НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ
ТЕМПЕРАТУР ім. Б.І. ВЄРКІНА

На правах рукопису

ФРИНТОВ Олександр Євгенійович

ОПЕРАТОРИ, ЩО ЗБЕРІГАЮТЬ СУБГАРМОНІЧНІСТЬ, І ДЕЯКІ ЗАДАЧІ КЛАСИЧНОГО КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ

01.01.01—математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Харків—1995

Дисертація є рукописом.

Роботу виконано у фізико-технічному інституті низьких температур НАН України.

Офіційні опоненти:

1. доктор фізико-математичних наук, професор
   Тамразов Промарз Мелікович
2. доктор фізико-математичних наук, професор
   Ронкін Лев Ісаакович
3. доктор фізико-математичних наук, доцент
   Фаворов Сергій Юрійович

Провідна організація:

Львівський державний університет, м. Львів

Захист відбудеться 25.12 1995 р. о 14⁰⁰ год. на засіданні спеціалізованої ради Д 02.35.01 при фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України за адресою: 310164, м. Харків, пр. Леніна 47.

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці фізико-технічного інституту низьких температур, Харків, пр. Леніна 47.

Автореферат розіслано 24.11 1995 р.

Вчений секретар
Спеціалізованої Ради
доктор фізико-математичних наук В.П. Котляров

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Предмет дослідження.

Як відомо, головним об'єктом комплексного аналізу є голоморфні функції, тобто функції, визначені у деякій відкритій області комплексної площини і диференційовні у кожній точці. Диференційовність у комплексній площині, на відміну від диференційовності на дійсній осі, накладає досить жорсткі обмеження на поведінку функцій, зокрема, такі функції у кожному крузі своєї області визначення допускають степеневе розвинення

$$f(z+z_0)=\sum_{1}^{\infty} a_k z^n \,,$$

і є узагальненням поліномів.

Якщо ми подамо голоморфну функцію у вигляді суми її дійсної та уявної частин $f(z)=u(z)+iv(z)$, то функції $u(z)$ та $v(z)$ будуть гармонічними, тобто задовольнятимуть рівняння Лапласа

$$\Delta u(x+iy)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,.$$

Якщо функція $f(z)$ є голоморфною, то $\log|f(z)|$ буде гармонічною функцією на всій області визначення $f(z)$ за виключенням тієї множини, де $f(z)$ дорівнює нулю, і отже, задовольняє співвідношення

$$\log|f(z_0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(z_0+\rho e^{i\psi})|\,d\psi$$

для всіх ρ та z_0 таких, що круг $\{|z-z_0|<\rho\}$ не містить коренів функції f. Для кругів, що містять корені функції

$f(z)$, матиме місце нерівність

$$\log|f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(z_0+\rho e^{i\psi})|\,d\psi\,.$$

Нагадаємо, що функція $f(z) \not\equiv -\infty$ називається субгармонічною в деякій області, якщо вона там півнеперервна зверху і задовольняє нерівність

$$u(z_0) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+\rho e^{i\psi})\,d\psi\,.$$

Уже згадувалось раніше, логарифми модулів голоморфних функцій є субгармонічними, хоча клас субгармонічних функцій значно ширший. З іншого боку, клас субгармонічних функцій побудований простіше, ніж клас логарифмів модулів голоморфних функцій, бо

субгармонічні функції утворюють опуклий конус,

максимум субгармонічних функцій є субгармонічною функцією.

Завдяки простоті визначення та тісному зв'язку з аналітичними функціями, субгармонічні функції грають дуже важливу роль у класичному комплексному аналізі, бо дуже багато фактів комплексного аналізу можуть бути отримані з використанням тільки властивості "субгармонічності" досліджуваного об'єкту (оцінки гармонічних мір, різного роду теореми єдиності для аналітичних функцій, функціональні нерівності та т.ін.). Головним пунктом застосування субгармонічних функцій у комплексному аналізі є принцип максимуму, який стверджує: якщо субгармонічна функція u на *межі області визначення* не перевищує деякої гармонічної у цій же області функції, то ця нерівність має місце також і *всередині області визначення*.

