

Національна академія наук України  
Інститут математики

На правах рукопису

**ЧЕРКАСЕНКО Вадим Павлович**

# **СИМЕТРІЯ ТА РЕДУКЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ФОККЕРА-ПЛАНКА**

01.01.03 – математична фізика

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 1995

3:51

АВ 33.399

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

ЛНБ України ім.В.Стефаника

Науковий керівник:



00761343 (O)

Офіційні опоненти: доктор фіз.-мат. наук,  
професор ЛОПАТИН О.К.

кандидат фіз.-мат. наук,  
доцент СТОГНІЙ В.І.

Провідна організація: Київський Національний університет  
ім. Тараса Шевченка.

Захист відбудеться 5 грудня 1995 р. о 15<sup>00</sup> годині  
на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.66.02  
при Інституті математики НАН України за адресою:  
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська 3.

ЛНБ ім. В. Стеф.  
АН України

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту.

Автореферат розісланий 3 листопада 1995 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої ради  
доктор фіз.-мат. наук

ЛУЧКА А.Ю

## Загальна характеристика роботи

**Актуальність теми.** Диференціальні рівняння, що описують фізичні процеси, як правило, мають широку симетрію. Наявність симетрії може бути одним з критеріїв вибору оптимальної математичної моделі серед деякої множини рівнянь. Особливу актуальність і ефективність набувають методи симетрійного аналізу для нелінійних рівнянь, для яких важко використати класичні методи математичної фізики. Великі можливості класифікації та побудови точних розв'язків рівнянь математичної фізики відкривають започатковані в роботах Софуса Лі теоретико-алгебраїчні методи, які останнім часом швидко розвиваються і широко застосовуються (Л.В. Овсянніков, П. Олвер, Н.Х. Ібрагімов, В.І. Фушчич).

Дисертація присвячена дослідженню симетрійних властивостей нелінійних рівнянь типу Фоккера-Планка. Лінійне рівняння Фоккера-Планка (РФП) лежить в основі теорії марковських процесів. Воно широко застосовується в природничих науках: фізиці, біології, хімії, медицині. З математичної точки зору варто відзначити, що апарат теорії ймовірностей не дає змоги будувати класи точних розв'язків РФП. Тому доцільно застосовувати до його дослідження методи інших галузей математики, зокрема симетрійного аналізу.

Результати, отримані в дисертації, лежать в руслі досліджень, що проводяться у відділі прикладних досліджень Інституту математики НАН України.

**Мета роботи.** Дослідження симетрії нелінійних рівнянь типу Фоккера-Планка. Знаходження додаткових диференційних умов, які розширюють симетрію РФП. Побудова анзаців та редукція нелінійного РФП. знаходження класів його точних розв'язків.

**Загальна методика досліджень.** В роботі використовуються теоретико-алгебраїчні методи математичної фізики, методи теорії диференційних рівнянь.

**Наукова новизна.** Основні результати, отримані в дисертації, такі:

- досліджена лівська та умовна симетрія нелінійного узагальнення багатовимірного рівняння Фоккера-Планка з постійним коефіцієнтом дифузії. Описані умови на розв'язки РФП, при яких досягається галілей-інваріантність цього рівняння. Побудовані анзаці, проведена редукція багатовимірних рівнянь до ЗДР та рів-

### Вопросы теории и практики работы с детьми

Анализ работы с детьми в дошкольных учреждениях показывает, что в настоящее время наблюдается тенденция к усилению роли игры в воспитании детей. Это связано с тем, что игра является естественной формой деятельности ребенка, способствующей его развитию и формированию личности. В настоящее время в дошкольных учреждениях широко используются различные виды игр: сюжетно-ролевые, дидактические, строительные, спортивные и т.д. Однако в последнее время наблюдается тенденция к усилению роли дидактических игр, что не всегда соответствует интересам детей.

В настоящее время в дошкольных учреждениях широко используются различные виды игр: сюжетно-ролевые, дидактические, строительные, спортивные и т.д. Однако в последнее время наблюдается тенденция к усилению роли дидактических игр, что не всегда соответствует интересам детей. В настоящее время в дошкольных учреждениях широко используются различные виды игр: сюжетно-ролевые, дидактические, строительные, спортивные и т.д. Однако в последнее время наблюдается тенденция к усилению роли дидактических игр, что не всегда соответствует интересам детей.

В настоящее время в дошкольных учреждениях широко используются различные виды игр: сюжетно-ролевые, дидактические, строительные, спортивные и т.д. Однако в последнее время наблюдается тенденция к усилению роли дидактических игр, что не всегда соответствует интересам детей. В настоящее время в дошкольных учреждениях широко используются различные виды игр: сюжетно-ролевые, дидактические, строительные, спортивные и т.д. Однако в последнее время наблюдается тенденция к усилению роли дидактических игр, что не всегда соответствует интересам детей.

В настоящее время в дошкольных учреждениях широко используются различные виды игр: сюжетно-ролевые, дидактические, строительные, спортивные и т.д. Однако в последнее время наблюдается тенденция к усилению роли дидактических игр, что не всегда соответствует интересам детей. В настоящее время в дошкольных учреждениях широко используются различные виды игр: сюжетно-ролевые, дидактические, строительные, спортивные и т.д. Однако в последнее время наблюдается тенденция к усилению роли дидактических игр, что не всегда соответствует интересам детей.

нянь з меншою кількістю змінних. Знайдені класи точних розв'язків багатовимірного РФП;

- вивчена лівська та умовна симетрія одновимірного РФП зі змінним коефіцієнтом дифузії та нелінійністю. Використовуючи умовну симетрію, побудовані анзаці, проведена редукція до ЗДР та одержані класи точних розв'язків одновимірного РФП;
- вивчена симетрія одновимірного РФП з потенціалом. Встановлена умовна галілей-інваріантність такого рівняння. З використанням одержаних операторів побудовані анзаці, проведена редукція та одержані класи точних розв'язків РФП з потенціалом.

$$m + m_0 v^2 + m_0^2 v^4 - \frac{H}{2} \Delta p = f(p). \quad (3)$$

**Георетична і практична цінність.** Дисертаційна робота носить георетичний характер. Всі основні результати, отримані в дисертації, є новими і можуть бути використані для розв'язування прикладних задач математичної фізики, газодинаміки та гідродинаміки.

**Апробація роботи.** Результати, викладені в дисертації, доповідались на семінарах відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України, на міжнародній конференції "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" та на наукових конференціях професорсько-викладацького складу Миколаївського державного педагогічного інституту.

**Публікації.** Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1-4].

**Структура і об'єм роботи.** Дисертаційна робота складається з вступу, трьох розділів, висновків та списку використаної літератури. Об'єм роботи – 91 сторінка машинописного тексту.

## Зміст роботи

У вступі обгрунтовано актуальність теми, проведений короткий гляд робіт по темі дисертації. Сформульовані основні поняття та визначення, що використовуються в роботі. Зроблено короткий опис змісту та результатів дисертації.

**Розділ I** присвячений дослідженню багатовимірного нелінійного уза-

$$\nabla_{\alpha}^2 \Delta u + \frac{1}{2} \epsilon_{00}^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} u + \frac{1}{2} \epsilon_{00}^{\alpha\beta} \nabla_{\beta} u, \quad \text{div } F = c p^2 \quad (c \neq 0);$$

...визначення та розробки програмних продуктів, що забезпечують функціонування системи управління підприємством.

...розробки програмних продуктів, що забезпечують функціонування системи управління підприємством. Це включає в себе розробку алгоритмів, програмних кодів, тестування та документування програмних продуктів.

...розробки програмних продуктів, що забезпечують функціонування системи управління підприємством. Це включає в себе розробку алгоритмів, програмних кодів, тестування та документування програмних продуктів.

...розробки програмних продуктів, що забезпечують функціонування системи управління підприємством. Це включає в себе розробку алгоритмів, програмних кодів, тестування та документування програмних продуктів.

