

Національна академія наук України  
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

На правах рукопису

ШЕЛЄХОВА Вероніка Юріївна

ЕФЕКТИВНІ АЛГОРИТМИ ОЦІНКИ ПОХІДНИХ  
ЗА ЗАШУМЛЕНИМИ ДАНИМИ  
НА ПІДСТАВІ ОПЕРАТОРІВ ЗГОРТКИ

01.05.02 — математичне моделювання та обчислювальні  
методи у наукових дослідженнях

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Київ 1995



Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України.

Науковий керівник: кандидат технічних наук  
АКСЬОНОВА Т. І.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук  
професор ЗАДИРАКА В. К.,  
доктор фізико-математичних наук  
МОСТОВИЙ С. В.

Провідна організація: Київський політехнічний інститут  
Міністерства освіти України

Захист відбудеться «24» листопада 1995 р.  
о 11 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради  
Д 01.39.02 при Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова  
НАН України за адресою:

252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитися в науково-технічному  
архіві інституту.

Автореферат розісланий «24» листопада 1995 р.

ЛННБ ім. В. Стефаника  
АН України

Учений секретар  
спеціалізованої вченої ради

СИНЯВСЬКИЙ В. Ф.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Проблема диференціювання функцій, що спостерігаються при наявності збурень (шумів), постає у багатьох наукових та практичних задачах. Використання ефективних алгоритмів диференціювання визначає якість вирішення деяких задач керування, розпізнавання та діагностики, що виникають у процесі обробки сигналів різноманітної фізичної природи.

У процесі обробки електрокардіограм деякі задачі розпізнавання та діагностики вдається вирішувати за допомогою непараметричних моделей, що ідентифікуються на основі поведінки траєкторії сигналу у фазовому просторі.

В задачах мікросейсмічного районування, коли за реєстрацією мікросейсмічного фону необхідно оцінити сейсмічне середовище мікрорайону з точки зору його здатності посилювати чи послабляти наступні сейсмічні поштовхи, з'являється необхідність подання сейсмічного запису у такому вигляді, в якому ясно були б виявлені ці властивості даного мікрорайону. Розгляд мікросейсм у фазовому просторі виявився ефективним для неідентифікованого виявлення сигналів провісників, що приймаються на мікросейсмічному фоні.

Особливістю підходу, заснованого на розгляді сигналів різноманітної фізичної природи у фазовому просторі, є необхідність обчислення похідних від сигналів, що при реєстрації ускладнюються завадами. Ця процедура є некоректною, і успіх у вирішуванні задач розпізнавання та діагностики значно залежить від вдалого вирішення задачі оцінювання похідних.

Необхідно зауважити, що деякі задачі, наприклад задача виявлення сигналів провісників зміни стану об'єкта, що спостерігається у автоматизованих системах, повинна вирішуватись у реальному часі, що потребує застосування не тільки швидких алгоритмів обчислювання похідних, але і таких, що могли б здійснювати обробку даних за мірою їх надходження.

Мета роботи. Розробити ефективні обчислювальні алгоритми вирішення задачі наближення похідних функціями заданого степеня гладкості за зашумленими даними на підставі застосування інтегральних операторів згортки.

Методами досліджень є методи теорії наближення функцій, нелінійного програмування, чисельного аналізу та математичної статистики.

Наукова новизна роботи полягає в такому:

а) побудовано клас інтегральних операторів з кусково-поліноміальними ядрами, використання яких дозволяє наближувати похідні функціями заданого степеня гладкості (які мають рівно стільки неперервних похідних, скільки необхідно у задачі, що розглядається); доведена коректність за Тихоновим застосування запропонованих операторів для наближення похідних функціями заданого степеня гладкості за зашумленими даними;

б) розроблені ефективні алгоритми оцінки похідних, число операцій у яких не залежить від значення параметра регуляризації;

в) одержана верхня оцінка похибки наближення похідної за зашумленими даними у тому разі, коли похідна, що

оцінюється, задовольняє умові Ліпшица та максимум похибки спостережень є відомим; у класі операторів, обчислення яких потребує виконання фіксованого числа операцій, побудовані такі, що мінімізують верхню оцінку похибки наближення;

г) виявлено перевагу щодо мінімуму верхньої оцінки похибки наближення похідних збудованих операторів над операторами з ядрами Соболева і Гаусса, що традиційно застосовуються в алгоритмах диференціювання; за умовами стохастичних шумів показано, що запропоновані оператори дозволяють отримувати оцінки похідних з меншою дисперсією.

