НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОБУДУВАННЯ

На правах рукопису

ЄВСЕЄВА Людмила Григорівна

КОМБІНАТОРНА ОПТИМІЗАЦІЙНА ЗАДАЧА РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОКУТНИКІВ ТА МЕТОДИ ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ З УРАХУВАННЯМ ПОХИБОК ПОЧАТКОВИХ ДАНИХ

01.05.02 - математичне моделювання та обчислювальні методи в наукових дослідженнях

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Л.Євсеєва

Харків - 1995

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі математичного моделювання і оптимального проектування Інституту проблем машинобудування НАН України.

Наукові керівники: член-кореспондент НАН України, доктор технічних наук, професор Стоян Юрій Григорович,
кандидат фізико-математичних наук, доцент Ємець Олег Олексійович

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор Яковлев Сергій Всеволодович,
кандидат фізико- математичних наук, професор Мельниченко Олександр Савович

Провідна організація: Київський національний університет ім.Тараса Шевченка, Міністерство освіти України, м.Київ.

Захист відбудеться "20" грудня 1995 р. о 15 годині в аудиторії 11-го поверху на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 02.18.02 в Інституті проблем машинобудування НАН України за адресою: 310046, м.Харків, вул. Дм.Пожарського, 2/10.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту проблем машинобудування НАН України за адресою: 310046, м.Харків, вул. Дм.Пожарського, 2/10.

Автореферат розісланий "15" листопада 1995 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
канд. фіз.-мат. наук, с.н.с. Веретельник В.В.

1. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність проблеми. Серед великої кількості наукових та практичних задач особливе місце займають оптимізаційні задачі геометричного проектування, в тому числі оптимізаційні комбінаторні задачі розміщення, що виникають при вирішенні проблеми оптимального розкрою матеріалів, проектуванні схем генеральних планів промислових підприємств, розміщенні обладнання цехів тощо, а також задачі, пов'язані з вибором одного з варіантів дії (при вирішенні проблем управління і планування виробничих процесів, у задачах геометричного проектування і перспективного планування та ін.).

Різним аспектам розв'язання проблем, пов'язаних з дослідженням цього класу задач, створенням адекватних математичних моделей та розробкою на цій основі методів оптимізації, присвячені роботи провідних центрів і дослідників. Серед них В.С.Михалевич, І.В.Сергієнко, Ю.Г.Стоян, Н.З.Шор, В.Л.Волкович, Ю.І.Журавльов, В.А.Ємелічев та ін. У Харкові під керівництвом Ю.Г.Стояна і С.В.Яковлева, в Полтаві під керівництвом О.О.Ємця розробляються підходи до розв'язання дискретних оптимізаційних задач, заснованих на відображенні комбінаторних множин в арифметичний евклідів простір.

Математичні моделі і методи розв'язання ідеалізованої (без врахування похибок початкових даних) оптимізаційної задачі розміщення прямокутників у достатньо довгій смузі досліджено в роботах члена-кореспондента НАН України Ю.Г.Стояна та його учнів С.Л.Магаса, О.О.Ємця, М.В.Новожилової, І.В. Арістової та ін. Спроби врахуваня похибок початкових даних при розв'язанні задачі розміщення на основі використання апарату обчислювальної геометрії носять локальний характер.

Наукові розробки Ю.Г.Стояна в інтервальній математиці та застосуванні цієї нової галузі математичних знань в геометричному проектуванні заклали основу для розвитку нової стратегії розв'язання оптимізаційних задач геометричного проектування, що дозволяє враховувати похибки початкових даних, тобто дає можливість одержувати реальні розв'язки практичних задач.

В дисертаційній роботі пропонується підхід до моделювання і розв'язання задачі розміщення прямокутників у достатньо довгій смузі з урахуванням похибок початкових даних, що базується на використанні елементів інтервальної математики.

Робота виконувалася в період з 1991 по 1994 р. у відділі математичного моделювання та оптимального проектування ІПМаш НАН України у відповідності з планами науково - дослідних робіт за:

а) держбюджетною темою "Математичне моделювання складних технічних систем модульного типу" (№ ДР 01900009448);

б) держбюджетною темою "Розробка й дослідження інтелектуальної системи відображення геометричної інформації для оптимізації та моделювання фізико - механічних процесів і технічних систем" (№ ДР 01860049704).