В силу відміченого вище, актуальне значення мають оцінки субгармонічних функцій, які використовуються у різних галузях комплексного аналізу (яка є основою різного роду теорем єдиності). У 1973 році A. Baernstein запропонував принципово нове перетворення субгармонічних функцій, основна властивість якого – збереження субгармонічності. Він назвав це перетворення *-функцією. Це перетворення визначається таким чином: нехай $u(z)$ – субгармонічна функція у кільці $z = re^{i\psi}$, $r \in (r_1, r_2)$, тоді *-функція має вигляд

$$u^*(re^{i\theta}) = \sup_{\mathrm{mes}\,(E)=2\theta} \int_E u(re^{i\psi})\, d\psi\,.$$

Це перетворення дало змогу зводити оцінки для дуже складно побудованих субгармонічних функцій до досить простих (до оцінок субгармонічних функцій, що мають деякі властивості симетрії). Введення *-функцій дало змогу A. Baernstein'у розв'ясзати ряд проблем комплексного аналізу, які на протязі тривалого часу не піддавалися розв'язанню. Серед цих проблем була відома гіпотеза Littlewood'a щодо точної оцінки L^2-норми однолистих функцій класу S.

У дисертації будуються та досліджуються оператори, що зберігають субгармонічність (подібно до *-функції A. Baernstein'a). Застосовуючи ці оператори, автор вирішує ряд задач комплексного аналізу, серед яких

доведення гіпотези Б.Я. Левіна про точну оцінку субгармонічної функції скінченного степеня та обмеженої на деякій відносно щільній множині дійсної осі;

доведення гіпотези Anderson'а про справедливість $\cos\pi\rho\Delta$-нерівності для цілих функцій скінченного порядку, що подаються лакунарними степеневими рядами;

доведення гіпотези A. Weitsman'а про точну оцінку L^1-норми функції Гріна областей, що не містять "довгих дуг", та застосування цієї нерівності для одержання точної оцінки у задачі про максимальні дуги кола $|z| = r$, на яких мероморфна функція скінченного порядку обмежена.

Побудовані дисертантом оператори, що зберігають субгармонічність, знаходять застосування в роботах інших авторів, наприклад, нещодавно, використовуючи один з побудованих у дисертації операторів, А. Солинін розв'язав задачу В. Дубініна про точну оцінку гармонічної міри інтервалу відносно областей, що не містять "довгих інтервалів".

Поряд з операторами, що зберігають субгармонічність, у дисертації розв'язується ряд задач комплексного аналізу, пов'язаних з питаннями повноти експоненціальних і поліноміальних систем у функціональних просторах; деякі задачі комплексного аналізу, що прийшли з теорії ймовірностей; задачі теорії розподілу значень цілих та мероморфних функцій, пов'язані з асимптотичною поведінкою їх модулів. Серед них

достатні умови повноти поліномів у просторах $L^2(\mu)$ з дискретними мірами μ, що дають позитивну відповідь на одне з запитань P. Koosis'а;

одне з узагальнень теореми єдиності Macintyre'а для рядів Діріхле з лакунами Фейєра;

задача про характеризацію Гауссових розподілів лакунами семіінваріантів імовірносного розподілу (розв'язання однієї з задач Л. Клєбанова);-

задача W. Hayman'а про можливу асимптотичну поведінку частки $\log \mu(r, f) / \log M(r, f)$ для цілих функцій порядку більшого одиниці (будується контрприклад до його гіпотези, що верхня границя цього відношення не менше -1);

Результати дисертації знаходять подальший розвиток і застосування у роботах інших математиків. Наприклад, розвиваючи та застосовуючи методику, запропоновану у роботі [5], А. Борічев і М. Содін одержали достатні умови щодо повноти поліномів у вагових просторах $L^2(\mu)$ (у деякій мірі таких, що не можуть бути уточнені); J. Rossi, A. Weitsman і автор використовували екстремальну оцінку функцій Гріна областей, що не містять "довгих дуг"; D. Drasin використовував контрприклад до гіпотези W. Hayman'а як основу для розв'язання однієї задачі, запропонованої W. Hayman'ом.