Практичне значення. Дисертаційна робота виконана у рамках науково-дослідних проєктів СГ.462.01 - "Розробка інформаційної технології пошуку, розпізнавання та інтерпретації інформативних фрагментів випадкових сигналів" (1991-1995 р.) та КН.462.02 - "Розробити комп'ютерну технологію аналізу сигналів різноманітного походження для розв'язання задач експрес-діагностики та контролю" (1992-1996 р.), затверджених ДКНТ України. У 1994 році проєкт запропонованої роботи здобув грант у конкурсі персональних проєктів фундаментальних досліджень молодих науковців НАН України, згідно з яким виконана тема МУ.462.03 - "Розробка та дослідження швидких алгоритмів диференціювання зашумлених сигналів з використанням інтегральних операторів згортки".

На захист виносяться такі основні наукові результати:

І. Побудовано клас інтегральних операторів з кусково-поліноміальними ядрами, використання яких дозволяє наближувати похідні функціями заданого степеня гладкості

за зашумленими даними.

2. Ефективні алгоритми оцінки похідних, число операцій у яких не залежить від значення параметра регуляризації.

3. Одержана верхня оцінка похибки наближення похідної за зашумленими даними; у класі операторів, обчислення яких потребує виконання фіксованого числа операцій, побудовані такі, що мінімізують верхню оцінку похибки наближення.

4. Виявлено перевагу щодо мінімуму верхньої оцінки похибки наближення похідних збудованих операторів над операторами з ядрами Соболева і Гаусса; за умовами стохастичних шумів показано, що запропоновані оператори дозволяють отримувати оцінки похідних з меншою дисперсією.

Апробація роботи. Результати роботи були представлені на міжнародному симпозіумі "Імовірнісні моделі та обробка випадкових сигналів і полів" (м.Тернопіль, 1993 р.), на другому міжнародному семінарі "Теорія інформації та її застосування" (Болгарія, Софія, 1994 р.), на 39-му міжнародному колоквіумі (ФРН, університет Ільмінау, 1994 р.), на 5-му міжнародному симпозіумі з системного аналізу та моделювання (ФРН, Берлін, 1995 р.), на 3-му європейському конгресі з інтелектуальних технологій та програмного забезпечення (ФРН, Аахен, 1995 р.), на республіканському семінарі "Оптимізація методів розв'язання задач обчислювальної математики" (Київ, 1995 р.).

Публікації. За темою дисертації опубліковано шість робіт.

Структура і обсяг роботи. Робота обсягом 95 сторінок складається із вступу, чотирьох глав, висновку та переліку

літературних джерел, що містить 52 найменування.

### ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано вибір теми дисертації на основі аналізу стану проблеми, зазначена актуальність задачі створення ефективних алгоритмів диференціювання, подана загальна характеристика структури роботи, одержаних наукових та практичних результатів.

У першій главі "Існуючі підходи до розв'язання некоректної задачі чисельного диференціювання" задача диференціювання розглянута як некоректна за Тихоновим. Обговорюються існуючі методи її регуляризації.

Переважна кількість досліджень з регуляризації задачі диференціювання розглядає питання побудови оптимальних у розумінні вибору параметра регуляризації неперервних наближень похідних за умов, що спостерігається функція, яка також є неперервною. У багатьох роботах будуються нескінченно диференційовані (гладкі) наближення на підставі використання інтегральних операторів згортки з ядрами Соболева або Гаусса. Задача наближення похідних функціями заданої гладкості не розглядається.

Майже усі існуючі роботи вивчають задачу диференціювання у детермінованій постановці і при цьому статистичні властивості алгоритмів, що пропонуються, не досліджуються. У роботах, що розглядають статистичний підхід, робляться занадто обтяжливі припущення щодо шуму: функція розподілу вважається відомою, що робить ці роботи малоприсадними на практиці.

У роботах, присвячених прискоренню процесу обчислень у задачі диференціювання, існує два різних підходи. Перший базується на розпаралелюванні процесу обчислень, другий - на застосуванні обчислювальних формул, що дозволяють оцінити похідну потрібного степеня без знаходження самої апроксимуючої функції. Однак і в цих алгоритмах обсяг обчислень не менш ніж лінійно залежить від параметра регуляризації.

Таким чином, наближення похідних функціями заданого степеня гладкості, побудова ефективних алгоритмів, що можуть бути застосовані у системах реального часу, та дослідження їх статистичних властивостей є актуальними.