Ступінь дослідження матеріалу. В роботах Ю.Г.Стояна і Ю.О. Ємця розглядається ідеалізована задача розміщення прямокутників як комбінаторна оптимізаційна задача. С.Л.Магасом і М.В.Новожиловою запропоновані структури лінійних нерівностей для описання умов взаємного неперетинання прямокутників і вміщення прямокутників у смугу. У відділі математичного моделювання та оптимального проектування ІПМаш України розроблено методи розв'язання оптимізаційної задачі розміщення прямокутників, що базуються на використанні класичних методів математичного програмування.

Метою роботи є моделювання оптимізаційної задачі розміщення прямокутників з урахуванням похибок початкових даних як комбінаторної задачі геометричного проектування та розробка підходів до її ефективного розв'язання.

Основними завданнями роботи є:

1) постановка оптимізаційної задачі розміщення прямокутників у достатньо довгій смузі з урахуванням похибок початкових даних;

2) побудова інтервальної математичної моделі задачі розміщення прямокутників у достатньо довгій смузі з врахуванням похибок початкових даних на основі використання елементів інтервального аналізу;

3) здійснення відображення інтервальних множин в арифметичні евклідові простори; подання інтервальної математичної моделі в арифметичному евклідовому просторі R^n;

4) дослідження математичної моделі поставленої задачі як комбінаторної оптимізаційної задачі геометричного проектування;

5) розробка ефективних наборів правил відтинання безперспективних верхівок і дослідження екстремальних властивостей опуклої недиференційовної функції, модифікація методу віток та меж на основі доведених правил і теорем;

6) розробка модифікації комбінованого методу задачі мінімізації опуклої функції на сфері як декомпозиції методів проекції субградієнта та умовного градієнта;

7) створення комплексу програм для розв'язання комбінаторної оптимізаційної задачі розміщення прямокутників у достатньо довгій смузі.

Методика дослідження. У роботі використано результати, одержані в рамках теорій геометричного проектування, інтервального аналізу та математичного програмування.

Моделювання початкових даних задачі розміщення прямокутників як задачі геометричного проектування з урахуванням похибок їх задання здійснено на основі теорії інтервальної геометрії, розробленої Ю.Г. Стояном.

Дослідження екстремальних властивостей опуклої недиференційовної функції базується на основних положеннях опуклого аналізу і дослідженнях, виконаних Ю.Г.Стояном та його учнями О.О. Ємцем і С.В. Яковлевим.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи:

1) Запропоновано постановку оптимізаційної задачі розміщення прямокутників у достатньо довгій смузі з урахуванням похибок початкових даних.

2) Побудовано інтервальну математичну модель комбінаторної оптимізаційної задачі розміщення прямокутників у достатньо довгій смузі, яка дозволяє врахувати похибки початкових даних.

3) Здійснене подання математичної моделі задачі розміщення прямокутників у достатньо довгій смузі з урахуванням похибок початкових даних як оптимізаційної комбінаторної задачі геометричного проектування (доведено теореми про оцінки й достатні умови мінімума цільової функції), що надає змогу використовувати апарат опуклих функцій та оригінальні методи комбінаторної оптимізації.

4) Розроблено підходи до ефективного розв'язання комбінаторної оптимізаційної задачі розміщення прямокутників у достатньо довгій смузі у вигляді модифікацій метода віток та меж і комбінованого методу проекції субградієнта та умовного

градієнта, що базуються на використанні нових правил відтинання безперспективних верхівок, доведених екстремальних властивостях опуклої недиференційовної функції, врахуванні специфіки комбінаторних множин, занурених в арифметичний евклідів простір.

5) Наведено алгоритми й комплекси програм, що реалізують запропоновані підходи розв'язання комбінаторної оптимізаційної задачі розміщення прямокутників з урахуванням похибок початкових даних.

Моделювання задачі розміщення прямокутників з урахуванням похибок початкових даних, а також розробка методів її ефективного розв'язання є новим рішенням оптимізаційної задачі розміщення прямокутників у геометричному проектуванні.

Теоретична цінність результатів роботи.

1) Побудована на основі використання елементів інтервального аналізу інтервальна математична модель оптимізаційної задачі розміщення прямокутників у достатньо довгій смузі дає можливість враховувати похибки початкових даних.

2) Здійснене подання інтервальної математичної моделі оптимізаційної задачі розміщення прямокутників у достатньо довгій смузі у арифметичному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ дозволяє одночасно враховувати похибки початкових даних та використовувати традиційні методи геометричного проектування в евклідових арифметичних просторах.

3) Досліджені властивості математичної моделі поставленої задачі як комбінаторної задачі у вигляді доведених теорем надають можливість застосувати оригінальні методи комбінаторної оптимізації.