У дисертації запропонований підхід до розв'язування екстремальних задач класичної теорії потенціалу, який засновується на застосуванні операторів, що зберігають субгармонічність. Автором знайдені нові оператори з цією властивістю. Ці оператори успішно застосовуються автором для розв'язування різних екстремальних задач теорії потенціалу, розв'язок яких не вдавалося одержати іншими методами. Варто відмітити, що метод "субгармонічних операторів" дозволяє розв'язувати складні екстремальні задачі досить простими методами. Оцінки, що грунтуються на цьому методі у комбінації з методом граничних функцій, не відрізняються звичайною в таких випадках громіздкістю та є досить прозорими. У дисертації подано розв'язки ряду задач комплексного аналізу, що на протязі тривалого часу були відкритими проблемами. Результати дисертації знаходять широке застосування в подальших дослідженнях у галузі комплексного аналізу, ефективно використовуються іншими математиками. Результати, щодо операторів, які зберігають субгармонічність, є доброю базою для створення загальної теорії таких операторів. Вони зарекомендували себе як могутній аналітичний засіб для розв'язування різноманітних екстремальних задач комплексного аналізу.

Мета та методика дослідження.

У дисертації широко використовуються різноманітні методи класичної теорії потенціалу, такі як класична теорія субгармонічних функцій, її сучасні досягнення; методика дослідження асимптотичної поведінки цілих та мероморфних функцій, яка грунтується на використанні граничних функцій; сучасні досягнення теорії потенціалу щодо тонких топологій. Особлива увага в дисертації приділяється методиці застосування операторів, що зберігають субгармонічність, до різноманітних екстремальних задач.

Метою дисертації є:

а) Побудування та дослідження властивостей операторів, що зберігають субгармонічність; розробка методики їх застосування;

б) Розв'язання конкретних задач комплексного аналізу, що грунтується на розроблених методах;

Наукова новизна, теоретична і практична цінність.

Усі результати дисертації є новими науковими дослідженнями. Як було відмічено вище, у дисертації знайдено розв'язок ряду актуальних задач класичного комплексного аналізу. Розроблені автором методи знаходять широке використання в сучасному аналізі та дослідженнях українських і зарубіжних математиків. Субгармонічні оператори, побудовані автором, та методики їх застосування є могутнім засобом для розв'язання задач комплексного аналізу. Вони застосовуються в дослідженнях інших математиків і ефективно діють.

У дисертації вперше побудовані (досить просто конструйовані) деякі нові оператори, головною властивістю яких є збереження субгармонічності. Грунтуючись на цій властивості операторів, їх застосування дає ефективний розв'язання ряду задач комплексного аналізу, розв'язок яких не вдавалося одержати іншими методами.

У дисертації подано розв'язання ряду інших задач комплексного аналізу (що в тій чи іншій мірі спираються на методики, розроблені автором), які були відкритими проблемами. Розв'язки цих задач, запропоновані автором дисертації, дають остаточну відповідь на ці питання.

Результати дисертації використовуються у комплексному аналізі та можуть бути застосовані для побудови теорії субгармонічних операторів, яка б давала можливість відносно повного опису операторів, що зберігають субгармонічність, та дослідження їх загальних властивостей з метою використання останніх у різноманітних задачах класичної теорії потенціалу (таких, як оцінки гармонічних мір, різного типу теорем єдиності, оцінки геометричних характеристик множин типу "місткість", метрики Пуассона та таке інше).

На захист виносяться такі основні положення:

1. Побудування нових операторів, що зберігають субгармонічність;
2. Застосування побудованих операторів для розв'язання конкретних задач аналізу;
3. Розв'язання деяких задач щодо повноти поліноміальних та експоненціальних систем у функціональних просторах;
4. Розв'язання деяких задач, пов'язаних з симетрізацією областей; задач теорії ймовірностей, розв'язання яких базується на розвинутих автором методах, і побудування деяких прикладів субгармонічних функцій.