...розробки програмних продуктів, що забезпечують функціонування системи управління підприємством. Це включає в себе розробку алгоритмів, програмних кодів, тестування та документування програмних продуктів.

...розробки програмних продуктів, що забезпечують функціонування системи управління підприємством. Це включає в себе розробку алгоритмів, програмних кодів, тестування та документування програмних продуктів.

### Зміст роботи

...розробки програмних продуктів, що забезпечують функціонування системи управління підприємством. Це включає в себе розробку алгоритмів, програмних кодів, тестування та документування програмних продуктів.

гальнення РФП з постійним коефіцієнтом дифузії

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (A_k \rho) + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} (B_{ik} \rho) + F(\rho), \quad (1)$$

де  $\rho(t, \vec{x})$ ,  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $A_k(t, \vec{x})$ ,  $F(\rho)$  — гладкі дійсні функції, а

$$B_{ik}(t, \vec{x}) = B \delta_{ik}. \quad (2)$$

З'ясоване питання про ліівську симетрію рівняння (1), вважаючи  $A_k(t, \vec{x}) \equiv v^k$  невідомими функціями. Тоді (1), враховуючи (2), запишеться у вигляді

$$\rho_0 + \rho_a v^a + \rho v_a^a - \frac{B}{2} \Delta \rho = F(\rho). \quad (3)$$

**Теорема 1** Рівняння (3) інваріантне відносно таких нескінченно-вимірних алгебр:

1.  $A = \langle G^a, J_{ab}^*, Q^a \rangle$ , де  $G^a = r^a(x_0) \partial_a + r_0^a(x_0) \partial_{v^a}$ ,

$$\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad \partial_{v^a} \equiv \frac{\partial}{\partial v^a}, \quad r_0^a(x_0) \equiv \frac{dr_a(x_0)}{dx_0}, \quad (4)$$

$$J_{ab}^* = h^{ab}(x_0) [x_b \partial_a - x_a \partial_b + v^b \partial_{v^a} - v^a \partial_{v^b}] + h_0^{ab}(x_0) (x_b \partial_{v^a} - x_a \partial_{v^b}),$$

$$Q^a = \rho^{-1} s^a(x_0, x_b) \partial_{v^a} \quad (b = \overline{1, n}, b \neq a), \text{ для довільної } F(\rho);$$

2.  $A_1 = \langle A, X_1 \rangle$ , де  $X_1 = e^{cx_0} \rho \partial_\rho$ , для  $F = c \rho \ln \rho$ ;

3.  $A_2 = \langle A, D \rangle$ , де оператор масштабних перетворень  $D$  має вигляд  $D = 2x_0 \partial_0 + x_a \partial_a + k \rho \partial_\rho - v^a \partial_{v^a}$ , для  $F = c \rho^{1-\frac{1}{k}}$  ( $k \neq 0, k \neq 2$ );

4.  $A_3 = \langle A_2, P \rangle$ , де оператор проєктивних перетворень  $P$  має вигляд  $P = x_0^2 \partial_0 + x_0 x_a \partial_a - n x_0 \rho \partial_\rho + x_a \partial_{v^a}$ , для  $F = c \rho^{1+\frac{2}{n}}$ ;

5.  $A_4 = \langle A_2, X_2 \rangle$ ,

$$\text{де } X_2 = \xi^0(x_0) \partial_0 + \frac{1}{2} \xi_0^0 x^a \partial_a - \frac{1}{2} \xi_0^0 \rho \partial_\rho - \frac{1}{2} \xi_0^0 v^a \partial_{v^a} + \frac{1}{2} \xi_{00}^0 x^a \partial_{v^a},$$

для  $F = c \rho^3$  та  $n = 1$ ;

6.  $A_5 = \langle A_2, X_3 \rangle$ ,

$$\text{де } X_3 = \xi^0(x_0) \partial_0 + \frac{1}{2} \xi_0^0 x^a \partial_a - \frac{\xi_0^0 \rho \partial_\rho}{8c} - \frac{2-n}{8c} \xi_{00}^0 \partial_\rho - \frac{1}{2} \xi_0^0 v^a \partial_{v^a} + \frac{1}{2} \xi_{00}^0 x^a \partial_{v^a} + \frac{2-n}{8c} \xi_{00}^0 \rho^{-1} v^a \partial_{v^a} + \frac{2-n}{8c} \xi_{000}^0 x^a \rho^{-1} v^a \partial_{v^a}, \text{ для } F = c \rho^2 \quad (c \neq 0);$$



7.  $A_6 = (A_2, I, X_4, X_5)$ , де  $I = \rho \partial_\rho$ ,

$$X_4 = \xi^0(x_0) \partial_0 + \frac{1}{2} \xi_0^0 x^a \partial_a - \frac{n}{2} \xi_0^0 \rho \partial_\rho - \frac{1}{2} \xi_0^0 v^a \partial_{v_a} + \frac{1}{2} \xi_{00}^0 x^a \partial_{v_a},$$

$$X_5 = \rho^{-1} [f(x_0, x_a) v^a \partial_{v_a} - f \rho \partial_\rho + z^a(x_0, x_a) \partial_{v_a}], \text{ для } F(\rho) = 0,$$

де  $r^a(x_0)$ ,  $h^{ab}(x_0)$ ,  $s^a(x_0, x_b)$ ,  $p^a(x_0, x_b)$ ,  $\xi^0(x_0)$ ,  $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$  — довільні гладкі функції,  $z^a = \int (f_0(x) - \frac{B}{4} \Delta f) dx_a$ .

Для рівнянь, подібних до розглядуваного, В.І.Фушичем було запропоновано підхід, що відкриває широкі можливості для застосування симетрійних методів. Мова йде про доповнення (1) одним або кількома рівняннями, які повинні задовольняти функції  $A_k(t, \vec{x})$  та  $B_{ik}(t, \vec{x})$  і які розширюють симетрію заданого рівняння. Система рівнянь, що одержується при цьому, вже не є лінійною навіть при  $F(\rho) = 0$ , тобто для класичного РФП, і може мати нетривіальну симетрію.

В другому параграфі досліджується умовна симетрія РФП з нелінійністю. Вважаємо, що  $A_k$  задовольняють умови

$$A_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (4)$$

РФП з постійним коефіцієнтом дифузії за умови (4), тобто рівняння

$$\rho_0 + \rho_a \varphi_a + \rho \Delta \varphi - \frac{B}{2} \Delta \rho = F(\rho), \quad (5)$$

інваріантне відносно нескінченновимірних алгебр симетрії. Тому потрібно накладати додаткові умови на  $\varphi$ . Поставимо вимогу, щоб коефіцієнтні функції  $A_k$  задовольняли рівняння Ейлера для ідеальної рідини

$$\frac{\partial A_k}{\partial t} + A_e \frac{\partial A_k}{\partial x_e} = F_k(\rho). \quad (6)$$

З врахуванням (4) відповідна умова на  $\varphi$  буде мати вигляд рівняння Гамільтона-Якобі

$$\varphi_0 + \frac{1}{2} \varphi_a \varphi_a = F_1(\rho). \quad (7)$$

**Теорема 2** Система рівнянь (5), (7) при  $B \neq 0$  інваріантна відносно таких алгебр:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= (A_1, T, X_1, X_2, X_3) \text{ да } I = \rho_0 \\
 \lambda_2 &= \left( \frac{1}{2} \rho_0^2 \rho_1 + \frac{1}{2} \rho_0^2 \rho_2 \right) \\
 \lambda_3 &= \left( \frac{1}{2} \rho_0^2 \rho_1 - \frac{1}{2} \rho_0^2 \rho_2 \right) \\
 \lambda_4 &= \left( \frac{1}{2} \rho_0^2 \rho_1 + \frac{1}{2} \rho_0^2 \rho_2 \right) \\
 \lambda_5 &= \left( \frac{1}{2} \rho_0^2 \rho_1 - \frac{1}{2} \rho_0^2 \rho_2 \right)
 \end{aligned}$$

Для решения подобных допустимых в Р. Фурье допустимых пропорциональных величин, мы должны использовать для этого следующие соотношения:  $\lambda_1 = \rho_0$ ,  $\lambda_2 = \frac{1}{2} \rho_0^2 \rho_1 + \frac{1}{2} \rho_0^2 \rho_2$ ,  $\lambda_3 = \frac{1}{2} \rho_0^2 \rho_1 - \frac{1}{2} \rho_0^2 \rho_2$ ,  $\lambda_4 = \frac{1}{2} \rho_0^2 \rho_1 + \frac{1}{2} \rho_0^2 \rho_2$ ,  $\lambda_5 = \frac{1}{2} \rho_0^2 \rho_1 - \frac{1}{2} \rho_0^2 \rho_2$ .