4) Розроблені ефективні правила відтинання безперспек-

тивних верхівок дерева розв'язків задачі та доведені теореми про екстремальні властивості опуклої функції дозволяють модифікувати метод віток та меж і комбінований метод проекції субградієнта та умовного градієнта.

Практичне значення роботи полягає в розробці й реалізації на ПЕОМ комплексу програм для розв'язання комбінаторних оптимізаційних задач геометричного проектування з урахуванням похибок початкових даних. Створений програмний комплекс "Метод"- "Сфера" може бути безпосередньо застосований при проектуванні будівельних об'єктів, транспортних засобів, радіоелектронного обладнання, при вирішенні проблеми раціонального розміщення обладнання у цехах, в економічному плануванні.

Програмний комплекс рекомендується також застосовувати при розробці схем порізки металу в машинобудуванні, при розкрої тканин у текстильній та шкіри - у взуттєвій промисловостях, що дозволить враховувати похибки початкових даних, підвищити ефективність використання вихідних матеріалів, а також скоротити час розв'язання вказаних задач.

Рівень реалізації й впровадження. Результати роботи впроваджені у відділі математичного моделювання та оптимального проектування ІПМаш НАН України при виконанні держбюджетних тем "Математичне моделювання складних технічних систем модульного типу" і "Розробка та дослідження інтелектуальної системи відображення геометричної інформації для оптимізації та моделювання фізико-механічних процесів і технічних систем".

Апробація роботи. Основні положення роботи доповідалися і обговорювалися на:

- семінарах Наукової ради НАН України з проблеми "Кібернетика" - "Математичні методи геометричного проектування" (м. Харків, квітень 1993 р., лютий 1994 р.);

- 46-й науковій конференції викладачів та студентів Полтавського інженерно-будівельного інституту (м. Полтава, 1994 р.);

- 47-й науковій конференції викладачів та студентів Полтавського технічного університету (Полтава, 1995 р.);

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 6 наукових працях, з них статей у збірниках наукових праць - 2, депонованих рукописів - 1, тез доповідей - 3.

Особистий внесок. Всі результати дисертаційної роботи одержано за особистою участю автора. У працях, написаних у співавторстві, дисертанту належать: [1]- побудова доведення наведених у роботі теорем; [2]- доведення правил відтинання безперспективних верхівок дерева розв'язків задачі розміщення, алгоритми й результати чисельних експериментів; [3] - доведення теорем про нижні межі цільової функції оптимізаційної задачі розміщення прямокутників у достатньо довгій смузі; [6] - побудова математичної моделі задачі розміщення прямокутників у достатньо довгій смузі з урахуванням похибок початкових даних.

Структура й обсяг дисертації. Робота складається з вступу, чотирьох розділів та висновків - 91 сторінка машинописного тексту, однієї таблиці, 10 рисунків, бібліографії з 137 найменувань - всього 106 сторінок.

ЗМІСТ РОБОТИ

У першому розділі здійснено постановку оптимізаційної задачі розміщення прямокутників однієї ширини у достатньо довгій смузі з урахуванням похибок початкових даних; наведено основні поняття та означення, необхідні для побудови математичної моделі задачі; описується один з підходів до моделювання геометричних об'єктів з урахуванням похибок початкових даних, що базується на використанні елементів інтервальної математики; побудовано математичну модель задачі розміщення прямокутників в достатньо довгій смузі в інтервальному вигляді; запропоновано ряд відображень, через здійснення яких інтервальна математична модель поданої задачі зводиться до математичної моделі в арифметичному евклідовому просторі.

Наведемо основні положення першого розділа докладніше.

Розглядається оптимізаційна задача розміщення в такій постановці.

Нехай $\{T_i\}$, $i\in J_m=\{1,\dots,m\}$- скінченна множина прямокутників довжини a_i відповідно і однакової ширини b, $\Omega=\{(x,y)\,|\,x\in[0,L)\subset R^1,\ L\to\infty,\ y\in[0,W]\subset R^1\}$- достатньо довга смуга, початкові дані про які задані з деякими похибками ν_{a_i}, ν_b, ν_L, ν_W. Необхідно розмістити задану множину прямокутників в смузі з урахуванням похибок початкових даних так, щоб довжина зайнятої частини смуги була б мінімальною.