Наукова вірогідність результатів.

Усі результати дисертації є математичними твердженнями, які доведено на прийнятому у сучасної математиці рівні строгості.

Апробація роботи.

Результати дисертації доповідалися на конференціях з комплексного аналізу в м. Черноголовка Московської області (1983, 1985рр.), на Банаховському семестрі у Варшаві

(Польща, 1992р.); прочитані лекції у літній школі з теорії потенціалу в Йоенсуу (Фінляндія, 1993р.), на Неванліннов-ському Колоквіумі в Йоенсуу (Фінляндія, 1995р.), а також на семінарах: Львівський держуніверситет (1986р.), Петербурзьке відділення МІ ім.Стеклова (1985р.), Харківський держуніверситет (1983–1994рр.), Іллінойський університет (Urbana, US, 1993р.), університет Purdue (West Lafayette, US, 1993р.), Вашингтонський університет (St. Louis, US, 1993р.), Вірджинський технологічний інститут (Blacksburg, US, 1993р.), університет штату Kentucky (US, 1993р.), університет Uppsala (Швеція, 1994р.), Копенгагенський університет (Данія, 1994р.), технологічний інститут м.Трондхейм (Норвегія, 1994р.), університет Йоенсуу (Фінляндія, 1995р.), а також на ряді семінарів у Фізико-Технічному Інституті Низьких Температур у м.Харкові.

Публікації.

Основний зміст дисертації опубліковано в 11 роботах [1–11].

Структура та обсяг роботи.

Дисертацію викладено англійською мовою на 160 сторінках тексту, зверстаного на LaTeX (style{12pt, article}). Вона містить: зміст, вступ, чотири частини (поділені на розділи), список літератури (63 найменувань) та один рисунок. Кожна частина має невеликий вступ, що є інтродукцією до її змісту. Розділи, як правило, розпочинаються з вступу, який містить основні означення, конкретні описання проблем, що розв'язуються у розділі. Деякі розділи поділені на параграфи, які містять закінчені положення або доведення. Нумерація формул та теорем, що використовується у дисертації, – наскрізна у кожному розділі; перші цифри її вказують на номер розділу. Нумерація розділів наскрізна по всій дисертації (номер частини в нумерації не відображається). В авторефераті ми цитуємо теореми та положення дисертації, використовуючи таку нумерацію: (# розділу.# ствердження).

ЗМІСТ

Перша частина є ядром дисертації та має назву "Оператори, що зберігають субгармонічність, та задачі, які вони розв'язують". Основні результати опубліковані у [1, 2, 3]

Основою дослідження є така теорема A. Baernstein'a

Теорема (A. Baernstein). *Нехай $u(z)$ є субгармонічною функцією у кільці $A = \{|z| \in (r_1, r_2)\}$. Тоді функція*

$$u^*(re^{i\theta}) = \sup_{\mathrm{mes}\,(E)=2\theta} \int_E u(re^{i\psi})\,d\psi$$

є субгармонічною у півкільці $\{z = re^{i\theta} : r \in (r_1, r_2)\,\theta \in (0, \pi)\}$.

Ця теорема, що доведена у 1973 році, надала могутнього поштовху щодо розв'язання ряду екстремальних задач теорії потенціалу, теорії розподілу значень цілих та мероморфних функцій, геометричної теорії функцій і деяких інших галузей аналізу.

Дослідження, проведені у першій частині дисертації, розпочались із спроби автора використати *-функцію A. Baernstein'a для такої задачі теорії потенціалу (відомої як задача Б.Я.Левіна):

Нехай $\Pi = \{|\Im z| < 1\}$ є смугою та нехай D – замкнена множина на дійсній осі, що є відносно густою по мірі, тобто, знайдуться такі l і δ, що міра перетину множини D з кожним інтервалом довжини $2l$ не менше, ніж 2δ. Як добути найкращу оцінку зверху для гармонічної міри межі смуги $\partial\Pi$ відносно області $\Pi \setminus D$. Відповідно до гіпотези, що пропонував Б.Я.Левін, така оцінка повинна досягатись на деякій екстремальній функції, яка є гармонічною мірою *періодичної* відносно густої множині D_0, що є поєднанням усіх інтервалів довжини 2δ та з відстаннямі $2l$ між центрами сусідніх інтервалів.

