МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
Львівський державний університет
ім. Ів. Франка

*На правах рукопису*

ЛАВРЕНЮК
Сергій Павлович

# ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ СИСТЕМ З ВИРОДЖЕННЯМ, ЯКІ МІСТЯТЬ ДРУГУ ПОХІДНУ ЗА ЧАСОМ

01.01.02 – Диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Львів 1995

Дисертація є рукопис.

Робота виконана у Львівському державному університеті ім. Ів.Франка.

Офіційні опоненти:

– доктор фізико-математичних наук, професор Івасишен С.Д.

– доктор фізико-математтичних наук, професор Кислов М.В.

– доктор фізико-математтичних наук, професор Шишков А.Є.

Провідна установа – Інститут математики НАН України, м. Київ.

Захист дисертації відбудеться " 21 " грудня 1995 р. о 15.30 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 04.04.01 при Львівському державному університеті ім. І. Франка за адресою: 2900001, м. Львів, вул. Університетська 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Львівського державного університету (м. Львів, вул. Драгомановаа, 5).

Автореферат розіслано " 8 " листопада 1995 р.

Вчений секретар
спеціалізовано ради Микитюк Я.В.

## Загальна характеристика роботи

**Актуальність теми.** Як відомо, лінійне рівняння другого порядку з частинними похідними може бути в області визначення, або її частині, гіперболічним, еліптичним чи параболічним в залежності від визначеності певної квадратичної форми. У цілому ряді математичних моделей реальних фізичних процесів рівняння на певних поверхнях змінюють тип. До них належить рівняння вигляду

$$\varphi(t)\, u_{tt} + c(t)\, u_t - \psi(t)\, \Delta u = f(x,t), \tag{1}$$

яке при $\varphi(t) = t$, $c(t) \equiv const$, $\psi(t) \equiv a^2$, $f(x,t) \equiv 0$ є відомим рівнянням Ейлера-Пуасона-Дарбу.

Вперше задачу Коші з початковими даними на прямій $t = 0$ для рівняння (1) у випадку

$$\varphi(t) \equiv 1, \quad c(t) \equiv 0, \quad f(x,t) \equiv 0, \quad \psi(t) = t^m \ (m > 0), \quad x \in \mathbf{R}^1$$

розв'язав Дарбу ще у XIX столітті. Однак систематичне вивчення різних задач для рівнянь з виродженням типу почалося у двадцятих роках нашого століття у роботах Ф. Трікомі. Задачу Коші для різних часткових випадків рівняння (1) ($\varphi(t) = 1$) досліджували С. Гелерстадт, Ф.І. Франкль, І.С. Березін, А.В. Біцадзе, М. Протер, Г. Хельвіг, Р. Конті і багато інших авторів. Було виявлено, що у випадку $\psi(t) = t^m$ $(m > 0)$, $\varphi(0) > 0$ задача Коші для рівняння (1) з початковими умовами на гіперплощині $t = 0$ поставлена коректно, якщо $m < 2$.

У випадку $m \geq 2$ для коректності цієї задачі потрібні додаткові умови на коефіцієнти при молодших похідних і праву частину рівняння. Крім того, якщо $1 \leq m < 2$, то задача Коші ттакож може виявитися некоректною. У цьому випадку С.А. Терсенов задавав видозмінені початкові умови. У роботах М.Л. Краснова, А.Б. Нерсесяна, В.А. Брюханова, І.Є. Єгорова і інших авторів вивчалися мішані задачі для рівняння вигляду (1) при $\varphi(0) > 0$, $\psi(0) = 0$.

Систематичне вивчення задачі Коші і мішаних задач для рівняння вигляду (1) у випадку, коли $\varphi(0) = 0$, $\psi(t) \geq \psi_0 > 0$ розпочалося у п'ятдесятих роках XX століття і продовжується до наших днів у роботах Ф.Т. Барановського, В.Н. Врагова, Б.А. Бубнова, І.Є. Єгорова, Н.А. Ларкіна, С.А. Терсенова, С.Н. Глазатова, А.С. Калашникова, А.В. Дерябіної, П.Ю. Соболевського і С.М. Семенова, У. Лейтона та інших авторів. Зауважимо, що і в даному випадку, коли $\varphi(t) = t^m$, $(m \geq 1)$, то класичні початкові умови можуть не бути коректними для рівняння (1). Для коректності вимагається виконання додаткових умов на коефіцієнти при молодших похідних і праву частину $f(x,t)$.

Найбільш повно задача Коші і мішані задачі для рівняння вигляду (1) вивчені у випадку $m < 2$, $c(t) \geq c_0 > 0$ (або $m > 2$, $c(t) \geq 0$, $\inf \dfrac{\varphi'(t)}{c(t)} = 0$). Значно менше такі задачі вивчені, коли $m \geq 2$, $c(t) \geq 0$ і практично не вивчені у випадку $c(t) < 0$, або $c(t) = O(\varphi'(t))$. Крім того, практично не досліджені задачі для рівняння вигляду (1) у випадку, коли $\varphi(t)$ обертається в нуль в кінцевий момент часу. Певний інтерес мають і нелінійні рівняння з виродженням.

У тридцятих роках нашого століття А.М. Тихонов вперше розглянув задачу без початкових умов, названу ним задачою Фур'є, для рівняння теплопровідності. Ця задача характерна тим, що при $t \to -\infty$ задається лише певне обмеження на зростання розв'язку. Пізніше задачі Фур'є для параболічних і деяких інших еволюційних систем були досліджені у роботах Івасишена С.Д., Олійник О.А. та інших авторів. Одним із напрямків розвитку теорії задач без початкових умов є вивчення їх для гіперболічних систем. Зауважимо, що задача Фур'є у циліндричній області заміною часової змінної зводиться до мішаної задачі для еволюційної системи, яка сильно вироджується на гіперплощині задання початкових даних.

Відомо, що нелінійні рівняння з другою похідною за часом є достатньо важкими для вивчення. Існує багато математичних моделей реальних процесів, які містять такі рівняння. Сюди належить і рівняння типу поперечних коливань стержня. В даний час такі рівняння з нелінійністю у другій похідній за просторовою змінною є недостатньо вивченими. Тому, на наш погляд, вивчення таких задача є актуальним для завершення побудови загальної теорії лінійних рівнянь з частинними похідними, які вироджуються на гіперплощині задання початкових даних. Тому запропоновані дослідження є актуальними для теорії рівнянь з частинними похідними і, зокрема, для завершення побудови загальної теорії лінійних рівнянь і систем з частинними похідними, які вироджуються на площині $t = const$.

**Мета роботи** полягає в побудові класів коректності мішаних задач та задачі Фур'є для еволюційних систем з другою похідною за часом, частина рівнянь яких (або всі рівняння) вироджуються на деякій гіперплощині $t = const$ в залежності від коефіцієнтів і правої частини системи.

**Наукова новизна роботи** полягає:

- у знаходженні ефективних способів побудови просторів коректності мішаних задач для лінійних і слабо нелінійних еволюційних систем з другою похідною за часом, які вироджуються на гіперплощині задання початкових даних, за коефіцієнтами і правою частиною системи;
- у встановленні поведінки розв'язків мішаних задач для слабо нелінійних еволюційних систем з другою похідною за часом, частина рівнянь якої (або всі рівняння) вироджується в кінцевий момент часу;
- у побудові просторів коректності задачі Фур'є для слабо нелінійних еволюційних систем з другою похідною за часом;
- у встановленні умов існування локального розв'язку мішаної задачі для одного нелінійного рівняння типу поперечних коливань стержня.