У другій главі "Апроксимація похідних високих порядків функціями заданої гладкості" для розв'язання задачі чисельного диференціювання у просторі  $L_p$  будується клас інтегральних операторів, застосування яких дозволяє наближувати похідні функціями заданого степеня гладкості (такими, що має рівно стільки неперервних похідних, скільки необхідно у задачі).

У просторі  $L_p(G)$  вимірюваних сумованих з  $p$ -м степенем функцій,  $1 \leq p < \infty$ , з нормою

$$\|f\|_p = \left[ \int_G |f(t)|^p dt \right]^{1/p}, \quad (1)$$

де  $G \subset \mathbb{R}$  - відкрита вимірنا множина, розглядається сім'я інтегральних операторів

$$D_\alpha^k f(t) = \int_R \omega_\alpha^{(k)}(\tau-t) f(\tau) d\tau, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

де ядро  $\omega_\alpha$  оператора  $D_\alpha^0$  належить простору  $L_1(\mathbb{R})$  разом з усіма своїми похідними  $\omega_\alpha^{(k)}$  до  $k$ -го порядку включно та задовольняє таким умовам:

а)  $\omega_\alpha(t) = 0$  при  $|t| > \alpha$ ,

б)  $\int_R \omega_\alpha(t) dt = 1$ ,

в) Функція  $\omega_\alpha$  має неперервні похідні до  $k+l$ -го порядку ( $k$  - порядок похідної,  $l$  - необхідний ступінь гладкості).

Зв'язимо, що тут традиційно використовувана умова нескінченної диференційованості ядра послаблена і вимагається лише неперервна диференційованість до  $k+l$ -го порядку. Послаблення умови щодо гладкості ядра веде до нетривіального розширення класу операторів, за допомогою яких будуються гладкі (нескінченно диференційовані) наближення. У розширеному класі існують оператори простого виду, зокрема з кусково-поліноміальними ядрами.

Далі доведено, що сім'я операторів (2) з ядрами, що задовольняють умовам а), б) і в), є регуляризуючою для задачі наближення похідних.

Теорема 1. Нехай  $\omega_\alpha$  задовольняє вимогам а), б), в), а функція  $f(t)$  належить  $L_p(G)$  разом із своїми похідними  $f^{(k)}(t)$  до  $k$ -го порядку включно та  $f(t) = 0$  для  $t \in \mathbb{R} \setminus G$ , тоді функції  $D_\alpha^k f$  належать  $L_p(G)$ , мають  $l$  неперервних похідних та

$$\|D_\alpha^k f - f^{(k)}\|_p \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0. \quad (3)$$

Теорема 2. Нехай  $\omega_\alpha$  задовольняє вимогам а), б), в), а функції  $f(t)$  і  $f_\delta(t)$  належать  $L_p(G)$ , тоді якщо

$$\|f - f_\delta\|_p \leq \delta,$$

то

$$\|D_\alpha^k f - D_\alpha^k f_\delta\|_p \leq \frac{1}{\alpha^k} \delta. \quad (4)$$

Теорема 1 та 2 доводять, що застосування операторів (2) дозволяє наближати функцію  $f$  та її похідні функціями  $D_\alpha^k f$ , що

мають фіксований степiнь гладкостi; оцiнка похiдних за допомогою використання iнтегральних операторiв згортки (2) в ко'рктноу процедуру у тому розумiннi, що оцiнки похiдних близьких функцiй близькi мiж собою.

Таким чином, теореми 1' 1 2 доводять коректнiсть за Тихоновим використання запропонованого класу операторiв для наближення похiдних функцiями заданого степеня гладкостi за зашумленими даними.

В п. 2.2 одержана оцiнка похибки наближення похiдноi за зашумленою функцiєю.

Теорема 3. Нехай функцiя  $f \in L_p$  така, що її  $k$ -та похiдна задовольняе умовi Лiпшиця з константою  $M$ :

$$|f^k(t) - f^k(\tau)|_p \leq M |t - \tau|_p,$$

функцiя  $f_\delta \in L_p$  така, що

$$|f_\delta - f|_p \leq \delta.$$

тодi для норми похибки оцiнювання похiдноi  $f^k$  за функцiєю  $f_\delta$  за допомогою операторiв (2), ядра яких задовольняють умовам а), б) i в), мае оцiнку зверху:

$$\|D_\alpha^k f_\delta - f^k\|_p \leq \frac{C_k \delta}{\alpha^k} + M\alpha. \tag{5}$$

Теорема 4. В умовах теореми 3 мiнiмум верхньої оцiнки дорiвнюе  $(k+1) \sqrt[k]{\frac{\delta M^k}{k^k}} C_k^{1/(k+1)}$  та досягається при параметрi регуляризацiї  $\alpha = \sqrt[k+1]{\frac{k}{M} C_k \delta}$ .