Ця задача здавалась "очевидною" з точки зору її фізичної інтерпретації як розподілення температури у середині смуги, коли на її межі підтримується температура 1, а на множині D – 0. Але ми б бажали застерегти від фізичної "очевидності" відповіді. Цьому є дуже добрий приклад: кожний фізик знає, якщо розсунути обкладки конденсатора (збільшити відстань поміж ними, не змінюючи їх форми), то місткість конденсатора зменшиться. Давайте зараз уявімо, що обкладки конденсатора складаються з кількох пластин, і ми збільшимо відстань тільки між деякими з них, не змінюючи положення решти. Запитайте першого-ліпшого фізика, що станеться з місткістю у цьому випадку? У 99% випадків ви почуєте впевнену відповідь, що місткість зменшиться. Але чудовий приклад, побудований П.М.Тамразовим в його роботі, присвяченій розв'язанню однієї з задач Гончара про мінімізацію місткості плоских конденсаторів, демонструє, що це не завжди так. У деяких випадках місткість не зменшується, а збільшується!

Задача Б.Я.Левіна, незважаючи на її "фізичну очевидність", не піддавалася простому розв'язанню, а її "фізична очевидність" була лише уявною, бо маючи на увазі її температурну інтерпретацію, ми мимоволі припускали, що на межі підтримується не постійна температура, а що межа є джерелом тепла деякої постійної інтенсивності, яким наприклад, є дійсний холодильник або нагрівник!

Спроба застосувати *-функцію для розв'язання задачі не увінчалась успіхом. Потім була зроблена інша спроба: побудувати будь-який новий оператор, що зберігав би субгармонічність (як це робить *-функція) та який би дозволяв розв'язати поставлену задачу. Цим оператором виявилось побудоване автором узагальнення *-функції A. Baernstein'а, яке означається таким чином:

$$u_l^*(re^{i\theta}) = \sup\{\int_E u(re^{i\psi})\,d\psi : \operatorname{mes}(E) = 2\theta,\, \operatorname{diam}(E) \le 2l\}$$

відзнака якого від *-функції лише у тому, що супремум береться не по *всім* множинам E міри 2θ, а лише по тих із них, які *можна розмістити у будь-якому інтервалі довжини* $2l$. Зрозуміло, що область значення визначеної вище функції інша, ніж область визначення *-функції (це не ціле півкільце, а лише кільцевий сектор $\arg\theta \in (0, l)$). Але цей оператор зберігає субгармонічність та ефективно розв'язує задачу Б.Я.Левіна (див. розділ 3, частина 1).

Далі була поставлена мета знайти деякі інші оператори, що зберігають субгармонічність. Незважаючи на те, що насправді можливо побудувати цілу сім'ю таких операторів, виходячи із зображення

$$(Au)(re^{i\theta}) = \sup_{\mu\in M(\theta)} \int u(re^{i\psi})\, d\mu(\psi)$$

якщо дати відповідний опис сім'ї мір $M(\theta)$, що залежать від θ. Ми обмежилися у дисертації лише операторами u_l^* і $\tilde{u}$ (останній визначається

$$\tilde{u}(re^{i\theta}) = \sup_{|\psi|\le|\theta|} u(re^{i\psi}),$$

тому що вони є найпростішими, та що важливо, тими з них, що вже знайшли ефективне застосування при розв'язанні екстремальних задач.