**Методи досліджень.** У роботі використовуються метод регуляризації вироджених систем, метод Гальоркіна, метод компактності та метод штрафу. Ці методи дозволяють на основі апріорних оцінок гальоркінських наближень побудувати послідовності функцій, збіжні до розв'язків поставлених задач. Для отримання апріорних оцінок суттєву роль відіграють певні диференціальні нерівності.

**Наукова та практична цінність роботи.** Робота має теоретичний характер і її результати сформульовані у вигляді теорем. Розроблені методи дають можливість ефективно встановлювати класи коректності задач для еволюційних систем з другою похідною за часом, які вироджуються на гіперплощині $t = const$, за коефіцієнтами і правою частиною систем. Отримані результати та використані методи дослідження можуть бути застосовані до подальшого вивчення еволюційних систем з виродженням, для розвитку загальної теорії рівнянь з частинними похідними. Результати дисертації також можуть бути використані при дослідженні деяких задач механіки.

**Апробація роботи.** Результати роботи доповідались на таких конференціях і семінарах:

- щорічний спільний семінар Московського математичного товариства і семінар імені І.Г. Петровського (Москва, 1985–1993 роки);
- Республіканські конференції із нелінійних задач математичної фізики (Львів, 1985 р.; Донецьк, 1987, 1991, 1993; Чернівці, 1989);
- 9–та Радянсько- Чехословацька нарада із застосувань функціональних методів і методів теорії функцій до задач математичної фізики (Донецьк, 1986);
- семінар з диференціальних рівнянь Математичного інституту ім. Стеклова (керівник В.П. Михайлов, Москва, 1993);
- семінар Інституту математики НАН України (керівник М.Л. Горбачук, Київ, 1993);
- семінар Інституту прикладної математики і механіки НАН України (керівник І.В. Скрипник, Донецьк, 1992);
- семінар з диференціальних рівнянь Чернівецького університету (керівник С.Д. Івасишен, Чернівці, 1994);
- Львівський міський семінар з диференціальних рівнянь (керівники Б.Й. Пташник і В.Я. Скоробагатько, Львів, 1985–1994);
- семінар кафедри диференціальних рівнянь Львівського університету (Львів, 1985–1994);
- виїздне засідання Відділення математики НАН України та секції математики Західного наукового центру НАН Укрвїни (Луцьк, 24 – 25 травня 1995 р.).

**Публікації.** Основні результати дисертації опубліковані в роботах автора [1] – [15].

**Структура та об'єм роботи.** Дисертація складається зі вступу, шести глав та списку цитованої літератури, що нараховує 199 найменувань. Повний об'єм роботи – 288 сторінок, набраних і надрукованих в редакторі TEX.

## Зміст роботи

**У вступі** обгрунтовується актуальність теми, дано короткий огляд результатів, що мають безпосереднє відношення до теми роботи, викладено зміст дисертації.

**Глава 1** *"Узагальнений розв'язок мішаної задачі для еволюційної системи з виродженням"* складається з трьох параграфів.

У §1.1 формулюється наступна задача. Розглядається система

$$(\Phi(x,t)\,w_t + C(x,t)\,w)_t + A\,u + G(x,t)\,z = F(x,t), \tag{2}$$

де $\displaystyle A\,u \equiv \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(A_{\alpha\beta}(x,t)\,D^{\beta}\,w) + \sum_{|\alpha|\le m} B_{\alpha}(x,t)\,D^{\alpha}\,w,$

в обмеженій області $Q_T = \Omega\times(0,T)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega\subset C^{m,1}$ з крайовими

$$\left.\frac{\partial^i w}{\partial\nu^i}\right|_{S_T} = 0, \quad i = 0,\ldots,m-1 \tag{3}$$

і початковими

$$w(x,0) = 0, \quad \lim_{t\to 0}\Phi(x,t)\,w_t(x,t) = 0 \tag{4}$$

умовами. Тут $w = (u,v) = (u_1,\ldots,u_l,v_{l+1},\ldots,v_N)$, $F = (f_1,\ldots,f_N)$; $\Phi, C, A_{\alpha\beta}(|\alpha| = |\beta| \le m), B_{\varkappa}(|\varkappa| \le m), G$ – квадратні матриці розміру $N\times N$, причому

$$\Phi(x,t) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x,t) & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

де $\Phi_1$ – матриця розміру $l\times l$, а $E$ – одинична матриця розміру $(N-l)\times(N-l)$; $G(x,t) = diag\{g_1(x,t),\ldots,g_N(x,t)\}$; $z$ – вектор-стовпчик з координатами $z_i = |u_i|^{p-2}u_i$, $i = 1,\ldots,l$, $z_j = |v_j|^{p-2}v_j$, $j = l+1,\ldots,N$;

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}, \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$

$\nu$ – зовнішня нормаль до $S_T$. Припускається, що $m \geq 1$; $g_i(x,t) \equiv 0$, $i \in \mathfrak{M}_2 \subset \{1,\ldots,N\}$; $\mathfrak{M}_1 = \{1,\ldots,N\} \setminus \mathfrak{M}_2$; $p_i = p > 2$, $i \in \mathfrak{M}_1$; $p_j = 2$, $j \in \mathfrak{M}_2$; матриця $\Phi$ задовольняє умову

$$(\Phi_0): \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^l, \forall (x,t) \in \bar{Q}_T \ \Phi_1(x,t) = \Phi_1^*(x,t); \ (\Phi_1(x,t)\xi,\xi) \geq \varphi(t)|\xi|^2,$$

причому $\varphi(t) \in C[0,T] \cap C^1(0,T]$; $\varphi(0) = 0; \varphi\prime(t) > 0$, $t \in (0,T]$; $\varphi\prime(t)$ – монотонна функція на $(0,T]$.

Вводиться простір $\overset{\circ}{H}{}_{\varphi}^{m,1}(Q_T)$ як замикання за нормою

$$\|u\|_{\overset{\circ}{H}_{\varphi}{}^{m,1}(Q_T)} = \left( \int\limits_{Q_T} (\varphi(t)u_t^2 + \sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha u)^2) dx dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

множини нескінченно диференційовних функцій в $Q_T$, рівних нулю в околі межі $S_T$. Крім того, введено простори

$$V_{\varphi}^{m,1} = \prod_{i=1}^{l} \overset{\circ}{H}{}_{\varphi}^{m,1}(Q_T) \times \prod_{i=l+1}^{N} \overset{\circ}{H}_1{}^{m,1}(Q_T);$$

$$X_0 = \prod_{i=1}^{N} L^{p_i}(Q_T).$$

**Означення.** Функція

$$w(x,t) \in V_{\varphi}^{m,1} \cap X_0 \cap L^\infty((0,T);(\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N) \cap C([0,T];(L^2(\Omega))^N)$$

називається узагальненим розв'язком задачі (2)-(2), якщо вона задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_T} \Big[ -(\Phi(x,t)w_t + C(x,t)w, \psi_t) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta w, D^\alpha \psi) +$$
$$+ \sum_{|\alpha|\leq m} (B_\alpha(x,t)w, \psi) + (G(x,t)z, \psi) \Big] dx\, dt = \int\limits_{Q_T} (F(x,t), \psi) dx\, dt$$

для довільної функції $\psi \in V_1^{m,1}$, $\psi(T) = 0$ і умову $w(x,0) = 0$.