Задамо відповідність між початковими даними і елементами розширеного простору центрованих інтервалів $\mathbf{I}_s(R)$:

$$(a_i,\nu_{a_i})\leftrightarrow\langle a_i,\nu_{a_i}\rangle=\langle A_i\rangle,\ (b,\nu_b)\leftrightarrow\langle b,\nu_b\rangle=\langle B\rangle,$$
$$(L,\nu_L)\leftrightarrow\langle L,\nu_L\rangle=\langle L\rangle,\ (W,\nu_W)\leftrightarrow\langle W,\nu_W\rangle=\langle W\rangle. \qquad (1)$$

Означення. Математичною моделлю прямокутника $T\subset R^2$, довжини a і ширини b, які задані з похибками ν_a и ν_b, в інтервальному просторі $\mathbf{I}_s^2(R)=\mathbf{I}_s(R)\times\mathbf{I}_s(R)$, називається множина

$\mathbb{IT}$, що має вигляд

$$\mathbb{IT}=\mathbb{IT}_x\times\mathbb{IT}_y, \qquad (2)$$

де множини $\mathbb{IT}_x\subset\mathbb{I}_s(R)$, $\mathbb{IT}_y\subset\mathbb{I}_s(R)$ описуються системами інтервальних нерівностей:

$$\mathbb{IT}_x=\begin{cases}\langle X\rangle\geqslant\langle 0,\nu_x\rangle\\ \langle X\rangle\leqslant\langle a,\nu_x\rangle\\ \langle X\rangle\geqslant\langle x,-|\nu_a|\rangle\\ \langle X\rangle\leqslant\langle x,|\nu_a|\rangle,\end{cases}\quad \mathbb{IT}_y=\begin{cases}\langle Y\rangle\geqslant\langle 0,\nu_y\rangle\\ \langle Y\rangle\leqslant\langle b,\nu_y\rangle\\ \langle Y\rangle\geqslant\langle y,-|\nu_b|\rangle\\ \langle Y\rangle\leqslant\langle y,|\nu_b|\rangle,\end{cases} \qquad (3)$$

тобто $\mathbb{IT}=\{\langle Z\rangle=(\langle X\rangle,\langle Y\rangle)\in\mathbb{I}_s^2(R)\,|\,\langle X\rangle\in\mathbb{IT}_x,\langle Y\rangle\in\mathbb{IT}_y\}$.

Аналогічно визначимо математичну модель достатньо довгої смуги $\Omega\subset R^2$ як інтервальну множину $\mathbb{I}\Omega=\mathbb{I}\Omega_x\times\mathbb{I}\Omega_y\subset\mathbb{I}_s^2(R)$.

Тоді оптимізаційну задачу розміщення прямокутників $T_i\subset R^2$, $i\in J_m$, в смузі $\Omega\subset R^2$ з урахуванням похибок початкових даних можна подати як задачу розміщення інтервальних множин $\mathbb{IT}_i\subset\mathbb{I}_s^2(R)$, $i\in J_m$ в інтервальній області $\mathbb{I}\Omega\subset\mathbb{I}_s^2(R)$.

Виходячи з комбінаторної природи поставленої задачі, деякому розміщенню множин $\mathbb{IT}_i$, $i\in J_m$ в області $\mathbb{I}\Omega$ ставиться у відповідність інтервальне переставлення

$$\mathbb{I}\Pi=(\langle A_{\alpha_1}\rangle,\ldots,\langle A_{\alpha_n}\rangle),\ \alpha_i\in J_n,\ i\in J_n. \qquad (5)$$

елементів мультимножини $\mathbb{IQ}=\{\langle 0\rangle,\ldots,\langle 0\rangle,\langle A_1\rangle,\ldots,\langle A_m\rangle\}$ – з $n=kt$ елементів, r з яких різні (k– максимальна кількість горизонтальних смуг P_i, на які розподіляється область Ω з урахуванням похибок початкових даних, $t=m-k+1$). Множину всіх інтервальних переставлень $\mathbb{I}\Pi$ виду (5) позначимо через $\mathbb{IP}_{nr}(\mathbb{IQ})$.

Здійснюється занурення множини $\mathbb{IP}_{nr}(\mathbb{IQ})$ в n-вимірний інтервальний простір $\mathbb{I}_s^n(R)=\mathbb{I}_s(R)\times\ldots\times\mathbb{I}_s(R)$, при якому інтервальному переставленню $\mathbb{I}\Pi$ відповідає елемент $\langle X\rangle=(\langle X_1\rangle,\langle X_2\rangle,\ldots,\langle X_n\rangle)\in\mathbb{I}_s^n(R)$, що $\langle X_i\rangle=\langle A_{\alpha_i}\rangle$, $\alpha_i\in J_n$, $i\in J_n$.