Отже,

$$\|D_\alpha^k f_\delta - f^k\|_p \leq (k+1) \sqrt[k]{\frac{\delta M^k}{k^k}} C_k^{1/(k+1)}. \tag{6}$$

Таким чином, якщо засть функцiї  $f$  нам вiдомо її наближене значення  $f_\delta$ , то за допомогою оператора  $D_\alpha^k$  можливо обчислити  $k$ -ту похiдну  $f^k$  з похибкою, що не перевищуе

$$(k+1) \cdot \sqrt[k]{\frac{\partial M^k}{k^k}} \cdot C_k^{1/(k+1)}.$$

У третій главі "Ефективні алгоритми оцінки похідних в  $L_p$ " вивчено питання про обсяг обчислень в алгоритмах диференціювання. Зазначено, що число операцій у традиційно використовуваних алгоритмах диференціювання не менш ніж лінійно залежить від параметра регуляризації.

Е ф е к т и в н и м и за швидкодією алгоритмами обчислення інтегральних операторів згортки будемо називати такі, число операцій у яких не залежить від довжини носія ядра оператора  $D_\alpha^k$  (параметра регуляризації  $\alpha$ ).

У третій главі вирішується задача побудови ефективних алгоритмів диференціювання. Для цього використано ідею швидких обчислень М.І.Шлезінгера, що реалізована ним для одного класу лінійних дискретних згорток. Розв'язання задачі ефективної оцінки похідних ґрунтується на застосуванні операторів (2) з кусково-поліноміальними ядрами, що мають вигляд

$$\omega_\alpha(t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k+1} a_{ij} t^i & \text{при } t \in [\alpha_j, \alpha_{j+1}], \quad j=0, \dots, J-1, \\ 0 & \text{при } |t| > \alpha, \end{cases} \quad (7)$$

де послідовність точок  $-\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_J = \alpha$  задає розбиття інтервалу  $[-\alpha, \alpha]$ ,  $J$  - кількість відрізків розбиття, що визначається порядком диференціювання;  $l$  - необхідний ступінь гладкості функції, що наближує  $k$ -ту похідну. Коефіцієнти  $a_{ij}$  визначаються при фіксованому розбитті інтервалу  $[-\alpha, \alpha]$  з вимог нормування та  $k$  разів неперервної диференційованості ядра у точках розбиття. Для функції, що спостерігається неперервно на інтервалі  $[0, T]$  виконується

Теорема 5. Оцінка похідної у точці  $t \in [\alpha, T-\alpha]$  може

бути знайдена за формулою

$$D_{\alpha}^k f(t) = \sum_{j=0}^J c_j F(t+\alpha_j), \quad (8)$$

де  $J$  - кількість точок у розбитті відрізка  $[-\alpha, \alpha]$ , а  $F()$  - функція,  $l+1$  похідна якої збігається з  $f(t)$ .

У випадку апроксимації похідних неперервними функціями (8) набуває такого вигляду:

$$D_{\alpha}^k f(t) = \sum_{j=0}^{J-1} a_{k+1j} (F(t+\alpha_j) - F(t+\alpha_{j+1})), \quad (9)$$

де  $a_{k+1j}$  - коефіцієнти при максимальних степенях поліномів, що утворюють ядро, їх значення визначаються вибором ядра  $\omega_{\alpha}$ :

$$\omega_{\alpha}(t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k+1} a_{1j} t^i, & \text{при } t \in [\alpha_j, \alpha_{j+1}], \quad j=0, \dots, J-1, \\ 0 & , \text{при } |t| > \alpha. \end{cases} \quad (10)$$

Таким чином, число операцій, які потрібно виконати для оцінки похідної у точці, коли функція  $F()$  є відомою, обумовлюється кількістю ненульових значень  $a_{k+1j}$ . Далі доведена

Теорема 6. В класі операторів диференціювання з симетричними кусково-поліноміальними ядрами (10) існують такі, число ненульових коефіцієнтів  $a_{k+1j}$  в яких не перевищує  $k+2$ .

В силу симетрії ядер дійсним є

Наслідок. В класі операторів диференціювання (2) з ядрами, що задовольняють вимогам а), б) і в), існують такі, що для обчислення їх значень у кожній точці спостережень достатньо виконати не більше ніж  $\lfloor (k+3)/2 \rfloor$  операцій множення та  $2k+4$  додавання за умови, що в точках спостереження значення функції  $F()$  відомі.