В результате преобразования получим следующие соотношения:

$$(4) \quad A_1 = \frac{\rho_0}{\rho_1}, \quad k = I, n.$$

Р. Ф. с постоянным коэффициентом диффузии  $\rho_0$ , тогда решение

$$(5) \quad \rho_0 + \rho_0 \rho_1 + \rho_0 \rho_2 - \frac{\rho_0}{2} \rho_1 - \frac{\rho_0}{2} \rho_2 = F(\rho)$$

при этом можно получить следующие соотношения:  $\rho_0 = \frac{1}{2} \rho_1 + \frac{1}{2} \rho_2$ ,  $\rho_1 = \frac{1}{2} \rho_0 + \frac{1}{2} \rho_2$ ,  $\rho_2 = \frac{1}{2} \rho_0 + \frac{1}{2} \rho_1$ .

$$(6) \quad \frac{\partial A_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \rho_2} = F(\rho)$$

при этом можно получить следующие соотношения:  $\rho_0 = \frac{1}{2} \rho_1 + \frac{1}{2} \rho_2$ ,  $\rho_1 = \frac{1}{2} \rho_0 + \frac{1}{2} \rho_2$ ,  $\rho_2 = \frac{1}{2} \rho_0 + \frac{1}{2} \rho_1$ .

$$(7) \quad \rho_0 + \frac{1}{2} \rho_0 \rho_1 = F(\rho)$$

при этом можно получить следующие соотношения:  $\rho_0 = \frac{1}{2} \rho_1 + \frac{1}{2} \rho_2$ ,  $\rho_1 = \frac{1}{2} \rho_0 + \frac{1}{2} \rho_2$ ,  $\rho_2 = \frac{1}{2} \rho_0 + \frac{1}{2} \rho_1$ .

1.  $AG(1, n) = \langle P_0, P_a, J_{ab}, G_a, Q \rangle$ ,  
де  $G_a = x_0 P_a + x_a Q$ ,  $Q = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ , для довільних  $F, F_1$ ;
2.  $AG_1(1, n) = \langle AG(1, n), D \rangle$ , для  $F = \lambda \rho^{k+1}$ ,  $F_1 = \lambda_1 \rho^k$ ,  $k \neq 0$ ;
3.  $AG_2(1, n) = \langle AG_1(1, n), A \rangle$ , де оператор проєктивних перетворень  $A$  має вигляд  
 $A = x_0^2 P_0 + x_a x_a P_a + \frac{x^2}{2} Q - n x_0 I$ , для  $F = \lambda \rho^{\frac{2}{n}+1}$ ,  $F_1 = \lambda_1 \rho^{\frac{2}{n}}$ ;
4.  $AG_3(1, n) = \langle AG(1, n), B \rangle$ , де оператор  $B$  має вигляд  
 $B = I + \lambda_1 x_0 Q$ , для  $F_1 = \lambda_1 \ln \rho$ ,  $F = 0$ ;
5.  $AG_4(1, n) = \langle AG(1, n), C \rangle$ , де оператор  $C$  має вигляд  
 $C = \exp\{\lambda x_0\} (\frac{\lambda}{\lambda} Q + I)$ , для  $F = \lambda \rho \ln \rho$ ,  $F_1 = \lambda_1 \ln \rho$ ,  $\lambda \neq 0$ ;
6.  $AG_5(1, n) = \langle AG_2(1, n), I \rangle$ , для  $F = F_1 = 0$ ,  
де  $\lambda_i$  - довільні дійсні постійні,  $i = 1, 2$ .

Одержані в теоремі 2 алгебри дають змогу будувати анзаци та знаходити розв'язки РФП. Виявляється, що можливо добитись значного розширення симетрії цього рівняння подальшим накладанням умов на функції, що в нього входять. Умова, що дозволяє це зробити, має вигляд

$$\Delta \rho = F_2(\rho). \quad (8)$$

Відповідна теорема сформульована в дисертації; ми тут зазначимо, що в ній фігурують оператори  $Q_1 = x_a P_a + 2\varphi Q$ ,  $Q_2 = x_0 P_0 - \varphi Q$ , їх лінійні комбінації між собою та з оператором  $I$ , а також оператори  $B, C$  та  $C_0 = \exp(\lambda x_0) I$ .

Крім оператора  $G_a$ , рівняння (5) має і інші галілеївські оператори умовної симетрії. Накладемо на  $\varphi$  умову

$$\varphi_0 + \frac{1}{2} \varphi_a \varphi_a = b \varphi + F^3(\rho). \quad (9)$$

**Теорема 3 Система рівнянь (5), (9) для довільних  $F, F_3$  інваріантна відносно алгебри**

1.  $AG'(1, n) = \langle P_0, P_a, J_{ab}, G_a^e, Q^e \rangle$ , де  $G_a^e = e^{bx_0} (P_a + b x_a Q)$ ,  
 $Q^e = e^{bx_0} Q$ , для довільних  $F, F_3$ . Система (5), (9) інваріантна відносно алгебри

$$1. AG_1(I, n) = (R_1, R_2, \dots, R_n, Q_1) \text{ де } G_1 = x_1^2 R_1 + x_2^2 R_2 + \dots + x_n^2 R_n + Q_1 \text{ де } R_i \text{ та } Q_1 \text{ — деякі многочлики.}$$

$$2. AG_2(I, n) = (R_1, R_2, \dots, R_n, D), \text{ де } R_i = \lambda^2 R_i^{(1)}, \text{ де } R_i^{(1)} = \lambda^2 R_i, \text{ де } R_i \neq 0.$$

$$3. AG_3(I, n) = (R_1, R_2, \dots, R_n, A), \text{ де } R_i = \lambda^2 R_i^{(1)}, \text{ де } R_i^{(1)} = \lambda^2 R_i, \text{ де } R_i \neq 0.$$

$$A = x_1^2 R_1 + x_2^2 R_2 + \dots + x_n^2 R_n + Q_1, \text{ де } R_i = \lambda^2 R_i^{(1)}, \text{ де } R_i^{(1)} = \lambda^2 R_i, \text{ де } R_i \neq 0.$$

$$4. AG_4(I, n) = (R_1, R_2, \dots, R_n, B), \text{ де } R_i = \lambda^2 R_i^{(1)}, \text{ де } R_i^{(1)} = \lambda^2 R_i, \text{ де } R_i \neq 0.$$

$$B = 1 + \lambda^2 R_1 + \lambda^2 R_2 + \dots + \lambda^2 R_n, \text{ де } R_i = \lambda^2 R_i^{(1)}, \text{ де } R_i^{(1)} = \lambda^2 R_i, \text{ де } R_i \neq 0.$$

$$5. AG_5(I, n) = (AG_1(I, n), C), \text{ де } R_i = \lambda^2 R_i^{(1)}, \text{ де } R_i^{(1)} = \lambda^2 R_i, \text{ де } R_i \neq 0.$$

$$C = \exp(\lambda x_1) \left( \frac{x_1}{2} Q_1 + 1 \right), \text{ де } R_i = \lambda^2 R_i^{(1)}, \text{ де } R_i^{(1)} = \lambda^2 R_i, \text{ де } R_i \neq 0.$$

$$6. AG_6(I, n) = (AG_2(I, n), F), \text{ де } R_i = \lambda^2 R_i^{(1)}, \text{ де } R_i^{(1)} = \lambda^2 R_i, \text{ де } R_i \neq 0.$$

$$\text{де } F = \exp(\lambda x_1) \left( \frac{x_1}{2} Q_1 + 1 \right), \text{ де } R_i = \lambda^2 R_i^{(1)}, \text{ де } R_i^{(1)} = \lambda^2 R_i, \text{ де } R_i \neq 0.$$

Оскільки в теоремі 3 згадані деякі многочлики, то можна сказати, що ці многочлики можна вибрати так, щоб вони були многочликами, які не залежать від параметра  $\lambda$ . Тоді можна сказати, що ці многочлики можна вибрати так, щоб вони були многочликами, які не залежать від параметра  $\lambda$ .

$$(8) \quad \lambda^2 R_i = R_i^{(1)}$$

Тоді можна сказати, що ці многочлики можна вибрати так, щоб вони були многочликами, які не залежать від параметра  $\lambda$ . Тоді можна сказати, що ці многочлики можна вибрати так, щоб вони були многочликами, які не залежать від параметра  $\lambda$ .