Тоді математична модель наведеної задачі буде мати вигляд:

визначити

$$\min_{\langle X\rangle\in \mathbb{IE}_{nr}(\mathbb{IQ})} \max_{1\le i\le k} \mathbf{L}_i(\langle X\rangle), \qquad (6)$$

де $\mathbf{L}_i(\langle X\rangle)$, $i\in J_k$,- інтервальна функція, що описує довжину смуги P_i з урахуванням похибок початкових даних;

$\mathbb{IE}_{nr}(\mathbb{IQ})$- образ множини $\mathbb{IP}_{nr}(\mathbb{IQ})$ при зануренні в $\mathbf{I}_s^n(R)$.

Враховуючи те, що на цей час не розроблено методів, що реалізують математичну модель (6) в інтервальному просторі $\mathbf{I}_s^n(R)$, пропонується один з можливих підходів до моделювання наведеної задачі через представлення її інтервальної математичної моделі в арифметичному евклідовому просторі.

В силу гомеоморфізму H: $\mathbf{I}_s(R) \to R^2$ та теореми про прямий добуток гомеоморфізмів здійснюється відображення інтервальних множин простору $\mathbf{I}_s^2(R)$ в арифметичний евклідів простір R^4 та відображення H^n: $\mathbf{I}^n{}_s(R)\to R^{2n}$.

Наводяться відображення

$$\bar{\varphi}:\mathbf{I}_s(R)\to R^1,\ \bar{\varphi}(\langle X\rangle)=\sqrt{x^2+(2\nu_x)^2},$$

що є відношенням еквівалентності в інтервальному просторі $\mathbf{I}_s(R)$, тобто

$$\langle X_1\rangle\overset{\bar{\varphi}}{\approx}\langle X_2\rangle,\ \text{якщо}\ \bar{\varphi}(\langle X_1\rangle)=\bar{\varphi}(\langle X_2\rangle),$$

та відображення

$$\bar{\varphi}:\mathbf{I}_s^2(R)\to R^2,\ \bar{\varphi}(\langle Z\rangle)=\bar{\varphi}(\langle X\rangle,\langle Y\rangle)=(\bar{\varphi}(\langle X\rangle),\bar{\varphi}(\langle Y\rangle)),$$

що є відношенням еквівалентності в інтервальному просторі $\mathbf{I}_s^2(R)$, тобто

$$\langle Z_1\rangle\overset{\bar{\varphi}}{\approx}\langle Z_2\rangle,\ \text{якщо}\ \bar{\varphi}(\langle X_1\rangle)=\bar{\varphi}(\langle X_2\rangle),\ \bar{\varphi}(\langle Y_1\rangle)=\bar{\varphi}\langle Y_2\rangle),$$

де $\langle Z_1\rangle=(\langle X_1\rangle,\langle Y_1\rangle)$, $\langle Z_2\rangle=(\langle X_2\rangle,\langle Y_2\rangle)\subset\mathbf{I}_s^2(R)$.

Здійснення цих відображень надає можливість звести задачу (6) в інтервальному просторі $\mathbf{I}_s^n(R)$ до задачі в арифметичному евклідовому просторі R^n:

визначити

$$\min_{IX \in IE_{nr}(IQ)} \max_{1 \le i \le k} \sum_{j=1}^{t} IX_{ij}, \qquad (7)$$

де $IE_{nr}(IQ)$ - образ множини $IE_{nr}(IQ)$ в арифметичному евклідовому просторі R^n,

$k=[\psi(\langle W\rangle)/\psi(\langle B\rangle)]$,

$IX=(IX_{11},\ldots,IX_{1t},\ldots,IX_{k1},\ldots,IX_{kt})=(\psi(\langle X_1\rangle),\ldots,\psi(\langle X_n\rangle)$.

Другий розділ присвячено дослідженню математичної моделі задачі розміщення прямокутників у достатньо довгій смузі з урахуванням похибок початкових даних як комбінаторної оптимізаційної задачі геометричного проектування.

Досліджується математична модель ідеалізованої задачі розміщення прямокутників у достатньо довгій смузі:

визначити

$$\min_{x \in E_{nr}(Q)} \max_{1 \le i \le k} \sum_{j=1}^{s} x_{ij}, \qquad (8)$$

де $k=[W/b]$ (W-ширина смуги, b-ширина прямокутника),

$x_{ij} \in Q$, $j \in J_s$,- довжини прямокутників, які вміщено в смугу P_i, $i \in J_k$,

$Q=\{q_1,q_2,\ldots,q_n\}=\{0,\ldots,0,a_1,\ldots,a_m\}$,

$E_{nr}(Q) \subset R^n$- множина переставлень, що породжується мультимножиною Q, після занурення в арифметичний евклідів простір.