Таким чином, через те що число операцій для обчислення

інтеграла  $F(t)$  не залежить від значення параметра регуляризації  $\alpha$ , спираючись на теореми 5 та 6 при заданій інтерполяції функції, що спостерігається, можна побудувати алгоритми диференціювання, число операцій у яких залежить лише від порядку диференціювання.

В п. 3.2 для неперервного наближення похідних будуються ефективні алгоритми за умов, що сигнал  $f(t)$  спостерігається на дискретній множині точок, між моментами спостережень кусково-постійна або кусково-лінійна інтерполяція сигналу є достатньою та значення параметра регуляризації  $\alpha$  є кратним відрізьку дискретизації, тобто  $\alpha$  - ціле число.

Теорема 7. Нехай  $\hat{f}(t)$  - кусково-постійна інтерполяція на відрізьку  $[1, T]$  функції  $f(t)$ , яка спостерігається на дискретній множині точок  $t = 1, \dots, T$ , тоді оцінка похідної у кожній точці спостережень, що належить відрізьку  $[\alpha, T-\alpha]$ , може бути знайдена із співвідношень

$$D_{\alpha}^k \hat{f}(t) = \sum_{j=0}^{J-1} \left[ \left( \frac{1}{2} a_{k+1, j} \right) (2F(t+\alpha_j) - 2F(t+\alpha_{j+1})) \right],$$

де значення  $F(t)$  обчислюються рекурентно:

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= 0; \\ \Phi(t) &= \Phi(t-1) + f(t); \\ F(0) &= 0; \\ 2F(t) &= 2F(t-1) + \Phi(t). \end{aligned} \tag{11}$$

Теорема 7 описує ефективні алгоритми диференціювання, у яких число операцій для обчислень оцінки похідної в одній точці не перевищує  $\lfloor (k+3)/2 \rfloor$  множень та  $2k+6$  додавань.

Теорема 8. Нехай  $\hat{f}(t)$  - кусково-лінійна інтерполяція на відрізьку  $[1, T]$  функції  $f(t)$ , яка спостерігається на

дискретній множині точок  $t = 1, \dots, T$ , тоді оцінка похідної у кожній точці спостережень, що належить відрізьку  $[\alpha, T-\alpha]$ , може бути знайдена із співвідношень

$$D_{\alpha}^k \hat{f}(t) = \sum_{j=0}^{J-1} \left( \frac{1}{6} a_{k+1j} \right) (6F(t+\alpha_j) - 6F(t+\alpha_{j+1})),$$

де значення  $F(t)$  обчислюються рекурентно:

$$\Phi(0) = 3f(0);$$

$$\Phi(t) = \Phi(t-1) + 6f(t);$$

$$6F(0) = 0; \tag{12}$$

$$6F(t) = 6F(t-1) + \Phi(t-1) + f(t) - f(t-1).$$

Теорема 8 описує алгоритми, число операцій для оцінки похідної в кожній точці  $t = \alpha, \alpha+1, \dots, T-\alpha$  в яких не перевищує  $\lfloor (k+3)/2 \rfloor + 1$  множень та  $2k+8$  додавань.

Внаслідок теорем 7 і 8 маємо у разі кусково-постійної інтерполяції сигналу число операцій, які необхідно виконати для послідовного обчислення значень першої, другої та третьої похідних дорівнює відповідно 2, 2, 3 множенням і 8, 10, 12 додаванням, а у разі кусково-лінійної інтерполяції вказані значення дорівнюють 3, 3, 4 множенням і 10, 12, 14 додаванням.

Зауважимо, що у теоремах 7 і 8 обчислюється оцінка неперервних наближень похідних для функцій з  $L_p$  та функція  $F()$  - двічі проінтегрована інтерполяційна функція  $\hat{f}()$ . В ефективних алгоритмах, що обчислюють оцінку наближень похідних функціями гладкості 1, як функція  $F()$  використовується  $l+1$  разів проінтегрована функція  $\hat{f}()$ .

В кінці глави обговорюються деякі питання програмної реалізації запропонованих ефективних алгоритмів, зокрема питання про переповнення розрядної сітки комп'ютера при

послідовному обчисленні інтеграла  $F()$ . Використання операції додавання за модулем дозволяє вирішити проблему переповнення без збільшення числа операцій. Запропоновані ефективні алгоритми диференціювання можуть використовуватись у системах реального часу. Перехід від традиційних алгоритмів до ефективних не потребує збільшення необхідного об'єму пам'яті. Розроблені алгоритми диференціювання реалізовані на  $C^{++}$ .