У §1.2 розглядається випадок слабого виродження системи. Систему (2) названо слабо виродженою, якщо $\varphi'(t)$ монотонно спадає на $(0, T]$. Відносно матриць $\Phi_1$, $C$, $A_{\alpha\beta}$ зроблено наступні припущення:

$$(\Phi_1): \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^l, \forall (x,t) \in \bar{Q}_T \ (\Phi_{1t}\xi, \xi) \le \varphi_1(t)\varphi\prime(t)|\xi|^2,$$
$$\varphi_1 \in L^\infty(0,T), \varphi_1(t) \ge 0, t \in [0,T];$$

$$(\Phi_2): \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^l, \forall (x,t) \in \bar{Q}_T \ (\Phi_{1t}\xi, \xi) \ge \varphi_2(t)\varphi\prime(t)|\xi|^2,$$
$$\varphi_2 \in L^\infty(0,T);$$

$$(C_0): \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall (x,t) \in Q_T \ (C(x,t)\xi, \xi) \ge c_0(t)|\xi|^2,$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \ c_0 \in L^\infty(\varepsilon, T);$$

$$(A_0): \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta w, D^\alpha w)\, dx \ge$$
$$\ge a_m \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha w|^2\, dx - a_0 \int\limits_{\Omega_t} |w|^2\, dx, \quad a_m > 0,$$
$$t \in [0,T], \forall w \in (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N, \Omega_t = Q_T \cap \{\tau = t\};$$
$$A_{\alpha\beta}(x,t) = A_{\beta\alpha}(x,t),\ A_{\alpha\beta}(x,t) = A^*_{\alpha\beta}(x,t), (x,t) \in Q_T, |\alpha| = |\beta| \le m.$$

Покладено

$$b_0(t) = \sup_{Q_t} \sum_{1\le|\alpha|\le m} \|B_\alpha(x,\tau)\|^2, t \in [0,T];$$

$$b_1(t,\rho_0) = \sup_{Q_t}\left(t^{2\rho_0} \sum_{1\le|\alpha|\le m} \|B_{\alpha t}(x,\tau)\|^2\right), t \in [0,T], \rho_0 \in [0.1);$$

$$b_2(t,\rho_0) = \sup_{Q_t} \frac{\|B_0(x,\tau)\|^2 \tau^{\rho_0}}{\varphi\prime(\tau)}, t \in [0,T], \rho_0 \in [0.1);$$

$$\nu_0 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,t]} \left[\varphi_1(\tau) - \frac{2c_0(\tau)}{\varphi\prime(\tau)}\right].$$

Сформульовано і доведено теорему.

**Теорема 1.** Нехай система (2) слабо вироджена, виконуються умови $(\Phi_0),(\Phi_1),(C_0),(A_0)$ і, крім того,

$$\Phi_1, A_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta t}, G \in L^\infty(Q_T); \forall\varepsilon > 0 \quad \Phi_{1t}, C \in L^\infty(Q_{\varepsilon,T});$$
$$b_i \in L^\infty(0,T), i = 0,1,2; \nu_0 < 1;$$

$p - 2 \leq \dfrac{2m}{n-2m}$, якщо $n > 2m$ і $p > 2$, якщо $n \leq 2m$. Тоді задача (2)-(4) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.

Крім того, виділено клас систем (2), для яких єдиність розв'язку зберігається і у випадку $\nu_0 \leq 1$. Наведено приклад, який ілюструє точність цього результату; тобто, якщо $\nu_0 > 1$, то задача (2) – (4) може мати більше одного розв'язку.

Для формулювання теореми існування розв'язку задачі введено наступні число і функції:

$$\nu_1 = \inf_{[0,T]} \max\left\{\sup_{[0,t]}\left[-\varphi_2(\tau) - \frac{2c_0(\tau)}{\varphi'(\tau)}\right]; \sup_{[0,t]}\left[-\frac{2c_0(\tau)}{\varphi'(\tau)}\right]\right\};$$
$$c_{0,1}(t) = \sup_{\Omega_t} \|C_t(x,t)\|^2;$$
$$\max\left(\frac{c_{0,1}(t)t^{2+\varkappa_0}}{(\varphi'(t))^2}; \frac{b_3(t)t^{2+\varkappa_0}}{\varphi'(t)}\right) \leq \omega_0(t), \qquad t \in (0,T],$$

де $\omega_0(t)$ – незростаюча функція на $(0,T]$, $\forall\varepsilon > 0 \;\; \omega_0(t) \in L^\infty(\varepsilon,T)$; $\varkappa_0 = \max\{0;\nu_0\}$.

**Теорема 2.** Нехай система (2) слабо вироджена, виконуються умови $(\Phi_0)$, $(\Phi_1)$, $(\Phi_2)$, $(C_0)$, $(A_0)$ і, крім того, $\Phi_1, A_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta t}, G, G_t \in L^\infty(Q_T)$; $\forall\varepsilon > 0 \;\; \Phi_{1t}, C, C_t \in L^\infty(Q_{\varepsilon,T})$; $\quad b_i \in L^\infty(0,T)$, $i = 0,1,2$; $g_i(x,t) \geq q_0 > 0$, $i \in \mathfrak{M}_1$, $(x,t) \in \bar{Q}_T$; $\nu_1 < 0$;

$$\int_0^T \frac{\varphi'(t)\omega_0(t)}{t^{\varkappa_0+\delta}}dt < \infty; \int_{Q_T} \frac{|F|^2\omega_0(t)}{t^{\varkappa_0+\delta}}dx\,dt < \infty, \;\; \delta > 0;$$

$p - 1 \leq n/(n-2m)$, якщо $n > 2m$ і $p > 2$, якщо $n \leq 2m$. Тоді існує узагальнений розв'язок $w(x,t)$ задачі (2) – (4) і для нього справедливі оцінки:

$$\int\limits_{\Omega} |u(x,t)|^2 dx \le M \frac{t^{2+\varkappa_0+\delta}}{\varphi(t)\varphi'(t)},$$

$$\int\limits_{\Omega} |v(x,t)|^2 dx \le M \frac{t^{2+\varkappa_0+\delta}}{\varphi'(t)},\ t \in [0,T],\ M = const.$$

Крім того, доведено теорему існування узагальненого розв'язку задачі (2) – (4) у випадку $\nu_1 \ge 0$.

*Для подальших досліджень припускається, що матриці $B_\alpha$ і $C$ мають наступний вигляд:*

$$C(x,t) = \begin{pmatrix} C^1(x,t) & C^2(x,t) \\ C^3(x,t) & C^4(x,t) \end{pmatrix}, B_\alpha(x,t) = \begin{pmatrix} B^1_\alpha(x,t) & B^2_\alpha(x,t) \\ B^3_\alpha(x,t) & B^4_\alpha(x,t) \end{pmatrix},$$

де $C^1, B^1_\alpha$ – квадратні матриці розміру $l \times l$; $C^4$, $B^4_\alpha$ – квадратні матриці розміру $(N-l)\times(N-l)$. Відносно матриці $C^1$ зроблено припущення:

$$(C_1): \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^l, \forall (x,t) \in Q_T\ (C^1(x,t)\xi,\xi) \ge c_1(t)|\xi|^2,$$
$$c_1(t) > 0, t \in (0,T].$$

*Доведено єдиність узагальненого розв'язку задачі (2) – (4) у випадку, коли*

$$c_1(t) > 0, \quad t \in (0,T], \quad \frac{\varphi_1(t)\varphi'(t)}{c_1(t)} < 2.$$

Якщо, крім того, $-\dfrac{\varphi_2(t)\varphi'(t)}{c_1(t)} < 2$, то також отримано умови існування узагальненого розв'язку задачі (2) – (4).