Зауваження. Кількість різних елементів мультимножин IQ і Q не збігається.

Виходячи з того, що $E_{nr}(Q)=\mathrm{vert}\,\Pi_{nr}(Q)$ і $E_{nr}(Q) \subset S^n$, де $\Pi_{nr}(Q)$- загальний переставний многогранник,

S^n- (n-1)- сфера, яка є перетином n-сфери $\sum_{i=1}^{n} x_i^2=\sum_{i=1}^{n} q_i^2$ і гіперплощини $\sum_{i=1}^{n} x_i=\sum_{i=1}^{n} q_i$,

розглядаються дві задачі:

визначити

$$\min_{x\in\Pi_{nr}(Q)} f(x) \tag{9}$$

та

визначити

$$\min_{x\in S^n} f(x). \tag{10}$$

Тут

$$f(x)=\max_{1\leq i\leq k} f_i(x), \tag{11}$$

$$f_i(x)=\sum_{j=1}^{t} x_{ij}. \tag{12}$$

Задачі (9) і (10) є релаксаційними до задачі (8).

В дисертаційній роботі на основі властивостей переставного многогранника $\Pi_{nr}(Q)=\mathrm{conv}\ E_{nr}(Q)$ та (n-1)-сфери S^n досліджується цільова функція $f(x)$ як опукла недиференційовна функція. Доведено теореми про екстремальні властивості функції (11)-(12).

Нехай довжини $\{a_i\}$, $i\in J_m$ прямокутників, що розміщуються, є цілі числа, d- їх найбільший спільний дільник. Не втрачаючи загальності, вважаємо, що $a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_m$.

Позначимо $Z^*=(\sum_{i=1}^{m} a_i)/k$,

$$C=\begin{cases} Z^*, & \text{якщо } Z^*\text{- ціле число,} \\ [Z^*]+d, & \text{у противному разі}. \end{cases} \tag{13}$$

ТЕОРЕМА 1. Якщо $f(x_0)=C$, то $x_0\in E_{nr}(Q)$ є точкою мінімума функції $f(x)$.

ТЕОРЕМА 2. Якщо $f(x_0)=a_m$ в деякій точці $x_0\in E_{nr}(Q)$, то x_0- точка мінімума.

Побудуєм опукле продовження дискретної функції $f(x)$ на опуклу множину $X\subset R^n$, $E_{nr}(Q)\subset X$. Будемо вважати, що саме $f(x)$ і є опуклою функцією, заданою на X. Нехай rintX- відносна внутрішність множини X, множина індексів $R(x)=\{i\in I_k|\ f(x)=f_i(x)\}$.

$$\partial f(y)=\operatorname{conv}\{\partial f_i(x)/i\in R(x)\}-$$

субдиференціал функції f в точці y, $\{\alpha_i\}$, $i\in J_n$,- набір індексів вектора субградієнта $p(y)\in\partial f(y)$ такий, що

$$p_{\alpha_1}(y)\geq p_{\alpha_2}(y)\geq\ldots\geq p_{\alpha_n}(y). \qquad (14)$$

ТЕОРЕМА 3. Для мінімума функції $f(x)$ на множині переставлень і $\forall\, y\in E_{nr}(Q)$ має місце оцінка

$$\min_{x\in E_{nr}(Q)} f(x)\geqslant \max_{p(y)\in\partial f(y)} \sum_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}(y)q_i. \qquad (15)$$

ТЕОРЕМА 4. Для того, щоб точка $y\in E_{nr}(Q)$ надавала мінімума функції $f(x)$ на $E_{nr}(Q)\subset\operatorname{rint} X$, достатньо, щоб

$$(p(y),y)=\sum_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}(y)q_i. \qquad (16)$$

У третьому розділі наведено методи розв'язання комбінаторної оптимізаційної задачі розміщення прямокутників у достатньо довгій смузі, а саме: модифікації методу віток та меж і комбінованого методу оптимізації опуклої функції на сфері. Описується схема побудови дерева розв'язків поставленої задачі, обгрунтовуються правила відтинання безперспективних верхівок дерева. Модифікація комбінованого методу подається як декомпозиція метода проекції субградієнта та умовного градієнта, що базується на використанні особливостей області допустимих значень задачі та релаксації на переставний многогранник.