У четвертій главі "Ефективні за швидкістю оператори чисельного диференціювання, що мінімізують верхню оцінку похибки наближення похідних, їх порівняння з інтегральними операторами Соболева та Гауса" в класі операторів з кусково-поліноміальними ядрами, обчислення яких потребує фіксованого числа операцій, побудовані оператори, що мінімізують верхню оцінку похибки наближення похідної за зашумленими даними. У разі стохастичних припущень про природу шуму показано, що побудовані оператори дозволяють отримувати оцінки похідних з меншою дисперсією, ніж оператори з ядрами Соболева та Гауса, що традиційно використовуються в алгоритмах диференціювання.

Е п. 4.1 розглянуто питання обчислення відношення дисперсії інтегральних операторів. Отримане співвідношення використовується далі для порівняння інтегральних операторів диференціювання у тому разі, коли природа шуму є випадковою.

Припустимо, що зашумлений сигнал  $\tilde{f}(t)$  спостерігається у точках  $t = 0, 1, \dots, T$  та припускає подання у вигляді

$$\tilde{f}(t) = f(t) + \xi(t),$$

де  $\xi(t)$  - однаково розподілені незалежні випадкові величини

із скінченною дисперсією  $\sigma^2$ . Позначимо  $\hat{f}(t)$ ,  $\tilde{f}(t)$  кусково-лінійну інтерполяцію сигналів  $\check{f}(t)$  і  $f(t)$ . Обчислення значення інтегрального оператора (2) у точці може бути зведено до знаходження суми

$$D^k \hat{f}(t) = \sum_{j=-\alpha}^{\alpha} A_j f(t+j) + A_{-\alpha-1} f(t-\alpha-1) + A_{\alpha+1} f(t+\alpha+1). \quad (13)$$

Якщо оцінки похідних знайдені за допомогою інтегральних операторів з ядрами  $\omega_A$  і  $\omega_B$ , то відношення дисперсій оцінок становитиме :

$$\frac{D(D_{\alpha}^k \hat{f}(t) - D_{\alpha}^k \tilde{f}(t))_A}{D(D_{\alpha}^k \hat{f}(t) - D_{\alpha}^k \tilde{f}(t))_B} = \frac{\sum_{-\alpha}^{\alpha} (A_A)_1^2}{\sum_{-\alpha}^{\alpha} (A_B)_1^2}, \quad (14)$$

де  $(A_A)_1$ ,  $(A_B)_1$  - константи у (13) для операторів оцінки похідних з ядрами  $\omega_A^{(k)}$  і  $\omega_B^{(k)}$ .

Далі показано, що відношення дисперсій оцінок, знайдених за допомогою операторів з ядрами  $\omega_A^{(k)}$  і  $\omega_B^{(k)}$ , при  $\alpha \rightarrow \infty$  прямує до величини:

$$\frac{\int_R \left[ \omega_{A_1}^{(k)}(\tau) \right]^2 d\tau}{\int_R \left[ \omega_{B_1}^{(k)}(\tau) \right]^2 d\tau}, \quad (15)$$

де  $\omega_{A_1}^{(k)}$  і  $\omega_{B_1}^{(k)}$  - ядра з носієм  $[-1, 1]$ .

В п. 4.2. для оцінювання першої, другої і третьої похідних побудовані оператори, що мінімізують оцінку максимальної похибки оцінювання у класі операторів з кусково-поліноміальними ядрами, обчислення яких потребує не більш ніж заданого числа операцій.

Позначимо  $\mathcal{D}_k^1$  клас інтегральних операторів виду (2), симетричні кусково-поліноміальні ядра яких задовольняють

умовам а), б), в), число ненульових коефіцієнтів при старших членах поліномів, що утворюють їх ядра,  $a_{k+1,j}$  дорівнює  $k+2$  та всі значення  $\alpha_1$  у розбитті інтервалу  $[-\alpha, \alpha]$  - цілочисельні.

Теорема 9. Для кожного цілого значення параметра регуляризації  $\alpha$  мінімум верхньої оцінки похибки наближення першої похідної у класі інтегральних операторів  $\mathcal{D}_1^1$  досягається при використанні операторів, ядра яких задаються розбиттям  $(-1, -1+1/\alpha, 1-1/\alpha, 1)$ , та дорівнює

$$\left( \frac{12\epsilon M}{2 - 1/\alpha} \right)^{1/2}.$$

Мінімальне значення константи  $c_k$ , що обумовлює якість наближення, дорівнює  $\frac{3}{2-1/\alpha}$ .