Крім операторів  $G_i$ , рівняння (8) має і інші тавтологічні оператори

$$(9) \quad \lambda^2 R_i + \frac{1}{2} R_i^{(1)} = R_i + R_i^{(1)}$$

Оскільки в системі рівнянь (8) та (9) деякі многочлики  $R_i$  і  $R_i^{(1)}$  зв'язані між собою, то можна сказати, що ці многочлики можна вибрати так, щоб вони були многочликами, які не залежать від параметра  $\lambda$ .

$$1. AG_1(I, n) = (R_1, R_2, \dots, R_n, Q_1), \text{ де } G_1 = x_1^2 R_1 + x_2^2 R_2 + \dots + x_n^2 R_n + Q_1.$$

$$Q_1 = \exp(\lambda x_1) \left( \frac{x_1}{2} Q_1 + 1 \right), \text{ де } R_i = \lambda^2 R_i^{(1)}, \text{ де } R_i^{(1)} = \lambda^2 R_i, \text{ де } R_i \neq 0.$$

2.  $AG_1^c(1, n) = \langle AG^c(1, n), C^c \rangle$ , де оператор  $C^c$  має вигляд  $C^c = e^{\lambda x_0} (I - \frac{\gamma}{b-\lambda} Q)$ , для  $F = \lambda \rho \ln \rho$ ,  $F^3 = \gamma \ln \rho$  ( $\lambda, \gamma = \text{const}$ ,  $\lambda \neq b$ )

3.  $AG_2^c(1, n) = \langle AG^c(1, n), S^c \rangle$ , де оператор  $S^c$  має вигляд  $S^c = e^{bx_0} (I + \gamma x_0 Q)$ , для  $F = b \rho \ln \rho$ ,  $F_3 = \gamma \ln \rho$ . (10)

Умова (8) розширює симетрію РФП і в цьому випадку; відповідна георема наведена в дисертації.

В третьому параграфі описані анзаці, побудовані з використанням вказаних в теоремах першого параграфа операторів симетрії, та системи рівнянь (звичайних або з меншою кількістю змінних), до яких вони редукують РФП з відповідними додатковими умовами. Наприклад, анзац

$\rho = f(\omega_1, \omega_2)$ ,  $\varphi = \frac{x_0 x_3}{\alpha} - \frac{x_0^3}{3\alpha^2} + g(\omega_1, \omega_2)$ ,  $\omega_1 = x_3 - \frac{x_2^2}{2\alpha}$ ,  $\omega_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$ , редукує систему (5), (7) з довільними  $F, F_1$  до системи

$$\begin{cases} 2\omega_2 f_2 g_2 + f_1 g_1 + f(g_{11} + 2g_2 + 2\omega_2 g_{22}) \\ -\frac{B}{2}(f_{11} + 2f_2 + 2\omega_2 f_{22}) = F(f), \\ \frac{\omega_1}{\alpha} + g_2^2 \omega_2 + \frac{1}{2} g_1^2 = F_1(f). \end{cases}$$

де  $f_1 \equiv \frac{\partial f}{\partial \omega_1}$ ,  $f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial \omega_1^2}$ .

В четвертому параграфі наведені класи точних розв'язків багатовимірного нелінійного РФП з постійним коефіцієнтом дифузії, що одержані при розв'язуванні редукованих систем рівнянь з третього параграфа. Наприклад, функція

$\rho = \exp \left\{ \frac{2}{\alpha} x_0 + \frac{2}{B} y(\omega_1) + \frac{2}{B} z(\omega_2) \right\}$ ,  $\omega_1 = \frac{x_2^2}{2\alpha} - x_1$ ,  $\omega_2 = (x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}$ ,

де  $z = \frac{B}{2\lambda} \left( c_3 + \frac{2}{B} \omega_1 \right)^2$ , а функція  $y$  задана неявно співвідношенням

$\pm B \left( \frac{2\lambda}{B} y + \frac{2}{\alpha} \omega_1 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{B^2}{\lambda \alpha} \ln \left| \lambda \left( \frac{2\lambda}{B} y + \frac{2}{\alpha} \omega_1 \right)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{B}{\alpha} \right| = c - \lambda \omega_1$ ,  $\{\lambda, \alpha\} \neq 0$ ,

є розв'язком РФП (1) з  $F = \frac{2}{\alpha} \rho$ ,  $A_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ ,

$\rho = \frac{\lambda}{2\alpha} x_0^2 - \frac{x_0^3}{3\alpha^2} + \frac{x_0 x_1}{\alpha} + y(\omega_1) + z(\omega_2)$ .

В другому розділі розглядається симетрія рівняння (1) для  $n = 1$  у випадку, коли коефіцієнт дифузії  $B(t, x)$  – довільна гладка функція. В першому параграфі розглянута лівська симетрія цього рівняння, якщо вважати, що густина ймовірності  $\rho(t, x)$ , коефіцієнт зносу



$A(t, x) \equiv A_1(t, x) \equiv v$  та коефіцієнт дифузії  $B(t, x) \equiv 2u$  є невідомими функціями. Тоді РФП (1) запишеться у вигляді

$$\rho_0 + v\rho_1 + v_1\rho - u_{11}\rho - 2u_1\rho_1 - u\rho_{11} = F(\rho). \quad (10)$$

Алгебра Лі симетрії рівняння (12) нескінченновимірною. Для знаходження скінченновимірних алгебр симетрії РФП у другому параграфі розглядаються умови на  $u$  та  $v$ . Накладемо такі умови:

$$v_0 + vv_1 + \mu_1v_{11} = F^1(u, v, \rho), \quad (11)$$

$$u_0 + u_1v + \mu_2v_1 = F^2(u, v, \rho). \quad (12)$$

**Теорема 4** Система рівнянь (10)–(12) при довільних  $\mu_1$  та  $\mu_2$  інваріантна відносно алгебри  $A = \langle P_0, P_1 \rangle$  для довільних  $F, F^1$  та  $F^2$ , а також відносно таких алгебр:

1.  $AG_1 = \langle A, G^1 \rangle$ , де оператор  $G^1$  має вигляд  $G^1 = x_0P_1 + \partial_v$ ,  $\partial_v \equiv \frac{\partial}{\partial v}$ , для довільної  $F$  та  $F_v^1 = F_v^2 = 0$ , де  $F_v^1 = \frac{\partial F^1}{\partial v}$ ;
2.  $AG_2 = \langle A, G^2 \rangle$ , де оператор  $G^2$  має вигляд  $G^2 = \exp(\gamma x_0)(\partial_1 + \gamma \partial_v)$ , для довільної  $F$  та  $F_v^1 = \gamma$ ,  $F_v^2 = 0$  ( $\gamma = \text{const}$ );
3.  $A_1 = \langle A, D^1 \rangle$  де оператор масштабних перетворень  $D^1$  має вигляд  $D^1 = 2x_0P_0 + x_1P_1 - v\partial_v$ , для  $F = 0$ ,  $F^1 = v^3f(u, \rho)$ ,  $F^2 = v^2g(u, \rho)$ , де  $f$  і  $g$  – довільні гладкі функції;
4.  $A_2 = \langle A, D^1 + kI \rangle$ ,  $I = \rho d_\rho$ , для  $F = \lambda\rho^{1-\frac{1}{k}}$ ,  $F^1 = v^3f(\rho v^k, u)$ ,  $F^2 = v^2g(\rho v^k, u)$  ( $k \neq 0$ );
5.  $A_3 = \langle A, \exp(bx_0)I \rangle$ , для  $F = b\rho \ln \rho$ ,  $F_\rho^1 = F_\rho^2 = 0$ ;
6.  $AG_3 = \langle AG_1, \exp(bx_0)I \rangle$ , для  $F = b\rho \ln \rho$ ,  $F_v^1 = F_\rho^1 = F_v^2 = F_\rho^2 = 0$ ;
7.  $AG_4 = \langle AG_2, \exp(bx_0)I \rangle$ , для  $F = b\rho \ln \rho$ ,  $F_v^1 = \gamma$ ,  $F_v^2 = F_\rho^1 = F_\rho^2 = 0$ ;
8.  $AG_5 = \langle AG_1, D^1 + kI \rangle$ , для  $F = \lambda\rho^{1-\frac{1}{k}}$ ,  $F^1 = \rho^{-\frac{1}{k}}f(u)$ ,  $F^2 = \rho^{-\frac{1}{k}}g(u)$ ;
9.  $A_4 = \langle A_1, I \rangle$ , для  $F = 0$ ,  $F^1 = v^3f(u)$ ,  $F^3 = v^2g(u)$ ;

визначення. Для функції  $B(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  маємо

$$(10) \quad u + v + w + x + y + z = 1$$

де  $u, v, w, x, y, z$  — частини розбиття. Для функції  $B(x)$  маємо

$$(11) \quad u + v + w + x + y + z = 1$$

$$(12) \quad u + v + w + x + y + z = 1$$

Враховуючи умови (10)-(12) при визначенні  $F_1, F_2$  та  $F_3$  маємо

$$1. AG_1 = (A, G_1) \text{ де оператор } G_1 \text{ має вигляд } G_1 = x^2 F_1 + G_1 \text{ маємо}$$

$$2. AG_2 = (A, G_2) \text{ де оператор } G_2 \text{ має вигляд } G_2 = \exp(x^2) G_2 \text{ маємо}$$

$$3. A_1 = (A, D_1) \text{ де оператор } D_1 \text{ має вигляд } D_1 = x^2 F_1 + G_1 \text{ маємо}$$

$$4. A_2 = (A, D_2 + K_1) \text{ де } F_1 = x^2 F_1, F_2 = x^2 F_2 \text{ маємо}$$

$$5. A_3 = (A, \exp(x^2) F_1) \text{ де } F_1 = x^2 F_1, F_2 = x^2 F_2 \text{ маємо}$$

$$6. AG_3 = (AG_1, \exp(x^2) F_1) \text{ де } F_1 = x^2 F_1, F_2 = x^2 F_2 \text{ маємо}$$

$$7. AG_4 = (AG_2, \exp(x^2) F_1) \text{ де } F_1 = x^2 F_1, F_2 = x^2 F_2 \text{ маємо}$$

$$8. AG_5 = (AG_3 + K_1) \text{ де } F_1 = x^2 F_1, F_2 = x^2 F_2 \text{ маємо}$$

10.  $AG_6 = \langle AG_1, D^2 \rangle$ , де оператор  $D^2$  має вигляд  $D^2 = D^1 + m(x_0^2 P_1 + 2x_0 \partial_v)$ , для  $F = 0$ ,  $F^2 = 0$ ,  $F^1 = \frac{2m}{3}$  ( $m = \text{const}$ );

11.  $A_5 = \langle A, D^1 + mG^1 \rangle$ , для  $F = 0$ ,  $F^1 = (v - m)^3 f(u, \rho)$ ,  $F^2 = (v - m)^2 g(u, \rho)$ ;

12.  $A_6 = \langle A, D^1 + mG^1 + kI \rangle$ , для  $F = \lambda \rho^{1-\frac{2}{k}}$ ,  $F^1 = (v - m)^3 f(\rho(v - m)^k, u)$ ,  $F^2 = (v - m)^2 g(\rho(v - m)^k, u)$ ;

13.  $AG_7 = \langle AG_1, D^2 + kI \rangle$ , для  $F = \lambda \rho^{1-\frac{2}{k}}$ ,  $F^1 = \frac{2m}{3} + \lambda_1 \rho^{-\frac{3}{k}}$ ,  $F^2 = \lambda_2 \rho^{-\frac{2}{k}}$ .

В дисертації доведені ще дві теореми про умовну інваріантність РФП з подібними до (11), (12) умовами.

Вважатимемо тепер, що коефіцієнт зносу  $A(t, x)$  є похідна відносно  $x_1$  деякої функції  $\varphi$ ; тоді рівняння (12) перепишеться у вигляді

$$\rho_0 + \rho_1 \varphi_1 + \rho \varphi_{11} - \rho u_{11} - 2u_1 \rho_1 - u \rho_{11} = F(\rho). \quad (13)$$

На функцію  $\varphi$  накладемо диференційну умову у вигляді рівняння Гамільтона - Якобі

$$\varphi_0 + \frac{1}{2} \varphi_1 \varphi_1 = F_1(\rho). \quad (14)$$

На функцію  $u$  накладемо умову

$$u_0 + u_1 \varphi_1 = F_2(\rho). \quad (15)$$

**Теорема 5** Система рівнянь (13) - (15) інваріантна відносно алгебр:

1.  $AG = \langle P_0, P_1, Q, G \rangle$ , де  $Q = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ ,  $G = x_0 P_1 + x_1 Q$ , для довільних  $F(\rho)$ ,  $F_1(\rho)$ ,  $F_2(\rho)$ ;

2.  $AG_{20} = \langle AG, Q_5 \rangle$ , де оператор  $Q_5$  має вигляд  $Q_5 = x_1 P_1 + 2\varphi Q + 2u \partial_u$ , для довільної  $F$  та  $F_1 = F_2 = 0$ ;

3.  $AG_{21} = \langle AG, Q_5 + kI \rangle$ , для  $F = \lambda \rho$ ,  $F_1 = \lambda_1 \rho^{2/k}$ ,  $F_2 = \lambda_2 \rho^{2/k}$ ;

4.  $AG_{22} = \langle AG, Q_6 \rangle$ , де оператор  $Q_6$  має вигляд  $Q_6 = x_0 P_0 + x_1 P_1 + \varphi Q + u \partial_u$ , для  $F = 0$  та довільних  $F_1, F_2$ ;

5.  $AG_{23} = \langle AG, Q_6 + kI \rangle$ , для  $F = \lambda \rho^{1-\frac{1}{k}}$ ,  $F_1 = F_2 = 0$  ( $k \neq 0$ );

$$AG_0 = (AG_1, D_2), \text{ де оператор } D_2 \text{ має вигляд } D_2 = D^2 + m(x_2^2 P^2 + 2x_2 Q_2), \text{ для } F_1 = 0, F_2 = \frac{2m}{x_2} (m = \text{const});$$

$$AG_1 = (A, D^2 + mG_1), \text{ для } F_1 = 0, F_2 = (u - m)^2 f(u, v), F_3 = (u - m)^2 g(u, v);$$

$$AG_2 = (A, D^2 + mG_2 + kI), \text{ для } F_1 = \lambda v^{l-1}, F_2 = (u - m)^2 g(u - m, v), F_3 = (u - m)^2 f(u, v);$$

$$AG_3 = (AG_1, D^2 + kI), \text{ для } F_1 = \lambda v^{l-1}, F_2 = \frac{2m}{x_2} + \lambda v^{l-1}, F_3 = \lambda v^{l-1}.$$

В лінійній теорії на дві теорії про умову інваріантності  $D_1$  є подібним до (11), (12) зовсім.