При розв'язанні задачі (9),(11),(12) методом віток та меж важлива роль приділяється знаходженню початкового розміщення, тобто кореня дерева розв'язків задачі. Для цього застосовано декілька евристичних методів розміщення прямокутників у смузі.

На кожному рівні дерева здійснюється редукція задачі на деяку (n-2)-грань $x_i=g_{\beta_i}$, $i\in J_n$, $\beta_i\in J_n$, переставного многогранника, а також на одиницю зменшується вимірність задачі. На останньому рівні дерева розв'язків одержуємо систему рівнянь, що визначає вершину $П_{nr}(Q)$ за критерієм вершини.

Наведемо один з наборів правил відтинання безперспективних верхівок. Верхівка є безперспективною, якщо:

- хоча б одна смуга P_i, $i \in J_k$, є пустою;

- хоча б в одній смузі P_i, $i \in J_k$, для довжин вміщених в неї прямокутників не виконується умова

$$x_{ij} \geqslant x_{i,j+1},\ i \in J_{s-1},\ i \in J_k;$$

- оцінка розміщення $\eta \geqslant \eta_0$, де η_0- оцінка початкового розміщення;

- прямокутник вміщено в смугу P_i, $i \in J_k$, довжина зайнятої частини якої на попередньому кроці збігалась з довжиною зайнятої частини смуги P_j, $j \neq i$, $j \in J_k$, $j < i$.

- k прямокутників найменшої ненульової довжини, що розміщуємо останніми, вміщені в смугу не методом послідовно-поодиноким розміщення.

За оцінку розміщення можна взяти праву частину нерівності (15). Критерій зупинки алгоритму- повний перебір верхівок дерева або виконання достатніх умов (теореми 1, 2 і 4).

При розв'язанні задачі (10)-(11), (12) комбінованим методом здійснюється ітераційний процес по вимірності сфери.

За початкову точку задачі на (n-i)-сфері S^{n-i-1}, $i=1,2,\dots,n-2$, береться вершина переставного многогранника $П_{n-i,r_i}(Q)$, яку шукаємо модифікованим методом віток та меж, описаним вище, з використанням обмежувача часу.

Виведено формули знаходження проекції точки $x \in R^{n-i}$ на (n-i)-сферу S^{n-i-1}. Запропоновано шлях здійснення редукції задачі на найближчу грань або найближчий переріз переставного многогранника.

Четвертий розділ містить алгоритми, що реалізують методи розв'язання задачі розміщення прямокутників в достатньо довгій смузі, наведені в даній роботі, а також результати експериментального дослідження цих методів і їх аналіз. Для випадків, коли цільова функція є цільчисельною і різниця між верхньою та нижньою оцінками незначна, застосовуєм дихотомію інтервала $[\alpha, \beta]$, де $\alpha = \max(C, \alpha_2)$, $\beta = \eta_0$,

$$\alpha_2 = \begin{cases} \max\limits_{p(y) \in \partial f(y)} \sum\limits_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}(y) g_i, & \text{якщо це число ціле,} \\ \left[\max\limits_{p(y) \in \partial f(y)} \sum\limits_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}(y) g_i \right] + 1, & \text{у противному разі.} \end{cases}$$

Проаналізовано результати розв'язання задачі при застосуванні запропонованих методів.

ВИСНОВКИ

1) Побудовано інтервальну математичну модель оптимізаційної задачі розміщення прямокутників в достатньо довгій смузі з урахуванням похибок початкових даних задачі.

2) Здійснено подання інтервальної математичної моделі оптимізаційної задачі розміщення прямокутників в досить довгій смузі у арифметичному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

3) Досліджено властивості математичної моделі поставленої задачі як комбінаторної задачі, а саме: доведено теореми
ної задачі як комбінаторної задачі, а саме: доведено теореми
про екстремальні властивості цільової функції.

4) Розроблено ефективні правила відтинання безперспективних верхівок дерева розв'язків задачі та доведено теореми про екстремальні властивості опуклої функції на множині переставлень.

5) Модифіковано метод віток та межі комбінований метод проекції субградієнта та умовного градієнта.

6) Розроблено алгоритми, що реалізують запропоновані підходи до ефективного розв'язання наведеної задачі, у

вигляді програмного комплексу "Метод"- "Сфера".

7) Виконані експериментальні дослідження розроблених в роботі методів. Наведено результати розрахунків. Здійснено їх порівняння.

