
У додатку дана коротка інформація про основні програми, що реалізують алгоритми розв'язку розглянутих вище задач.

Конкретна особиста участь автора в одержанні наукових результатів показана в опублікованих роботах. Співавтором по публікаціях є В.В. Лобода, науковий керівник автора при виконанні дисертації. Він брав участь у постановці розглянутих задач та в обговоренні одержаних результатів. Автору належить побудова розв'язків поставлених задач та розробка відповідного програмного забезпечення.

Основні положення дисертації  
опубліковані в наступних роботах

1. Говоруха В.Б., Лобода В.В. Чисельний алгоритм рішення сингулярних інтегральних рівнянь з подвигною і неподвигною особливостями // Вопросы прикладной математики и математического моделирования. - Днепропетровск: ДГУ, 1995. - С. 22-28.
2. Говоруха В.Б., Лобода В.В. Про контакт берегів міжфазної тріщини в полі зосереджених масових зусиль // ФХММ.-1995. - № 2.- С. 35-42.
3. Говоруха В.Б. Об одном способе решения смешанной задачи теории потенциала для композитной области с тонким включением // Вопросы прикладной математики и математического моделирования. - Днепропетровск: ДГУ, 1995. - С. 114-120.
4. Говоруха В.Б. Антиплоская задача теории упругости для составного тела с угловыми точками и тонким включением // Вопросы механики, деформирования и разрушения твердых тел.- Днепропетровск: ДГУ, 1995. - С. 50-58.

5. Говоруха В.Б., Лобода В.В. Об одном варианте метода ГИУ исследования смешанной задачи теории упругости для ортотропной полуполосы // Вопросы механики деформирования и разрушения твердых тел. - Днепропетровск: ДГУ, 1995. - С. 141-152.
6. Govorukha V.B., Loboda V.V. The Heat Field Influence upon the SIP Value of Interface Crack // Proceedings of the First International Symposium on Thermal Stresses and Related Topics (Hamamatsu, Japan, Juni 5-7, 1995). - Hamamatsu, 1995. - P. 47-49.
7. Говоруха В.Б., Лобода В.В. Об особенностях НДС частично защемленной полуплоскости // Тез. докл. 3-й Международной науч. конф. "Материалы для строительных конструкций" (Макеевка, 8-10 июля 1994). - Днепропетровск, 1994. - С. 136-137.
8. Melnikov Y.A., Loboda V.V., Govorukha V.B. Linear Inclusion Contacting an Interface in a Piecewise Homogeneous Medium // Proceedings of the 31st Annual Technical Meeting of the Society of Engineering Science (Texas, USA, October 10-12, 1994). - Texas, 1994. - P. 321.
9. Govorukha V.B., Loboda V.V. On a Numerical Method of the Solution of Singular Integral Equations // Book of Abstracts of the Third International Congress on Industrial and Applied Mathematics (Hamburg, Germany, July 3-7, 1995). - Hamburg, 1995. - P. 293.
10. Говоруха В.Б., Лобода В.В. Про особливості напружено-деформованого стану напівнескінченної полоси під дією зосереджених зусиль // Тези доп. 2-го Міжнар. симпоз. укр. інженерів-механіків (Львів, 4-6 травня 1985). - Львів, 1985. - С. 18.



ABSTRACT. V.B.Govorukha. Singular integral equations application for the investigation of the physical-mechanical fields peculiarities in the domains with corner points.

Thesis presented for a candidate's degree (physics and mathematics). Speciality: 01.05.02 - mathematical modeling and calculative methods in scientific researches, Dnepropetrovsk State University, Dnepropetrovsk, 1995.

Ten papers are to be defended in which the procedure of boundary value problems solution for elliptic equations in homogeneous and composite domains with corner points is suggested. Mathematical models in the form of singular integral equations systems with moving and motionless singularities in the kernel are obtained by using of Green functions and integral transforms. By means of analytical investigation and numerical solution of these equations the peculiarities of temperature, mechanical and electrical fields behaviour and interaction in mentioned domains are studied.

АННОТАЦІЯ. Говоруха В.Б. Применение сингулярных интегральных уравнений к исследованию особенностей физико-механических полей в областях с угловыми точками.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 - математическое моделирование и численные методы в научных исследованиях, Днепропетровский государственный университет, Днепропетровск, 1995.

Зв'язується 10 наукових робіт, в яких пропонується методика рішення крайових задач математическої фізики для еліптичних рівнянь в однородних і складених областях з кутовими точками. С використанням апарату функцій Грина і інтегральних перетворень Фур'є побудовані математическі моделі в формі систем сингулярних інтегральних рівнянь з подвижною і неподвижною особливістю в ядрі. На основі аналітического дослідження і численного рішення вказаних систем вивчені особливості поведінки і взаємодії температурного, механіческого і електрического полів в розглянутих областях.

Ключові слова: сингулярні інтегральні рівняння, квадратурна формула, особливі точки, фізико-механічні поля.

445784

AB 33.348