У розділі 2, присвяченому доведенню субгармонічності та дослідженню властивостей оператора $\tilde{u}$, ми також застосовуємо цей оператор для доведення гіпотези Андерсона, яка складається з того, що ціла функція $f(z)$, що може бути зображена лакунарним степеневим рядом з лінійною щільністю показників Δ, та порядок якої не перевищує ρ, $\rho\Delta \le 1$, задовольняє нерівність

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log|f(r)|}{\log M(r,f)} \ge \cos\pi\rho\Delta\,.$$

Використовуючи техніку граничних функцій та субгармонічні властивості оператора, ми зводимо цю задачу до аналогічної задачі у класі субгармонічних функцій $\mathcal{A}(\Delta)$, тобто таких що

$$\max_{\psi} u(re^{i\psi}) = \max_{\psi\in I} u(re^{i\psi})$$

для будь-якого інтервалу I довжини $2\pi\Delta$. Потім, використовуючи оператор $\tilde{u}$, ефективно розв'язуємо її. Водночас ми приводимо результати, що узагальнюють гіпотезу Андерсона, які дістаються застосуванням тієї же техніки.

У розділі 4 ми досліджуємо дію оператора u_l^* на дельта-субгармонічні функції та доводимо деякі теореми, зміст яких можна охарактеризувати таким чином: функція u_l^*, де u – дельта-субгармонічна функція, може бути перетворена до *субгармонічної* за допомогою деякого ефективно підібраного доданка, який компенсує супергармонічний внесок функції u. Трудноші є у тому, що цей доповняльний доданок можна вибрати не єдиним чином, і тому це треба зробити так, щоб створена таким чином функція була б не тільки *субгармонічною*, але і *гармонічною* для широкого класу початкових функцій. Правило тут дуже просте – чим ефективніше підібрано цей доповняльний доданок, тим ефективніше застосування цього оператора для розв'язання тієї чи іншої екстремальної задачі.

Доведені теореми про субгармонічність дають ефективне розв'язання задачі A. Weitsman'a щодо найкращої оцінки зверху для

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(re^{i\psi},1)\,d\psi\,,$$

де $G(z,\xi)$ є функцією Гріна області Ω, яка характеризується умовою: Ω не містить дуг розхилу більше, ніж $2l$ для усіх кіл $|z|=r$, $\forall r>0$, (область не є обов'язково однозв'язною, та ми означаємо, що функція Гріна дорівнює нулю, якщо z або ξ не належать Ω). Згідно з гіпотезою точна нерівність має досягатися на функції Гріна кута $|\arg z|<l$.

Ця задача розв'язується у розділі 4, а в розділі 5 ми надаємо доведення гіпотези A. Weitsman'a про те, що довжина дуги

$$\theta(r) = \text{максимальна дуга}\{z:\, u(z) > 0\} \cap \{|z| = r\},$$

де u – дельта-субгармонічна функція порядку ρ з Неванлінновським дефектом δ, задовольняє таку нерівність

$$\limsup_{r\to\infty} \theta(r) \ge \min(2\pi, 4\rho^{-1} \arcsin\sqrt{\delta/2}).$$

Цей результат є істотним уточненням теореми A. Baernstein'a, яка стверджує, що остання оцінка має місце не для максимальної кутової довжини дуги, а для кутової міри цієї множини.

Друга частина дисертації присвячена розв'язанню двох задач, пов'язаних з питаннями повноти експоненціальних та поліноміальних систем в функціональних просторах. Основні результати надруковано в [4, 5].

У розділі 7, присвяченому проблемі Макінтайра, ми маємо справу з так званими Мюнцевськими системами, тобто системами мономів x^{n_k}, де $\sum(1/n_k) < \infty$. Згідно з відомою теоремою Мюнца система є неповною в просторі $L^2[0,1]$, тобто не кожна інтегровна функція з L^2 може бути добре апроксимована поліномами, утвореними з цих мономів. Аналогічне ствердження є вірним для функціональної системи $\exp \lambda_k z$ у просторі $L^2(-\infty, 0)$. Одної такої неповноти досить для доведення такої теореми Макінтайра:

Теорема (Макінтайр). *Ціла функція*

$$f(z) = \sum a_k e^{\lambda_k z},$$

де ряд $1/\lambda_k$ *збігається та* $\lambda_k > 0$, *не може бути обмеженою на дійсній прямій, якщо вона не тотожний нуль.*