Важливо теорію про коефіцієнт  $\lambda(x)$  є похідна відносно  $x$ , деякої функції  $\tilde{f}$ ; тоді рівняння (12) переписується у вигляді

$$\lambda^2 + v^2 \lambda + v^2 \lambda - v^2 \lambda - v^2 \lambda - v^2 \lambda = \tilde{f}(v). \quad (13)$$

Функцію  $\tilde{f}$  в залежності від умову у вигляді рівняння Лагранжа - Рунге

$$\lambda^2 + \frac{1}{2} v^2 \lambda = \tilde{f}(v). \quad (14)$$

Функція  $\tilde{f}$  в залежності від умову

$$\lambda^2 + v^2 \lambda = F_2(v). \quad (15)$$

Лема 2. Слідом з лемми (13) і (15) інваріантність відносно  $D_2$

$$AG = (A, P_1, Q_1, G), \text{ де } Q = \frac{2m}{x_2}, G = 2vP_1 + x_1Q, \text{ має вигляд}$$

$$F_1(v), F_2(v), F_3(v);$$

$$AG_1 = (AG, Q_2), \text{ де оператор } Q_2 \text{ має вигляд } Q_2 = x_1 P_1 + 2vQ + 2vP_1, \text{ для деякої } F, \text{ то } F_1 = F_2 = 0;$$

$$AG_2 = (AG, Q_2 + kI), \text{ для } F_1 = \lambda v^l, F_2 = \lambda v^l, F_3 = \lambda v^{l-1};$$

$$AG_3 = (AG, Q_2), \text{ де оператор } Q_2 \text{ має вигляд } Q_2 = x_1 P_1 + x_1 P_1 + 2vQ + 2vP_1, \text{ для } F = 0 \text{ та деякої } F, F_1 = F_2 = 0;$$

$$AG_4 = (AG, Q_2 + kI), \text{ для } F = \lambda v^{l-1}, F_1 = F_2 = 0 (l \geq 0);$$

6.  $AG_{24} = \langle AG, Q_6 + mQ_5 + kI \rangle$ , для  $F = \lambda\rho^{1-\frac{1}{k}}$ ,  $F_1 = \lambda_1\rho^{\frac{2m}{k}}$ ,  $F_2 = \lambda_2\rho^{1-\frac{1}{k}}$ ;
7.  $AG_{25} = \langle AG, Q_6 - \frac{1}{2}Q_5 - \frac{1}{2}I, A \rangle$ , де оператор проєктивних перетворень  $A$  має вигляд  $A = x_0^2P_0 + x_0x_1P_1 + \frac{x_1^2}{2}Q - x_0I$ , для  $F = \lambda\rho^3$ ,  $F_1 = \lambda_1\rho^2$ ,  $F_2 = \lambda_2\rho^2$ ;
8.  $AG_{26} = \langle AG_{25}, Q_5 \rangle$ , для  $F = \lambda\rho^3$ ,  $F_1 = F_2 = 0$ ;
9.  $AG_{27} = \langle AG_{25}, Q_6 \rangle$ , для  $F = 0$ ,  $F_1 = \lambda_1\rho^2$ ,  $F_2 = \lambda_2\rho^2$ ;
10.  $AG_{28} = \langle AG_{27}, I \rangle$ , для  $F = F_1 = F_2 = 0$ ;
11.  $AG_{29} = \langle AG_{22}, B^1 \rangle$ , де оператор  $B^1$  має вигляд  $B^1 = I + \mu x_0Q$ , для  $F = 0$ ,  $F_1 = \mu \ln \rho$ ,  $F_2 = 0$ ;
12.  $AG_{30} = \langle AG, C^1 \rangle$ , де оператор  $C^1$  має вигляд  $C^1 = \exp(\lambda x_0) (I + \frac{\mu}{\lambda}Q)$ , для  $F = \lambda\rho \ln \rho$ ,  $F_1 = \mu \ln \rho$ ,  $F_2 = 0$ .

РФП (13) має також оператор умовної симетрії галілеївського типу  $G^e = e^{bx_0}(P_1 + bx_1Q)$ , що вже фігурував у першому розділі. Відповідна теорема сформульована в дисертації.

В третьому параграфі наведені анзаци, що побудовані з використанням одержаних в другому параграфі операторів симетрії, та системи звичайних диференціальних рівнянь, до яких вони редукують одновимірне РФП з відповідними додатковими умовами. Наприклад, анзаци

$$\rho = x_0^m f(\omega), \quad v = \alpha + x_0^{-\frac{1}{2}} g(\omega),$$

$$u = h(\omega), \quad \omega = x_1 x_0^{-\frac{1}{2}} - \alpha x_0^{\frac{1}{2}},$$

редукує систему (2.1) - (2.3) з  $F = \lambda\rho^{1-\frac{1}{m}}$ ,  $F^1 = \rho^{-\frac{3}{2m}}p(u)$ ,  $F^2 = \rho^{-\frac{1}{m}}q(u)$  до системи

$$\begin{cases} mf - \frac{\omega}{2}f' + f'g + fg' - fh'' - 2f'h' - hf'' = \lambda f^{1-\frac{1}{m}}, \\ -\frac{1}{2}g - \frac{\omega}{2}g' + gg' + \mu_1 g'' = f^{-\frac{3}{2m}}p(h), \\ -\frac{\omega}{2}h' + h'g + \mu_2 g' = f^{-\frac{1}{m}}q(h). \end{cases}$$

В четвертому параграфі наводяться точні розв'язки одновимірного РФП зі змінним коефіцієнтом дифузії. Наприклад, функція

$$\rho(x_0, x_1) = \exp \left\{ \lambda x_1 \exp((b - \gamma)x_0) + \frac{\lambda}{3\gamma} \exp((b - \gamma)x_0) \left[ x_0^3 \right. \right.$$



$$\left. + \frac{3}{\gamma} x_0^2 + \frac{6}{\gamma^2} x_0 + \frac{6}{\gamma^3} \right] + \frac{1}{b} (\gamma - b) + \frac{\lambda^2}{b - 2\gamma} \exp(2(b - \gamma)x_0) \left[ x_0^2 - \frac{2}{b - 2\gamma} x_0 + \frac{2}{(b - 2\gamma)^2} \right] + c_1 \exp(bx_0) \left. \right\}$$

розв'язком рівняння (10) з  $A(x_0, x_1) = \gamma x_1 + \frac{x_0^3}{3}$ ,  $B(x_0, x_1) = 2x_0^2$ ,  $F = (b \ln \rho + d)$ .

В третьому розділі розглядається одновимірне рівняння Фокера-Планка з постійним коефіцієнтом дифузії та потенціалом

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1} (A(x_0, x_1)\rho) - \frac{B}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2} = W^k F(\rho), \quad (16)$$

є  $\rho(x_0, x_1)$ ,  $A(x_0, x_1) \equiv v$  та  $W(x_0, x_1)$  - невідомі функції. В першому параграфі досліджена симетрія цього рівняння. На потенціал  $W$  накладемо диференціальну умову такого вигляду:

$$W_0 + WW_1 + \mu_1 W_{11} = 0. \quad (17)$$

Алгебра симетрії системи (16), (17) нескінченновимірна: вона містить, зокрема, оператори вигляду  $f(x_0)\rho^{-1}\partial_v$ , де  $f(x_0)$  - довільна ладка функція. Тому доцільно разом з (17) розглядати диференційні мови і на функцію  $v$  - коефіцієнт зносу. Ми накладемо на  $v$  умову

$$v_0 + vv_1 + \mu_2 v_{11} = F^1(\rho). \quad (18)$$

**Теорема 6** Система рівнянь (16)-(18) для  $k \neq 0$  інваріантна відносно таких алгебр:

1.  $A = \langle P_0, P_1 \rangle$  для довільних  $F$  та  $F^1$ ;
2.  $AG_1^v = \langle A, G^v \rangle$ , де оператор  $G^v$  має вигляд  $G^v = x_0 P_1 + \partial_v + \partial_W$ , для  $F = 0$  та довільної  $F^1$ ;
3.  $A_1^v = \langle A, D^v \rangle$ , де оператор масштабних перетворень  $D^v$  має вигляд  $D^v = 2x_0 P_0 + x_1 P_1 - W \partial_W - v \partial_v$ , при  $k = 2$  для довільної  $F$  та  $F^1 = 0$ ;
4.  $AG_2^v = \langle A, G^v + Mx_0 I, I \rangle$ , тільки для  $k = 1$ ,  $F = M\rho$ ,  $F^1 = const$ ;

$$\left[ x_0^2 \right] \left( \frac{1}{2} (b-a) \exp \left( \frac{2x}{b-a} \right) + (b-a) \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right] \right) + \left( \frac{2}{b-a} \exp \left( \frac{2x}{b-a} \right) + \frac{2}{b-a} \right)$$

в кожному рівнянні (10) введемо лінійні функції  $W(x_1) = \frac{1}{2} (b-a) \exp \left( \frac{2x}{b-a} \right) + (b-a) \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right]$  та  $F(x_1) = \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right]$ .