Теорема 10. Для фіксованого значення  $\alpha$  мінімум верхньої оцінки похибки наближення другої похідної у класі інтегральних операторів  $\mathcal{D}_2^1$  досягається при використанні операторів, ядра яких задаються розбиттям  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , що належить множині

$$\mathcal{Q} = \left\{ (-1+1/\alpha, -1/\alpha, 0); \alpha_1 = -1+1/\alpha, \alpha_2 = -1+1/\alpha, 1+2/\alpha \leq \alpha_3 \leq 0 \right\},$$

та дорівнює

$$\left( \frac{81 \epsilon M^2}{(2 - 1/\alpha)^2} \right)^{1/3}.$$

Мінімальне значення константи, що обумовлює якість наближення, дорівнює  $\frac{12}{(2 - 1/\alpha)^2}$ .

Через те що рішення не єдине, то на множині  $\mathcal{Q}$  мінімізується функціонал, що обумовлює дисперсію оцінки наближення. Внаслідок цього для побудови алгоритмів обирається ядро з розбиттям  $(-1+1/\alpha, -1+1/\alpha, -1+2/\alpha)$ .

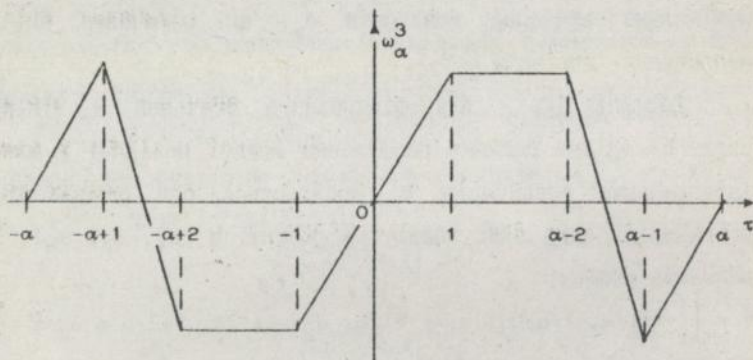
Теорема 11. Для фіксованого значення  $\alpha$  мінімум

верхньої оцінки похибки наближення третьої похідної у класі інтегральних операторів  $\mathfrak{D}_3^1$  досягається при використанні операторів, ядра яких задаються розбиттям відрізка  $[-1, 1]$   $(-1+1/\alpha, -1+1/\alpha, -1+2/\alpha, -1/\alpha)$ , та дорівнює

$$\left( \frac{1024 \alpha M^3 (3 - 2/\alpha)}{9 (1 - 1/\alpha)^2} \right)^{1/4}.$$

Мінімальне значення константи, що обумовлює якість наближення, дорівнює  $\frac{12(3 - 2/\alpha)}{(1 - 1/\alpha)^2}$ .

Як приклад наведено вигляд ядер операторів неперервного наближення третьої похідної, що мінімізують верхню оцінку похибки наближення.



Параграф 4.3 присвячено порівнянню перешкодостійкості операторів наближення першої, другої і третьої похідних з класу  $\mathfrak{D}_k^1$ , що мінімізують верхню оцінку похибки наближення, з операторами Соболева та Гаусса. У детермінованій постановці показано перевагу побудованих операторів щодо мінімуму оцінки похибки наближення похідних. У стохастичній постановці задачі застосування побудованих операторів дозволяє отримувати оцінку похідної з меншою дисперсією, ніж оператори з ядрами Соболева та Гаусса.

У параграфі 4.5 наведено приклад застосування ефективних алгоритмів диференціювання до вирішення задачі виявлення сигналів провісників, що приймаються на мікросейсмічному фоні.

У висновку роботи наведено основні результати, що отримані в дисертаційній роботі.

#### ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

1. Для вирішення задачі чисельного диференціювання побудовано клас інтегральних операторів наближення похідних функціями заданого степеня гладкості, що містить оператори з кусково-поліноміальними ядрами. Доведено коректність за Тихоновим застосування запропонованих операторів для наближення похідних за зашумленими даними.

2. Одержана верхня оцінка похибки наближення похідної за зашумленими даними у тому разі, коли похідна, що оцінюється, задовольняє умові Ліпшиця та максимум похибки спостережень є відомим.