*У §1.3 розглядається сильно вироджена система, тобто система (2), для якої $\varphi'(t)$ строго монотонно зростає. Зроблено припущення*

$$(\Phi_3): \quad \sup_{Q_t} \frac{\|\Phi_1(x,\tau)\|}{\varphi'(\tau)} = \varphi_3(t);\ \varphi_3(t) \in L^\infty(0,T);$$

$$\inf_{[0,T]} \varphi_3(\tau) = 0;$$

$$(\Phi_4): \quad \sup_{Q_t} \frac{\|\Phi_{1t}(x,\tau)\|}{\varphi'(\tau)} = \varphi_4(t); \;\; \varphi_4(t) \in L^\infty(0,T)$$

**і введено множини та функції:**

$$\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}_1 \cap \{1,\ldots,l\}; \quad \mathfrak{M}_4 = \mathfrak{M}_1 \cap \{l+1,\ldots,N\};$$

$$b_3(t) = \max\Big\{ \sup_{Q_t} \frac{\|B_0^1(x,\tau)\|\tau^{\rho_1}}{\sqrt{\varphi'(\tau)}}; \sup_{Q_t} \|B_0^2(x,\tau)\|\tau^{\rho_1};$$

$$\sup_{Q_t} \frac{\|B_0^3(x,\tau)\|\tau^{\rho_1}}{\sqrt{\varphi'(\tau)}}; \sup_{Q_t} \|B_0^4(x,\tau)\|\tau^{\rho_1} \Big\}, t \in [0,T],$$

якщо $\Im < \infty$, і

$$b_3(t) = \max\Big\{ \sup_{Q_t} \frac{\|B_0^1(x,\tau)\|\tau^{\rho_1}}{\varphi'(\tau)}; \sup_{Q_t} \frac{\|B_0^2(x,\tau)\|\tau^{\rho_1}}{\sqrt{\varphi'(\tau)}};$$

$$\sup_{Q_t} \frac{\|B_0^3(x,\tau)\|\tau^{\rho_1}}{\sqrt{\varphi'(\tau)}}; \sup_{Q_t} \|B_0^4(x,\tau)\|\tau^{\rho_1} \Big\}, t \in [0,T],$$

якщо $\Im = \infty$; $\rho_1 \in (0, \frac{1}{2})$;

$$b_4(t,\rho_2) = \max\Big\{ \sup_{Q_t} \sum_{1\le|\alpha|\le m} \frac{\|B_\alpha^1(x,\tau)\|^2\tau^{\rho_2}}{\varphi'(\tau)}; \sup_{Q_t} \sum_{1\le|\alpha|\le m} \frac{\|B_\alpha^2(x,\tau)\|^2\tau^{\rho_2}}{\varphi'(\tau)};$$

$$\sup_{Q_t} \sum_{1\le|\alpha|\le m} \|B_\alpha^3(x,\tau)\|^2\tau^{\rho_2}; \sup_{Q_t} \sum_{1\le|\alpha|\le m} \|B_\alpha^4(x,\tau)\|^2\tau^{\rho_2}; \Big\},$$

$$t \in [0,T], \quad \rho_2 \in [0,1);$$

$$b_5(t,\rho_2) = \sup_{Q_t} \sum_{1\le|\alpha|\le m} \|B_{\alpha t}(x,\tau)\|^2\tau^{2\rho_2}, t \in [0,T],$$

якщо $\Im < \infty$, і

$$b_5(t,\rho_2) = \max\Big\{ \sup_{Q_t} \sum_{1\le|\alpha|\le m} \frac{\|B_{\alpha t}^1(x,\tau)\|^2\tau^{2\rho_2}}{\varphi'(\tau)}; \sup_{Q_t} \sum_{1\le|\alpha|\le m} \frac{\|B_{\alpha t}^2(x,\tau)\|^2\tau^{2\rho_2}}{\varphi'(\tau)};$$

$$\sup_{Q_t} \sum_{1\le|\alpha|\le m} \|B_{\alpha t}^3(x,\tau)\|^2\tau^{2\rho_2}; \sup_{Q_t} \sum_{1\le|\alpha|\le m} \|B_{\alpha t}^4(x,\tau)\|^2\tau^{2\rho_2} \Big\}, \;\; t \in [0,T],$$

$$\text{якщо } \Im = \infty; \quad \text{де } \Im = \int\limits_0^T \frac{dt}{\varphi'(t)}; \;\; \rho_2 \in (0,1);$$

$$c_2(t) = \max\left\{ \sup_{Q_t} \frac{\|C^1(x,\tau)\|}{\varphi'(\tau)}; \sup_{Q_t} \frac{\|C^2(x,\tau)\|}{\sqrt{\varphi'(\tau)}}; \right.$$
$$\left. \sup_{Q_t} \frac{\|C^3(x,\tau)\|}{\sqrt{\varphi'(\tau)}}; \sup_{Q_t} \|C^4(x,\tau)\| \right\};$$

$$q_1(t) = \max_{i\in\mathfrak{M}_3}\left(\sup_{Q_t} \frac{|g_i(x,\tau)|\tau^{\rho_1}}{\sqrt{\varphi'(\tau)}}\right)^2; q_2(t) = \max_{i\in\mathfrak{M}_4}(\sup_{Q_t} |g_i(x,\tau)|\tau^{\rho_1})^2;$$

$$\nu_2 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,t]}\left(\varphi_4(\tau) - \frac{2c_1(\tau)}{\varphi'(\tau)}\right).$$

Доведено твердження.

**Теорема 3.** Нехай система (2) сильно вироджена, виконуються умови $(\Phi_0)$, $(\Phi_3)$, $(\Phi_4)$, $(C_1)$, $(A_0)$ і, крім того, $\Phi_1, \Phi_{1t}, A_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta t} \in L^\infty(Q_T)$; $b_0, b_3, b_4, b_5, c_1, c_2, q_1, q_2 \in L^\infty(0,T)$; $\varphi(t) \ge \varphi_0\, t\,\varphi'(t)$, $t \in [0,T]$, $\varphi_0 > 0$; $\nu_2 < \varphi_0$; $p - 2 \le 2m/(n-2m)$, якщо $n > 2m$, і $p > 2$, якщо $n \le 2m$; $a_0 = 0$, якщо $\Im = \infty$. Тоді задача (2) – (4) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.

Аналогічна теорема єдиності доведена для лінійної системи, тобто у випадку, коли $G(x,t) \equiv 0$. Суттєвою умовою цієї теореми є виконання нерівності $\nu_2 < 1$. Наведено приклад, який показує, що у випадку $\nu_2 > 1$ задача (2) – (4) може мати більше одного розв'язку. Крім того, якщо виконується умова $\varphi(t) \ge \varphi_0\, t\,\varphi'(t)$, то єдиність розв'язку має місце і при $\nu_2 < 0$.

Для формулювання теореми існування розв'язку задачі (2) – (4) у випадку сильного виродження системи введено функції:

$$b_6^{(i)}(t) = \max\left\{ \sup_{\Omega} \frac{\|B_0^i(x,t)\|^2 + \|C_t^i(x,t)\|^2}{\varphi'(t)}; \right.$$
$$\left. \sup_{\Omega}(\|B_0^{i+2}(x,t)\|^2 + \|C_t^{i+2}(x,t)\|^2) \right\}, \; i = 1,2.$$

**Теорема 4.** Нехай система (2) сильно вироджена, $\mathfrak{M}_1 = \emptyset$, виконуються умови $(\Phi_0)$, $(\Phi_3)$, $(\Phi_4)$, $(C_1)$, $(A_0)$ і, крім того, $\Phi_1$, $\Phi_{1t}$, $A_{\alpha\beta}$,

$A_{\alpha\beta i} \in L^\infty(Q_T)$; $b_3$, $b_4(t,0)$, $b_5(t,\frac{1}{2}\rho_2)$, $c_1$, $c_2 \in L^\infty(0,T)$; $a_0 = 0$, якщо $\vartheta = \infty$;

$$\int\limits_{Q_T} \frac{b_7(t)}{(\varphi(t))^{\varkappa_1}} \left( \frac{|F_1(x,t)|^2}{\varphi'(t)} + |F_2(x,t)|^2 \right) dx\,dt < \infty,$$