ПРАЦІ, ОПУБЛІКОВАНІ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Емец О.А., Евсеева Л.Г. Метод решения комбинаторной задачи размещения прямоугольников с использованием оценки и достаточного условия минимума выпуклой недифференцируемой функции. - В кн.: Математическое моделирование и оптимизация технических систем и процессов, Сб.науч.тр. - Киев: ИК НАН Украины, 1993. с. 37-40.

2. Емец О.А., Евсеева Л.Г. Одна комбинаторная задача размещения прямоугольников : алгоритмы решения, численные эксперименты. - В кн.: Автоматизация архитектурно- строительного проектирования: Межвуз. сб. научн. тр. /Рост. госуд. архит. ин-т.- Ростов-н/Д, 1994- С.130-138.

3. Ємець О.О., Євсеєва Л.Г. Нижні межі та достатні умови мінімума в задачі розміщення прямокутників у напівнескінченну смугу. - В кн.: Тези доповідей 46 наук. конф. професорів, викладачів, наук. працівників, аспірантів та студентів ін-ту. Ч.І / Міносвіти України. Полт. інж.-будів. ін-т.- Полтава, 1994. - С.87.

4. Євсеєва Л.Г. Дихотомія при розв'язуванні однієї комбінаторної задачі. - В кн.: Тези доповідей 46 наук. конф. професорів, викладачів, наук. працівників, аспірантів та студентів ін-ту. Ч.І / Міносвіти України. Полт. інж.-будів. ін-т.- Полтава, 1994. - С.88.

5. Євсеєва Л.Г. Пошук наближеного розв'язку однієї комбінаторної задачі. - В кн.: Тези доповідей 47 наук. конф. професорів, викладачів, наук. працівників, аспірантів та студентів ун-ту. Ч.І / Міносвіти України. Полт. техн.

ун-т.- Полтава, 1995. - С.72.

6. Евсеева Л.Г., Романова Т.Е. Математическая модель задачи размещения прямоугольников в достаточно длинной полосе с учетом погрешностей исходных данных. / Полт. техн. ун-т. - Полтава, 1995.-13 с.- Депон. в ГНТБ Украины 4.09.95, № 2011-Ук95.

SUMMARY

L.G. Yevseyeva. Combinatorial optimization problem of rectangles placement and solution methods of it taking into account initial data errors.

This thesis is a manuscript being submitted for a Candidate of Sciences Degree (Physics and Mathematics) in the speciality 01.05.02 - mathematical modelling and numerical methods in scientific reseaches. Institute for Problems in Machinery of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkov, 1995.

The problem of rectangles placement in fairly lengthy strip taking into account initial data is considered. Mathematical model of the stated problem as combinatorial optimization problem is constructed on the basis of using the geometric design theory and the interval mathematics elements. To solve the problem modifications of the branch-and-bound method and combined method for optimization of convex function on sphere are suggested. Proposed are algorithms of their realizations. Experimental investigation of methods and their comparison are fulfilled. The results of numerical solution of test problems are given.

АННОТАЦИЯ

Евсеева Л.Г. Комбинаторная оптимизационная задача размещения прямоугольников и методы ее решения с учетом погрешностей исходных данных.

Диссертация является рукописью, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02.- математическое моделирование и вычислительные методы в научных исследованиях. Ин-т проблем машиностроения НАН Украины, Харьков, 1995.

Рассматривается задача размещения прямоугольников в достаточно длинной полосе с учетом погрешностей исходных данных. На основе использования элементов теории геометрического проектирования и интервальной математики строится математическая модель поставленной задачи как оптимизационной комбинаторной задачи. Для решения задачи предлагаются модификации метода ветвей и границ, комбинированного метода оптимизации выпуклой функции на сфере и реализующие их алгоритмы. Выполнено экспериментальное исследование методов и их сравнение. Приведены результаты расчетов тестовых примеров.

Ключові слова: геометричне проектування, комбінаторна оптимізація, урахування похибок початкових даних, інтервальний простір, інтервальна модель геометричного об"єкта, інтервальне відображення, гомеоморфізм, математичне моделювання.

Відповідальний за випуск к.т.н. Куценко О.С.

Підписано до друку 1.11.95р.

Формат 60х90 1/16. Папір друк. № 1. Ум.друк.арк. 1.

Обл.-вид.арк. 0,96. Тираж 100 пр. Зам. № .

Підписано до друку 13.11.95р. Формат 60х84 1/16. Папір друкарський.
Друк офсетний. Умовн. друк арк. 1. Замовлення №1124. Тираж 100 прим.
Безкоштовно. Дільниця оперативного друку статистичного управління
Полтавської області. м. Полтава, вул. Пушкіна, 103.