В результаті розділення змінних одержимо рівняння Фур'є

$$(16) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial W}{\partial x_1} = W^2 F(x_1)$$

введемо лінійні функції  $W(x_1) = \frac{1}{2} (b-a) \exp \left( \frac{2x}{b-a} \right) + (b-a) \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right]$  та  $F(x_1) = \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right]$ . Нехай  $W$  буде розв'язком рівняння (16) у вигляді  $W(x_1) = \frac{1}{2} (b-a) \exp \left( \frac{2x}{b-a} \right) + (b-a) \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right]$ .

$$(17) \quad W^2 + W = W^2 F(x_1)$$

Введемо лінійні функції  $W(x_1) = \frac{1}{2} (b-a) \exp \left( \frac{2x}{b-a} \right) + (b-a) \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right]$  та  $F(x_1) = \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right]$ . Нехай  $W$  буде розв'язком рівняння (17) у вигляді  $W(x_1) = \frac{1}{2} (b-a) \exp \left( \frac{2x}{b-a} \right) + (b-a) \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right]$ .

$$(18) \quad W^2 + W = W^2 F(x_1)$$

Введемо лінійні функції  $W(x_1) = \frac{1}{2} (b-a) \exp \left( \frac{2x}{b-a} \right) + (b-a) \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right]$  та  $F(x_1) = \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right]$ . Нехай  $W$  буде розв'язком рівняння (18) у вигляді  $W(x_1) = \frac{1}{2} (b-a) \exp \left( \frac{2x}{b-a} \right) + (b-a) \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right]$ .

$$A = (A, D) \text{ та } F = (F, F)$$

$$A_1 = (A, D_1) \text{ та } F_1 = (F, F_1) \text{ та } F_1 = (F, F_1)$$

$$A_2 = (A, D_2) \text{ та } F_2 = (F, F_2) \text{ та } F_2 = (F, F_2)$$

$$A_3 = (A, D_3) \text{ та } F_3 = (F, F_3) \text{ та } F_3 = (F, F_3)$$

5.  $A_2^v = \langle A, D^v + mI \rangle$ , для  $F = \lambda \rho^{\frac{k+m-2}{m}}$ ,  $F^1 = \lambda \rho^{-\frac{3}{m}}$ ;
6.  $AG_3^v = \langle AG_1^v, D^v + mI \rangle$ , для  $F = 0$ ,  $F^1 = \lambda_1 \rho^{-\frac{3}{m}}$ ;
7.  $AG_4^v = \langle AG_1^v, D^v - I, A^v \rangle$ , де оператор проєктивних перетворень  $A^v$  має вигляд

$$A^v = x_0^2 P_0 + x_0 x_1 P_1 + (x_1 - x_0 W) \partial_W + (x_1 - x_0 v) \partial_v - x_0 I,$$

для  $F = 0$ ,  $F^1 = \lambda_1 \rho^3$ ;

8.  $AG_5^v = \langle AG_4^v, I \rangle$ , для  $F = F^1 = 0$ .

Покладемо тепер, що коефіцієнт зносу  $A(x_0, x_1)$  є похідною відносно  $x_1$  деякої функції  $\varphi$ . Тоді (16) матиме вигляд

$$\rho_0 + \rho_1 \varphi_1 + \rho \varphi_{11} - \frac{B}{2} \rho_{11} = W^k F(\rho). \quad (19)$$

На функцію  $\varphi$  розглянемо диференційну умову

$$\varphi_0 + \frac{1}{2} \varphi_1 \varphi_1 = F^3(\rho). \quad (20)$$

**Теорема 7** Система рівнянь (17), (19), (20) при довільному  $\mu_1$  інваріантна відносно алгебри  $A^\varphi = \langle P_0, P_1, Q \rangle$ ,  $Q = \partial_\varphi$ , для довільних  $F$  та  $F^3$ , а також відносно алгебр

1.  $A_1^\varphi = \langle A^\varphi, D^\varphi \rangle$ , де оператор  $D^\varphi$  масштабних перетворень має вигляд  $D^\varphi = 2x_0 P_0 + x_1 P_1 - W \partial_W$ , для  $k = 2$  при довільній  $F$  та  $F^3 = 0$ ;
2.  $AG_1^\varphi = \langle A^\varphi, G^\varphi \rangle$ , де оператор  $G^\varphi$  має вигляд  $G^\varphi = x_0 P_1 + x_1 Q + \partial_W$ , для  $F = 0$  та довільної  $F^3$ ;
3.  $A_2^\varphi = \langle A^\varphi, D^\varphi + mI \rangle$ , для  $F = \lambda \rho^{\frac{k+m-2}{m}}$ ,  $F^3 = \lambda_1 \rho^{-\frac{2}{m}}$ ;
4.  $AG_2^\varphi = \langle A^\varphi, G^\varphi + M(x_0 I + \frac{1}{2} x_0^2 Q), I + \lambda x_0 Q \rangle$ , тільки у випадку  $k = 1$  для  $F = M \rho$ ,  $F^3 = \lambda \ln \rho$ ;
5.  $AG_3^\varphi = \langle AG_1^\varphi, D^\varphi + mI \rangle$ , для  $F = 0$ ,  $F^3 = \lambda_1 \rho^{-\frac{2}{m}}$ ;
6.  $AG_4^\varphi = \langle AG_1^\varphi, D^\varphi, I, A^\varphi \rangle$ , де оператор проєктивних перетворень  $A^\varphi$  має вигляд

$$AG_1^2 = (A_1 D_1 + m_1) \cdot \text{где } F = \lambda^2 W^{\frac{1}{2}} \cdot F_1 = \lambda^2 W^{\frac{1}{2}} \cdot F_1$$

$$AG_2^2 = (A_2 D_2 + m_2) \cdot \text{где } F = 0 \cdot F_1 = 0 \cdot F_1 = \lambda^2 W^{\frac{1}{2}} \cdot F_1$$

AG\_1^2 = (A\_1 D\_1 + m\_1) \cdot \text{где } F = \lambda^2 W^{\frac{1}{2}} \cdot F\_1, \text{ где } F\_1 = \lambda^2 W^{\frac{1}{2}} \cdot F\_1

$$A_1^2 = x_0^2 B^2 + x_0^2 C^2 + (x_1 - x_0 W) B W + (x_1 - x_0 W) C^2 - x_0^2$$

$$\text{где } F = 0 \cdot F_1 = \lambda^2 W^{\frac{1}{2}} \cdot F_1$$

$$AG_2^2 = (A_2 D_2 + m_2) \cdot \text{где } F = F_1 = 0$$

Показано теперь, что коэффициент при  $A(x_0, x_1)$  в правой части  
 этой  $x_1$  некой функции  $\varphi$ . Там (10) левые члены

$$(10) \quad m + m_1 x_1 + m_2 x_1 - \frac{B}{2} x_1 = W^{\frac{1}{2}} F_1(x_1)$$