де $b_7(t)$ – монотонно спадає на $(0,T]$ і така, що

$$\max\left\{ \frac{b_6^{(2)}(t)t^{2+\rho_3}}{\varphi(t)}; b_6^{(3)}(t)t^{2+\rho_3} \right\} \le b_7(t),$$

$$t \in (0,T], \quad \forall\varepsilon > 0 \quad b_7(t) \in L^\infty(\varepsilon,T), \quad \rho_3 \in (0,1),$$

$$\varkappa_1 = \begin{cases} \nu_2 + \delta, & \text{якщо} \quad \nu_2 \ge 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad \nu_2 < 0, \end{cases} \qquad \delta > 0.$$

Тоді існує узагальнений розв'язок $w(x,t)$ задачі (2) – (4), причому у випадку, коли $\inf\limits_{[0,T]} (t^2/\varphi(t)) = 0$, для нього справедливі оцінки:

$$\int\limits_{\Omega} |u(x,t)|^2 dx \le M\, t^2 (\varphi(t))^{\varkappa_1 - 1},$$

$$\int\limits_{\Omega_1} |v(x,t)|^2 dx \le M\, t^2 (\varphi(t))^{\varkappa_1}, \qquad t \in [0,T].$$

Аналогічні теореми існування узагальненого розв'язку доведені і у випадку, коли:

$$1) \quad \frac{t^{2+\delta}}{\varphi(t)} \in L^\infty(0,T), \quad \delta > 0;$$

$$2) \quad \varphi(t) \ge \varphi_0\, t\, \varphi'(t), \quad t \in (0,T].$$

Крім того, доведено теореми існування та єдиності узагальненого розв'язку задачі (2) – (4) у тому випадку, коли

$$\inf_{[0,T]} \frac{\varphi'(t)}{c_1(t)} = 0, \quad c_1(t) > 0, \quad t \in (0,T].$$

**У главі 2 "Задача з видозміненими початковими умовами для еволюційної системи"** розглядається система (2) у випадку, коли $G(x,t) \equiv 0$, $N = l$, замість умов (4) задаються початкові умови

$$\lim_{t\to 0} t^{-\gamma} u(x,t) = 0, \quad \lim_{t\to 0} t^{-\gamma} \Phi_1(x,t) u_t(x,t) = 0. \qquad (5)$$

Припускається виконання наступної умови $(\Phi_5)$ :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^l,\ \forall (x,t) \in \bar{Q}_T\ (\Phi_1(x,t)\xi,\xi) \le \varphi^0 \varphi(t)|\xi|^2, \quad \varphi^0 > 0.$$

Сформульовано і доведено таку теорему.

**Теорема 5.** Нехай для коефіцієнтів системи (2) виконуються умови $(\Phi_0)$, $(\Phi_3)$, $(\Phi_4)$, $(\Phi_5)$, $(C_1)$, $(A_0)$ і, крім того, $\Phi_1, A_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta t} \in L^\infty(Q_T)$; $\forall \varepsilon > 0 \quad \Phi_{1t}, C \in L^\infty(Q_{\varepsilon,T})$;
$b_0(t), b_1(t,0), c_2(t) \in L^\infty(0,T)$;

$$\forall \varepsilon > 0 \quad c_1 \in L^\infty(\varepsilon,T); \quad \varphi(t) = O(t^\omega),\ \omega > 0;$$
$$a_0 = 0, \quad \text{якщо} \quad \Im = \infty; \quad (\nu_2 - 1)\omega < 2\gamma,\ \gamma > 0.$$

Тоді задача (2), (3), (5) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.

Наведено приклад, який показує, що у випадку $(\nu_2 - 1)\omega > 2\gamma$ задача (2), (3), (5) може мати більше одного розв'язку. Крім того, отримано умови єдиності розв'язку у випадках, коли:

$$1) \qquad \inf_{[0,T]} \frac{\varphi'(t)}{t^{2-\rho}} = 0; \quad \varphi(t) > \varphi_0\, t\, \varphi'(t),$$
$$t \in [0,T], \quad \varphi_0 > 0, \quad \rho \in [0,1);$$
$$2) \qquad \varphi'(t) \le M\, t^2;$$
$$3) \qquad \inf_{[0,T]} \frac{\varphi'(t)}{c_1(t)} = 0; \quad c_1(t) > 0, \quad t \in (0,T].$$

Для кожного з вказаних випадків 1), 2), 3) отримано умови існування узагальненого розв'язку задачі (2), (3), (5). Зокрема, для випадку 1) теорема формулюється наступним чином.

**Теорема 6.** Нехай для коефіцієнтів системи (2) виконуються умови 1), $(\Phi_0)$, $(\Phi_2)$, $(\Phi_5)$, $(C_1)$, $(A_0)$ і, крім того, $\Phi_1$, $\Phi_{1t}$, $C^1$, $A_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta t} \in L^\infty(Q_T)$; $\forall\varepsilon > 0 \quad C_t^1 \in L^\infty(Q_{\varepsilon,T})$;

$$b_4(t,\rho), c_1 \in L^\infty(0,T), \quad \rho \in [0,1); \quad a_0 = 0;$$

$$\frac{\|C_t^1(x,t)\|^2 t^2}{(\varphi'(t))^2} \in L^\infty(0,T); \quad \int\limits_{Q_T} \frac{|F_1(x,t)|^2}{\varphi'(t) t^{2\gamma+\nu_3+\delta}} dx\, dt < \infty,$$

де $\delta \in (0,1)$ може бути як завгодно малим, а

$$\nu_3 = \frac{1}{\varphi_0} \inf_{[0,T]} \max\left\{ \sup_{[0,t]} \left[ -\varphi_2(\tau) - \frac{2c_1(\tau)}{\varphi'(\tau)} - \frac{4\gamma\overline{\varphi}^0\varphi(\tau)}{\tau\varphi'(\tau)} \right]; 0 \right\};$$

$$\overline{\varphi}^0 = \begin{cases} \varphi^0, & \text{якщо} \quad \gamma < 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad \gamma \geq 0. \end{cases}$$

Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (2), (3), (5).

**Глава 3** "Розв'язок майже всюди мішаної задачі для лінійної еволюційної системи з виродженням. Варіаційні нерівності" складається з двох параграфів. У §3.1 досліджується існування розв'язку майже всюди системи

$$\Phi(x,t)\, w_{tt} + C(x,t)\, w_t + A w = f(x,t) \tag{6}$$

з крайовими умовами (3). Для формулювання основної теореми цієї глави введено позначення:

$$b_8(t) = \max\left\{ \max_{i=1,2} \left\{ \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{\|B_\alpha^i(x,\tau)\|^2}{\varphi'(\tau)};\ \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|\leq m} \|B_\alpha^{i+2}(x,\tau)\|^2 \right\} \right\};$$

$$b_9(t,\rho) = \max\left\{ \max_{i=1,2} \left\{ \sup_{\Omega} \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{\|B_\alpha^i(x,t)\|^2 t^\rho}{\varphi'(t)}; \sup_{\Omega} \sum_{|\alpha|\leq m} \|B_\alpha^{i+2}(x,t)\|^2 t^\rho \right\} \right\};$$

$$c_3(t,\rho) = \max\left\{ \sup_{\Omega_t} \frac{t^\rho \|C_t^1(x,t)\|^2}{\varphi'(t)\varphi(t)}; \right.$$

$$\left. \sup_{\Omega_t} \frac{t^\rho \|C_t^2(x,t)\|^2}{\varphi'(t)};\ \sup_{\Omega_t} \frac{t^\rho \|C_t^3(x,t)\|^2}{\varphi(t)};\ \sup_{\Omega_t} t^\rho \|C_t^4(x,t)\|^2 \right\};$$

$$c_4(t) = \max\left\{\sup_{Q_t} \frac{\|C^2(x,\tau)\|^2}{\varphi'(\tau)};\ \sup_{Q_t} \frac{\|C^3(x,\tau)\|^2}{\varphi'(\tau)};\ \sup_{Q_t} \|C^4(x,\tau)\|^2\right\};$$

$$\nu_4 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,t]} \left[\varphi_1(\tau) - \frac{2c_1(\tau)}{\varphi'(\tau)}\right];\ \nu_5 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,t]} \left[-\varphi_2(\tau) - \frac{2c_1(\tau)}{\varphi'(\tau)}\right].$$