Гіпотеза Макінтайра полягає у тому, що ця функція не може бути також обмеженою на будь-якій кривій, яка необмежена справа. На жаль, для доведення цієї гіпотези недостатньо тільки факту про неповноту Мюнцєвської системи на будь-якій частині цієї кривої, що обмежена справа (позначимо таке обмеження як $\gamma_y = \gamma \cap \{\Re z < y\}$). Насправді, розв'язання цієї проблеми пов'язано з таким питанням: як оцінити відстань у підхідній метриці $L^2(\gamma_y)$ між будь-яким фіксованим представником системи $\exp \lambda_k z$ і лінійною оболонкою функцій, що залишилися у системі. Якби вдалося отримати таку оцінку, що не залежить від γ_y, то гіпотезу Макінтайра було б доведено.

Ми доводимо таку теорему єдиності:

Теорема 7.1. *Ціла функція $f(z)$, що може бути зображена рядом Діріхле з лакунами Фейєра, не може бути обмеженою на множині яка є необмеженою справа та є об'єднанням відрізків фіксованої довжини та будь-якої орієнтації.*

З цієї теореми випливає гіпотеза Макінтайра в окремому випадку, коли крива є ламаною, що містить нескінченну множину ланок довжини, яка більше деякого фіксованого числа.

У розділі 8, що присвячується питанням повноти поліномів у вагових просторах $L^2(\mu)$, доведені достатні умови повноти для мір μ, що зосереджені у коренях деякої цілої функції $\Phi(z)$ класу Гамбургера, $\mu\{\lambda\} = (1/\Phi'(\lambda))^2$. Достатні умови на множину коренів функції Φ, що забезпечуватимуть таку повноту, подаються в геометричних термінах. Інтерес до цих особливих вагових просторів не є випадковим: справа у тому, що з кожною проблемою моментів Гамбургера пов'язана (можливо побудувати) деяка функція класу Гамбургера, та питання про опис розв'язків проблеми моментів тісно пов'язаний з питанням чи є поліноми скрізь щільною множиною у ваговому просторі $L^2(\mu)$.

Достатні умови, що доведені нами, хоч і є вельми далекими від необхідних, однак то є перша спроба надати яку-небудь геометричну характеристику кореневих множин функцій класу Гамбургера, що забезпечує повноту поліномів у цих вагових просторах. Нами доведено, що коли множина коренів регулярна (створює R-множину у смислі Б.Я.Левіна порядку $\rho < 1/2$), то така множина є кореневою множиною деякої функції Гамбургера, що забезпечує повноту поліномів у цих просторах. Доведення грунтується на безпосередньому оцінюванні поліноміальних мажорант типу Холла – Мергеляна. Деякий час здавалося, що такий підхід до оцінок Мергелянівських мажорант не зможе дати будь-яких геометричних достатніх умов, що є близькими до необхідних (через специфіку використування поведінки функцій з коренями на R-множинах), однак зовсім недавно, застосовуючи техніку оцінювання Мергелянівських мажорант, розроблену в дисертації, А. Борічеву і М. Содіну вдалося отримати достатні (у деякому смислі такі, що не можна поліпшити) геометричні умови на кореневі множини, що забезпечують повноту поліномів в цих просторах (зараз їх робота готується до публікації).

У частині III дано розв'язання двох задач, коріння яких лежать у теорії ймовірностей. Основні результати надруковано в [6, 7, 8].

Наведемо один із результатів щодо питання, як багато лакун може мати послідовність семіінваріантів імовірностного розподілу.

Теорема 10.3. *Нехай $\varphi(z) = \exp f(z)$ є аналітичною характеристичною функцією у точці $z = 0$. Якщо $f(z)$*

$$f(z) = \sum c_k z^{\lambda_k}$$

та $\Delta = \lim k/\lambda_k = 0$, то φ є характеристичною функцією Гауссівського розподілу.

Якщо в умовах цієї теореми функція $f(z)$ є цілою, то аналогічне ствердження вірне при $\Delta < 1/2$.