функцию  $\varphi$  можно считать дифференциальной

$$(11) \quad \varphi + \frac{1}{2} \varphi' x_1 = F_1(x_1)$$

орема 7. Система уравнений (17) (18) при допущении  $\varphi$  ин-  
 дифференциальной системы уравнений  $A_1^2 = (A_1 D_1 + m_1) \cdot Q = 0$ , где  $Q$  — некоторая

$A_1^2 = (A_1 D_1 + m_1) \cdot \text{где } D_1 \text{ — оператор } D_1 \text{ — некоторый из первоначальных}$   
 $\text{где } D_1 = 2x_0 B^2 + x_0^2 C^2 + (x_1 - x_0 W) B W + (x_1 - x_0 W) C^2 - x_0^2$   
 $F_1 = 0$

$AG_1^2 = (A_1 D_1 + m_1) \cdot \text{где } D_1 \text{ — оператор } D_1 \text{ — некоторый из первоначальных}$   
 $\text{где } D_1 = 2x_0 B^2 + x_0^2 C^2 + (x_1 - x_0 W) B W + (x_1 - x_0 W) C^2 - x_0^2$   
 $F_1 = 0$

$$A_2^2 = (A_2 D_2 + m_2) \cdot \text{где } F = \lambda^2 W^{\frac{1}{2}} \cdot F_2 = \lambda^2 W^{\frac{1}{2}} \cdot F_2$$

$$AG_2^2 = (A_2 D_2 + m_2) \cdot \text{где } F = M \cdot F_2 = \lambda^2 W^{\frac{1}{2}} \cdot F_2$$

$$AG_3^2 = (A_3 D_3 + m_3) \cdot \text{где } F = 0 \cdot F_3 = \lambda^2 W^{\frac{1}{2}} \cdot F_3$$

$AG_4^2 = (A_4 D_4 + m_4) \cdot \text{где } D_4 \text{ — оператор } D_4 \text{ — некоторый из первоначальных}$   
 $\text{где } D_4 = 2x_0 B^2 + x_0^2 C^2 + (x_1 - x_0 W) B W + (x_1 - x_0 W) C^2 - x_0^2$   
 $F_4 = 0$

$$\varphi = x_0^2 P_0 + x_0 x_1 P_1 + (x_1 - x_0 W) \partial_W + \frac{x_1^2}{2} Q - x_0 I, \text{ для } F = 0, F^3 = 0.$$

В другому параграфі з використанням вказаних в теоремах першого параграфу операторів проведено редукцію одновимірного РФП потенціалом і додатковими диференціальними умовами. Наприклад, ізац

$$\rho = f(\omega), v = \frac{1}{\sqrt{x_0}} g(\omega), W = \frac{1}{\sqrt{x_0}} h(\omega), \omega = \frac{x_1}{\sqrt{x_0}},$$

редукує систему (16)-(18) для  $k = 2$ , довільної  $F$  та  $F^1 = 0$  до системи

$$\begin{cases} -\omega f' + 2f'g + 2fg' - Bf'' = 2h^2 F(f), \\ -h - \omega h' + 2hh' + 2\mu_1 h'' = 0, \\ -g - \omega g' + 2gg' + 2\mu_2 g'' = 0. \end{cases}$$

В третьому параграфі наведено деякі класи точних розв'язків одновимірного РФП з потенціалом. Вони одержані в результаті розв'язування редукованих систем рівнянь з другого параграфу.

В висновках коротко сформульовані результати дисертаційної роботи.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Фушич В.І., Чопик В.І., Черкасенко В.П. Симетрія та точні розв'язки багатовимірного нелінійного рівняння Фоккера-Планка // Доп. АН України, 1993. - N2. - с.32-42.
2. Черкасенко В.П. Симетрія та точні розв'язки рівняння Фоккера-Планка зі змінним коефіцієнтом дифузії // Доп. АН України, 1994. - N1. - с. 54-56.
3. Черкасенко В.П. Про Галілей-інваріантність рівняння Фоккера-Планка з потенціалом // Тези доповідей і повідомлень науково-практичної конференції, присвяченої 80-річчю МДП. Миколаїв, 1995. - Ч.2. - с. 37-38.
4. Cherkasenko V.P. Galilei invariance of Fokker-Planck equation with nonlinearity // Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 1995, NN 3-4. Vol. 2, p. 180-182.

$$17 = x_1^2 E_1 + 10x_1 E_2 + (x_1 - x_2) N_1 + \frac{1}{2} Q - x_2 E_1, \text{ для } F = 0, E_2 = 0.$$

В цьому параграфі введено деякі класи точних розв'язків  
 лінійного РПФ з потенціалом. Розв'язок в результаті роз-  
 в'язання рівняння Фоккера-Планка //

$$v = \frac{1}{\sqrt{x_0}} g(\omega), W = \frac{1}{\sqrt{x_0}} h(\omega), \omega = \frac{x_1}{\sqrt{x_0}}$$

введемо систему (16)-(18) для  $k = 2$  довільної  $F$  та  $F_1 = 0$  до системи

$$\begin{cases} -\omega^2 + 2\gamma a + 2\gamma^2 - B^2 = 2A^2 F_1(f), \\ -A - \omega A + 2\gamma A + 2\gamma^2 h'' = 0, \\ -a - \omega a + 2\gamma a + 2\gamma^2 g'' = 0 \end{cases}$$

В цьому параграфі наведено деякі класи точних розв'язків  
 лінійного РПФ з потенціалом. Розв'язок в результаті роз-  
 в'язання рівняння Фоккера-Планка //

В висновках коротко сформульовані результати дисертаційної  
 роботи.

Основні результати дисертації сформульовані в наступних розділах:

1. Фунтик В.І., Років В.І., Терещенко В.П. Спектри та точні розв'язки багатовимірних нестійких рівнянь Фоккера-Планка // Док. АН України, 1993. - №2. - с.32-42.
2. Терещенко В.П. Спектри та точні розв'язки рівнянь Фоккера-Планка зі змішаним коефіцієнтом дифузії // Док. АН України, 1994. - №1. - с. 24-26.
3. Терещенко В.П. Про точні виваженості рівняння Фоккера-Планка з потенціалом // Док. АН України, 1994. - №1. - с. 27-28.
4. Chelstasenko V.P. Galilei invariance of Fokker-Planck equation with nonlinearity // Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 1995. - № 3-4. Vol. 2. p. 180-182.

000.00 А

**Черкасенко В.П. "Симметрия и редукция нелинейных уравнений типа Фоккера- Планка"**

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика. Институт математики НАН Украины, Киев, 1995.

Защищается диссертация, посвященная исследованию симметричных свойств нелинейных уравнений типа Фоккера-Планка. Установлена условная галилеевская симметрия нелинейного РФП. Используя условную симметрию, построены анзацы, проведена редукция РФП к уравнениям с меньшим количеством переменных и к ОДУ. Найден классы точных решений уравнения Фоккера-Планка с нелинейностью и с потенциалом.

**Cherkasenko V.P. "Symmetry and Reduction of Nonlinear Fokker-Planck Type Equations "**

Thesis for the degree of candidate of physical and mathematical sciences, speciality 01.01.03 – mathematical physics. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 1995.

This thesis is devoted to investigation of symmetry properties of nonlinear equations of Fokker-Planck type. A conditional Galilei invariance of nonlinear FPE has been established. By using it ansatzes were constructed, reduction has been carried out to equations having less variables and to ODE. Classes of exact solutions are found out.

**Ключові слова:** симетрія, інваріантність, алгебра Лі, нелінійність, рівняння Фоккера-Планка, система, потенціал, анзац, редукція, алгебра Галілея, точні розв'язки, оператори Галілея.

Інститут математики НАН України  
ЛНУ ім. В. Стефаника  
АН України

444902

48 32 399  
АВ 33.399

Підп. до друку 17.10.95 . Формат 60 × 84/16. Папір друк. Офс.  
друк.

Ум. друк. арк. 08. Ум. фарбо-відк. 08 Обл.-вид. арк.

Тираж 100 пр. Зам. 128

Віддруковано в Інституті математики НАН України  
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3

500 MM