**Теорема 7. Нехай система (6) сильно вироджена, виконуються умови $(\Phi_0)$, $(\Phi_1)$, $(\Phi_2)$, $(\Phi_5)$, $(C_1)$, $(A_0)$ і, крім того, $\Phi$, $D^\alpha A_{\alpha\beta} \in C(\bar{Q}_T)$; $\forall \varepsilon > 0 \quad C, \Phi_t, C_t \in L^\infty(Q_{\varepsilon,T})$; $b_8, c_4 \in L^\infty(0,T)$; $\partial\Omega \in C^{2m}$;**

$$\max\{c_3(t,\rho);\ b_9(t,\rho)\} \le b_{10}(t,\rho),\ \ t \in (0,T],$$

**де $\forall \varepsilon > 0 \quad b_{10}(t,\rho) \in L^\infty(\varepsilon,T)$ і монотонно спадає на $(0,T]$, а $\rho \in [0,1)$; $|\nu_4|, |\nu_5| < \infty$; $a_0 = 0$;**

$$\int_{Q_T} \frac{b_{10}(t,\rho)}{(\varphi(t))^{\sigma_0}} \left[\frac{|F_1(x,t)|^2}{\varphi'(t)} + |F_2(x,t)|^2\right] dx\, dt +$$

$$+ \int_{Q_T} \frac{1}{(\varphi(t))^{\sigma_1}} \left[\frac{|F_{1t}(x,t)|^2}{\varphi'(t)} + |F_{2t}(x,t)|^2\right] dx\, dt +$$

$$+ \sigma_2 \int_\Omega |F_2(x,0)|^2 dx < \infty,$$

**де**

$$\sigma_0 = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \nu_4 < 0, \\ \nu_3 + \delta, & \text{якщо} \quad \nu_4 \ge 0; \end{cases} \quad \sigma_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \nu_5 < 0, \\ \nu_4 + \delta, & \text{якщо} \quad \nu_5 \ge 0; \end{cases}$$

$$\sigma_2 = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \nu_5 \ge 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad \nu_5 < 0; \end{cases}$$

**$\delta > 0$ – достатньо мале число. Тоді існує розв'язок майже всюди $w(x,t)$ системи (6) з крайовими умовами (3), який задовольняє початкові умови**

$$w(x,0) = 0,\quad \lim_{t\to 0} \sqrt{\varphi(t)}\, u_t(x,t) = 0,\quad v_t(x,0) = 0.$$

Досліджено умови існування розв'язку майже всюди у випадку виконання умови 3), а також, якщо $l = N$, умови існування розв'язку майже всюди задачі (6), (3) з видозміненими початковими умовами типу (5).

У §3.2 отримано умови існування і єдиності розв'язку варіаційної нерівності з виродженням, аналогічні як в монографії: Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.– М.: Мир, 1972. – 608 с. (стор. 417).

**Глава 4** "Мішана задача для еволюційної системи, яка вироджується в кінцевий момент часу" складається з трьох параграфів. У §4.1 розглядається система

$$\Phi(x,t)\,w_{tt} + C(x,t)\,w_t + A\,w + G(x,t)\,z = F(x,t) \tag{7}$$

з крайовими умовами (3) і початковими умовами

$$w(x,0) = w^0, \qquad w_t(x,0) = w^1, \tag{8}$$

де матриці $\Phi$, $C$, $A_{\alpha\beta}$, $B_\alpha$ та вектори $w$, $F$ мають ту ж саму структуру, що і в главі 1. Припускається, що

$$\varphi(t) = d_0(T-t)^{\omega}, \quad d_0 > 0, \quad \omega > 0, \quad t \in [0,T].$$

Через $V^{\sigma,s}_{j,\gamma,\rho}$ позначено замикання множини вектор-функцій $(C_0^\infty(\bar{Q}_T))^N$, нескінчено диференційовних в $\bar{Q}_T$ і рівних нулю в околі множини $S_T \cap \Omega_T$, за нормою

$$\|w\|_{V^{\sigma,s}_{j,\gamma,\rho}} = \Bigg( \int\limits_{Q_T} \Bigg[ \left|\frac{\partial^j u_l}{\partial t^j}\right|^2 (T-t)^{\gamma+\rho-1} + \left|\frac{\partial^j v_l}{\partial t^j}\right|^2 (T-t)^{\gamma-1} +$$

$$+ j \sum_{|\alpha|=m} \left| D^\alpha \frac{\partial^j w_l}{\partial t^j}\right|^2 (T-t)^{\gamma-1} + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha w|^2 (T-t)^{\gamma-1} +$$

$$+ s \sum_{m<|\alpha|\le 2m} |D^\alpha w|^2 (T-t)^{\gamma-1} \Bigg] dx\,dt \Bigg)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \sigma \sum_{i\in\mathfrak{m}_1} \left( \int\limits_{Q_T} |w_i|^{p_i} (T-t)^{\gamma-1} dx\,dt \right)^{\frac{1}{p_i}},$$

$$j = 0,1; \quad \gamma > 0; \quad \rho > 0; \quad \sigma = 0,1; \quad s = 0,1.$$

**§4.2 присвячений дослідженню існування та единості узагальненого розв'язку задачі (7), (3), (9). Припускається, що для матриці $C^4(x,t)$ виконується умова**

$$(C_2): \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^{N-l}, \quad \forall (x,t) \in Q_T \ \ (C^4(x,t)\xi,\xi) \geq d_1(t)|\xi|^2,$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad d_1(t) \in L^\infty(0, T-\varepsilon).$$

**Введено позначення:**

$$b_{11}(t) = \max_{i=1,2}\left\{\sup_{Q_{t,T}} \sum_{|\alpha|\leq m} \|B^i_\alpha(x,\tau)\|^2 (T-\tau)^{2-\omega}\right\};$$

$$b_{12}(t) = \max_{i=3,4}\left\{\sup_{Q_{t,T}} \sum_{|\alpha|\leq m} \|B^i_\alpha(x,\tau)\|^2 (T-\tau)^{2}\right\}; \quad t \in [0,T];$$

$$\gamma_1 = \inf_{[0,T]} [b_{11}(t) + b_{12}(t)];$$

$$c_i(t) = \sup_{Q_{t,T}} \left(\|C^{i-3}(x,\tau)\|(T-\tau)^{\frac{2-\omega}{2}}\right), \ i = 4,5, \quad t \in [0,T];$$

$$g_{i,1} = \inf_{[0,T]} \sup_{Q_{t,T}} [g_{it}(x,\tau)(T-\tau)], \quad i \in \mathfrak{M}_1;$$

$$\nu_6 = \inf_{[0,T]} [\sup_{[t,T]} (\varphi_1(\tau) d_0 - 2c_1(\tau)(T-\tau)^{1-\omega}) + c_4(t) + c_5(t)];$$

$$\nu_7 = \inf_{[0,T]} [\sup_{[t,T]} (-2d_1(\tau)(T-\tau)) + c_4(t) + c_5(t)];$$

$$\nu_8(\gamma) = \min_{i \in \mathfrak{M}_1} [\gamma \inf_{Q_T} g_i(x,t) - g_{i,1}].$$