3. Доведена можливість побудови ефективних алгоритмів наближення похідних функціями заданого степеня гладкості, число операцій у яких не залежить від параметра регуляризації, а визначається порядком диференціювання і інтерполяцією функції.

4. У класі операторів, обчислення яких потребує виконання фіксованого числа операцій, побудовано оператори оцінки похідних першого, другого та третього порядків, що мінімізують верхню оцінку похибки наближення.

5. Розроблено та програмно реалізовано ефективні

алгоритми для неперервного наближення похідних у разі кусково-постійної та кусково-лінійної інтерполяції з мінімальною похибкою наближення, які можна використовувати у системах реального часу.

6. Здійснено порівняння побудованих операторів з операторами Соблева та Гаусса, що традиційно застосовуються в алгоритмах диференціювання. Виявлено перевагу запропонованих операторів як у детермінованій постановці задачі - щодо мінімуму оцінки похибки наближення похідних, так і у стохастичній постановці - застосування побудованих операторів дозволяє отримувати оцінку похідної з меншою дисперсією, ніж оператори з ядрами Соболева та Гаусса.

7. Розроблені алгоритми та програми використовуються у вирішенні задачі виявлення сигналів провісників, що приймаються на мікросейсмічному фоні.

Основні положення та результати дисертації опубліковані в таких працях:

1. Аксьонова Т.І., Файнзільберг Л.С., Шелехова В.Ю. Аналіз та інтерпретація випадкових сигналів на основі обчислення похідних з використанням операторів згортки // 36. наук. праць міжнар. симпоз. "Імовірнісні моделі та обробка випадкових сигналів і полів". - Львів, 1993- Т.3, ч.2.- С.50-55.

2. Aksenova T., Shetekhova V. Construction of non-parametric models for cyclical processes, based on their representation in the phase space // 39th Intern. Colloquium 10 Ilmenau.- Ilmenau (Germany), 1994.- P.139-145.

3. Когнитивное графическое представление электрокардиосигнала как средство интерпретации функционального состояния организма // Л.С.Файнзильберг, Т.И.Аксенова, Т.П.Потапова, В.Ю.Шелехова 2nd Intern. Workshop: Information Theories & Application, Sofia (4-8 april, 1994, Sandansky, Bulgaria).- Sofia: FOI-Commerce, 1994.- P.12.

4. Аксенова Т.И., Шелехова В.Ю. Использование интегральных операторов свертки для приближения производных функциями заданной гладкости // Кибернетика и вычисл. техника.- 1995. - Вып.103.- С.83-91.

5. Aksenova T., Shelekhova V. Fast Algorithms of Derivative Estimation on Noisy Observations // SAMS.- 1995.- Vol. 18-19.- P. 159-163.

6.Aksenova T., Shelekhova V. The Mean Cycle Estimation Based on Non-Parametric Models of Cyclical Signals // EUFIT'95.- Aachen (Germany) 1995.- P.207-213.

*Handwritten signature*

Шелехова В.Ю. Эффективные алгоритмы оценки производных по зашумленным данным на основе операторов свертки.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 - математическое моделирование и вычислительные методы в научных исследованиях. Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, Киев, 1995.

Защищается рукопись на основе 6 научных работ, содержащих результаты исследования задачи приближения производных (включая производных высоких порядков) функциями заданной степени гладкости по зашумленным данным с помощью интегральных операторов свертки. На основе применения операторов с кусочно-полиномиальными ядрами разработаны эффективные по быстродействию и точности приближения алгоритмы оценки производных, которые могут быть использованы в системах реального времени.

Shelekhova V. Yu. Effective algorithms of derivative estimation on noisy observations based on convolution operators.

Candidate of Phis. & Math. Sci. thesis, speciality 01.05.02 - mathematical modelling and numerical methods in scientific research. V. M. Glushkov Institute of Cybernetics, NAS of Ukraine, Kiev, 1995.

Defended is the manuscript based on 6 scientific papers containing the results of the investigation of the problem when derivatives approximation on the noisy observations (including the high order derivatives) by the functions of required smoothness degree using the convolution operators. The proposed derivative estimation algorithms efficient as for high speed and approximation accuracy are developed on the basis of application of the operators with the piecewise polynomial kernels. The developed algorithms may be used in the real-time systems.

Ключеві слова: наближення похідних, оператори згортки ефективні алгоритми.

Підп. до друку 24.10.95. Формат 60×84/16. Папір для розмн. апарат.  
Офс. друк. Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,28. Обл.-вид. арк. 1,0.  
Зам. 797. Тир. 100 прим.

---

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею  
Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України  
252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40

AB 33.416