**Теорема 8.** **Нехай для коефіцієнтів системи (7) виконуються умови $(\Phi_0)$, $(\Phi_1)$, $(C_1)$, $(C_2)$, $(A_0)$ і, крім того,**

$$\Phi, A_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta t} \in L^\infty(Q_T);$$

$$g_i \in L^\infty(Q_T), \quad i \in \mathfrak{M}_1; \qquad g_i(x,t) \geq g_{i,0} > 0, \quad i \in \mathfrak{M}_1;$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \Phi_{1t}, C, g_{it} \in L^\infty(Q_{T-\varepsilon}), \quad i \in \mathfrak{M}_1;$$

$$a_0 = 0; \qquad \nu_6, \nu_7, g_{i,1} < \infty, \quad i \in \mathfrak{M}_1;$$

$$w^0 \in \prod_{i=1}^{N} (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega) \cap L^{p_i}(\Omega)); \quad w^1 \in (L^2(\Omega))^N;$$

існує таке число $\gamma$, що:

$$\nu_8(\gamma) > 0; \quad \gamma a_m \min\{\gamma d_0 - \nu_6;\ \gamma - \nu_7\} > 2\gamma_m \gamma_1;$$

$$\int\limits_{Q_T} [\|F_1(x,t)|^2 (T-t)^{\gamma+1-\omega} + |F_2(x,t)|^2 (T-t)^{\gamma+1}] dx\, dt < \infty.$$

Тоді задача (9), (3), (9) має узагальнений розв'язок $w \in V^{1,0}_{0,\gamma,\omega-1}$. Якщо, крім того,

$$p_i - 2 \le \frac{2m}{n-2m}, \quad \text{коли} \quad n > 2m, \quad \text{і} \quad p_i > 2, \quad \text{коли} \quad n \le 2m, \quad i \in \mathfrak{M}_1,$$

то задача (9), (3), (9) має єдиний узагальнений розв'язок.

Тут $\gamma_m$ – стала з нерівності Фрідріхса

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha| \le m} (D^\alpha z)^2\, dx \le \gamma_m \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha| = m} (D^\alpha z)^2\, dx,$$

справедливої для всіх функцій $z \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$.

У §4.3 отримано умови існування единого розв'язку варіаційної нерівності для системи вигляду (9) у просторі $V^{1,1}_{1,\gamma,\omega-1}$.

У главі 5 "Задача без початкових умов для однієї еволюційної системи" розглянуто систему (7) у випадку $\Phi(x,t) = E$ в області $Q_T = \Omega \times (-\infty, T)$, $T < \infty$.

У §5.1 розглядається випадок, коли $\Omega$ – обмежена. Введено позначення:

$$a_1(t) = \max_{|\alpha|=|\beta| \le m} \sup_{Q_t} \|A_{\alpha\beta t}(x,\tau)\|;$$

$$b_{13}(t) = \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha| \le m} \|B_\alpha(x,\tau)\|^2; \; b_{14}(t) = \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha| \le m} \|B_{\alpha t}(x,\tau)\|^2;$$

$$c_6 = \inf_{(-\infty,T)} \sup_{Q_t} \|C(x,\tau)\|; \; c_7(t) = \sup_{Q_t} \|C_t(x,\tau)\|;$$

$$V = (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N \cap (L^p(\Omega))^N.$$

Доведена наступна теорема.

**Теорема 9.** Нехай $A_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta t}$, $B_{\varkappa}$, $B_{\varkappa t}$, $C$, $C_t$, $G \in L^\infty(Q_T)$, $|\alpha| = |\beta| \le m$, $|\varkappa| \le m$; $\lim\limits_{t\to-\infty} a_1(t) = 0$; $\lim\limits_{t\to-\infty} b_{13}(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to-\infty} c_7(t) = 0$; $\partial\Omega \in C^{m,1}$; $p - 2 \le \dfrac{2m}{n-2m}$, якщо $n > 2m$ і $p > 2$, якщо $n \le 2m$; виконуються умови $(A_0)$, $(C_0)$; $a_0 = 0$; $c_0 > 0$; $g_i(x,t) \ge g_0 > 0$, $i \in \mathfrak{M}_1$. Тоді якщо $\mathfrak{M}_1 \ne \emptyset$, то задача (7), (3) не може мати більше одного узагальненого розв'язку в класі функцій $w(x,t)$ таких, що

$$w \in L^\infty((-\infty,T);V), \quad w_t \in L^\infty((-\infty,T);(L^2(\Omega))^N),$$
$$\lim_{t\to-\infty} \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha w(x,t)|^2\,dx \to 0.$$

Якщо ж $\mathfrak{M}_1 = \emptyset$, то задача (7), (3) не може мати більше одного узагальненого розв'язку в класі функцій $w(x,t)$ таких, що

$$w \exp\left(\frac{\nu_0 t}{2}\right) \in L^\infty((-\infty,T);V),\, w_t \exp\left(\frac{\nu_0 t}{2}\right) \in L^\infty((-\infty,T);(L^2(\Omega))^N),$$

де

$$\nu_0 < \frac{2c_0 a_m}{3a_m + c_6\gamma_m}.$$

Крім того, виділено класи єдиності розв'язку у випадку $c_0 < 0$. Нехай $\omega(t)$ деяка функція, що задовольняє умови:

$$\omega(t) \in C^1((-\infty,T]); \quad \omega(t) > 0,\ \omega'(t) < 0, \quad t \in (-\infty,T]. \tag{9}$$

Позначено:

$$\inf_{(-\infty,T)} \sup_{\tau\in(-\infty,t]} \frac{\omega(\tau)a_1(\tau)}{|\omega'(\tau)|} = \mu_0,$$

$$\inf_{(-\infty,T)} \sup_{Q_t} \frac{\omega^2(\ )}{(\omega'(\tau))^2} \sum_{|\alpha|\le m} \|B_\alpha(x,\tau)\|^2 = \mu_1,$$

$$\inf_{(-\infty,T)} \sup_{\tau\in(-\infty,t]} \frac{\omega(\tau)\max\limits_{j\in\mathfrak{M}_1}\sup\limits_{\Omega} g_{j1}(x,\tau)}{|\omega'(\tau)|} = \mu_2.$$

**Теорема 10.** Нехай $D^\alpha A_{\alpha\beta}$, $C$, $G \in L^\infty(\bar{Q}_T)$, $|\alpha| = |\beta| \le m$; $\partial\Omega \in C^{m,1}$; виконуються умови $(A_0)$, $(C_0)$; $a_0 = 0$; існує функція $\omega(t)$, яка задовольняє умови (9) і така, що $a_m > \mu_0 + \mu_1\gamma_m$; $g_i(x,t) > \mu_2$, $i \in \mathfrak{M}_1$. Якщо

$$c_0 > 0 \quad \text{і} \int\limits_{Q_T} |F(x,t)|^2 \omega dx\, dt < \infty,$$

$$\text{або} \quad c_0 = 0, \quad \inf_{(-\infty,T)} |\omega'(t)| > 0 \quad \text{і}$$

$$\int\limits_{Q_T} |F(x,t)|^2 \frac{\omega^2(t)}{(\omega'(t))^2} dx\, dt < \infty,$$

то існує розв'язок $w(x,t)$ задачі (7), (3) такий, що $w \in L^\infty((-\infty,T);V)$, $w_t \in L^\infty((-\infty,T);(L^2(\Omega))^N)$.

У випадку лінійності системи (7) отримано уточнені умови існування узагальненого розв'язку цієї задачі. Наведено приклад, який показує, що у випадку

$$\inf_{(-\infty,T)} \int\limits_{\Omega} |F(x,t)|^2 dx > 0$$

задача (7), (3) може не мати розв'язку в класі єдиності.

Аналогічні результати отримані у §5.2, коли $\Omega = \mathbb{R}^n$.

У §5.3 отримано умови існування узагальненого розв'язку задачі (7), (3) у випадку нециліндричної області $Q_T$, яка розширюється при зростанні $t$.

У главі 6 "Мішана задача для рівняння типу коливання пластинки" в області $Q_T = \Omega \times (0,T)$ розглядається мішана задача

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u) + \sum_{|\alpha|\le 2} b_\alpha(x,t)D^\alpha u -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}(g_i(x,t)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i})_{x_i}+c(x,t)u_t=f(x,t), \qquad (10)$$

$$u\Big|_{S_T}=0, \quad \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}u\,\nu^{\alpha}\Big|_{S_T}=0, \qquad (11)$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x). \qquad (12)$$

Основним результатом цієї глави є наступна теорема.

**Теорема 11.** Нехай $D^{\alpha}a_{\alpha\beta}\in C(\bar{Q}_T)$, $|\alpha|=|\beta|=2$; $a_{\alpha\beta t}$, $a_{\alpha\beta tt}$, ($|\alpha|=|\beta|=2$), $b_{\alpha}$, $b_{\alpha t}$, $|\alpha|\le 2$, $g_i$, $g_{it}$, $g_{itt}$, $g_{ix_i}$, ($i=1,\dots,n$), $c$, $c_t\in L^{\infty}(Q_T)$; $f$, $f_t\in L^2(Q_T)$; $u_0\in H^4(\Omega)$, $u_0=0$ на $\partial\Omega$; $u_1\in H^2(\Omega)$, $u_1=0$ на $\partial\Omega$; $a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}$;

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x,t)\,\eta_\alpha\eta_\beta\ge a_0\sum_{|\alpha|=2}\eta_\alpha^2, \quad a_0>0,$$

$$\forall\eta\in\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}, \quad \forall(x,t)\in\bar{Q}_T; \quad g_i(x,t)\ge g_0>0,\ i=1,\dots,n;$$

$p\in\left[3;3+\dfrac{6-n}{n-2}\right]$, якщо $n=3,4,5$, і $p\ge 3$, якщо $n=1,2$. Тоді існує узагальнений розв'язок $u(x,t)$ задачі (10) – (12), де

$$T<\frac{2}{\omega}\ln\Big(1+\omega C(u_0,u_1,f)\Big), \quad \omega\ge\omega_0>0.$$

**Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:**

1. Лавренюк С.П. Смешанная задача для вырождающегося уравнения типа колебания пластины//Дифференциальные уравнения.– 1989.–25, N 8.–С. 1375–1383.
2. Лавренюк С.П. О существовании обобщенных решений задачи Коши для вырождающегося уравнения типа колебания пластины// Современный анализ и его приложения. Киев.–1989.– С. 93–99.
3. Лавренюк С.П. Задача Коши для сильно вырождающегося уравнения типа колебания пластины// Нелинейные граничные задачи. Киев.–1989.– N 1.–С. 64–67.

4. Лавренюк С.П. Змішана задача для майже лінійного гіперболічного рівняння з виродженням// Вісник Львів. ун–ту. Сер. мех-мат.–1990.– вип. 34.– С. 34–36.
5. Лавренюк С.П. Про задачу без початкових умов для рівняння типу коливання пластинки//Доповіді АН УРСР. Сер. А.–1990.– N 6.– С. 26–28.
6. Лавренюк С.П. Задача для одного эволюционного уравнения в полуограниченном по времени цилиндре//Украинский математический журнал.–1990.–42, N 11.– С. 1481–1486.
7. Лавренюк С.П. Про одну змішану задачу для рівняння типу коливання пластинки//Доповіді АН УРСР. Сер. А.–1991.–N 7.– С. 23–25.
8. Лавренюк С.П. Змішана задача для рівняння типу коливання пластинки, що сильно вироджується //Вісник Львів. ун–ту. Сер. мех–мат.–1991.–вип. 36.– С. 3–5.
9. Лавренюк С.П. Задача Коши для вырождающегося уравнения типа колебания пластины// Математические методы и физикимеханические поля.– 1990.– N 32. – С. 79–81.
10. Лавренюк С.П. Смешанная задача для уравнения типа колебания пластины, вырождающегося в конечный момент времени// Дифференциальные уравнения.–1991.– 27, N 12.– С. 2099–2106.
11. Лавренюк С.П. Змішана задача для однієї слабо виродженої системи// Доповіді АН України. Матем., природозн., техн. науки.– 1993.– N 5. – С. 18–20.
12. Лавренюк С.П. Змішана задача з видозміненими початковими умовами для однієї еволюційної системи, яка вироджується у початковий момент часу // Доповіді АН України. Матем., природозн., техн. науки.–1993.– N 6. – С. 12–15.
13. Лавренюк С.П. Задача без начальных условий для одной эволюционной системы. Условия единственности// Нелинейные граничные задачи. – 1993. – N 5. – С. 53–58.
14. Лавренюк С.П. Смешанная задача для сильно вырождающейся эволюционной системы// Дифференциальные уравнения.– 1994. – 30, N 8. – С. 1405 – 1411.
15. Лавренюк С.П. Задача без початкових умов для однієї еволюційної системи з другою похідною за часом // Доповіді НАН України. Матем., природозн., техн. науки.–1995.– N 7. – С. 8–11.

Лавренюк С.П. Задачи для вырождающихся эволюционных систем, содержащих вторую производную по времени.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. Львовский государственный университет им. Ив. Франко. Львов, 1995.
Защищается 15 научных работ, которые содержат теоретические исследования по теории эволюционных систем, вырождающихся на плоскости задания начальных данных, а также в конечный момент времени. Найдены эффектисные условия установления классов корректности смешанных задач, которые определяются коэффициентами и правыми частями линейных и слабо нелинейных систем. Получены условия корректности задачи Фурье для слабо нелинейных эволюционных систем, а также условия существования нелинейного уравнения типа поперечных колебаний стержня.

Lavrenjuk S.P. The problems for degenerated evolution systems with second order time derivative.

Doctor of Science Thesis (Physics and Mathematics), specialization – differential equations. Lviv State University, Lviv, 1995.
15 scientific papers containing theoretical studies on the theory of evolution systems degenerated on the plane of initial data and also in the final moment of time are defended. Effective criterions of classes the well-posed mixed problems were found, which are defined by coefficients and right parts of linear and halflinear systems. Conditions of well-posed Fourier problem for halflinear evolution systems and also conditions of the solution existence of the nonlinear equation of beam transversal oscilations type were obtained.

Ключові слова:
**узагальнений розв'язок, мішана задача, вироджена еволюційна система, задача Фур'є, варіаційні нерівності.**

ПІдписано до друку 30.10.95. Формат 60х84/16. Папір друк. № 1.
Друк.офсетн.Умовн.друк.арк.1,5.Умовн.фарб.відб.1,5.
Обл.вид.арк.1,6. Тираж 100. Зам. 273.
Машинно-офсетна лабораторІя ЛьвІвського держунІверситету
Ім. І.Франка. 290602 ЛьвІв, вул.УнІверситетська,1.