Питання, що розв'язуються в розділі 9, пов'язані з точною оцінкою зверху для максимально можливого порядку зростання цілих характеристичних функцій, які не мають коренів всередині деякого кута, який оточує уявну вісь (або має відносно небагато коренів у цьому куті). Використовуючи техніку перетворення субгармонічних функцій, вдається отримати точні оцінки для порядку (які залежать від обсягу кута, у якому функція не має коренів).

Основні результати частини IV надруковано в [9, 10, 11]. У частині IV розділу 12 дисертації будується контрприклад до однієї з гіпотез Хеймана. Було відомо, якщо порядок цілої функції ≤ 1, то верхня границя частки $\log \mu(r, f)/\log M(r, f)$ (логарифма мінімуму до логарифма максимуму) не менше, ніж -1. З іншого боку, якщо ми замінимо у останній частці мінімум на значення функції на будь-якій кривій, то ця нерівність буде задовольнятися кожною цілою функцією (навіть нескінченного порядку). Якщо порядок скінченний, але досить великий, то був відомий приклад Хеймана, що частка $\log \mu(r, f)/\log M(r, f)$ може бути великим від'ємним числом.

Питання, що відбудеться з цією часткою, коли порядок є досить близький до 1, був відкритим, і гіпотеза Хеймана припускала, якщо ϵ є досить малим, та порядок функції $< 1+\epsilon$, то ця частка не менше, ніж -1.

Нами побудовано приклад цілої функції будь-якого наперед завданого порядку $\rho > 1$, для якого верхня границя цієї частки менше, ніж -1. Побудування прикладу використовує техніку перетворень субгармонічних функцій, що була розроблена раніш у дисертації, та апроксимаційні теореми В. Азаріна.

У розділі 13 подано нове доведення теореми В. Дубініна про то, що мінімальне значення гармонічної міри кола відносно круга з радіальними розрізами досягатиметься на крузі з рівнорозподіленими розрізами. На наш погляд, подане доведення є значно простішим, ніж того, що подане В. Дубініним (воно грунтується тільки на дисиметризаційному принципі Дубініна та не вимагає будь-якої попередньої роботи, використовуючи лише мінімізаційний принцип для інтегралів Діріхлє).

У розділі 14 ми подаємо контрприклад до однієї з гіпотез А. Солиніна. Цей приклад виявляє, що незавжди розв'язання екстремальної задачі для місткості веде до розв'язку аналогічної задачі для гармонічної міри.

Публікації

[1] Fryntov A. *Subharmonic functions and* $\cos(\pi\lambda)$*-theorems for entire functions represented by gap series* // Advances in Soviet Mathematics, 1992, V.11, P.205–222.

[2] Fryntov A. *One extremal problem of potential theory* // Soviet Math. Dokl., 1988, V.37, P.754–755.

[3] Fryntov A. *Extremal properties of Green functions and A. Weitsman's conjecture* // Transactions of AMS, 1994, V.345, No.2, P.511–525.

[4] Фрынтов А.Е. *Об одной теореме единственности для рядов Дирихле с лакунами Фейера* // В сб. Теория функ., функц. анал. и их пр., 1993, Т.57, Харьков, С.128–131.

[5] Фрынтов А.Е. *Об одной теореме единственности, связанной с полиномиальной аппроксимацией на дискретных множествах* Мат. физика, анализ, геометрия, 1994, Т.1, No.2, С.252–264.

[6] Фрынтов А.Е. *Характеризация Гауссовского распределения последовательностью его семиинвариантов* // Теория вероятностей, 1988, Т.4, С.687–693.

[7] Фринтов О.Є. *Характеризація Гауссівського розподілу лакунами в послідовності семіінваріантів* // ДАН УРСР, Сер.А, 1987, Т.3, С.22–24.

[8] Фрынтов А.Е. *Об одном свойстве конуса, порожденного мультипликативными сдвигами субгармонической хребтовой функции* // В сб. Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов, Киев, Наукова думка, 1990, С.33–39.

[9] Fryntov A., *A counterexample concerning the maximum and minimum of a subharmonic function* // Proceedings of AMS, 1994, V.122, No.1, P.97–103.

[10] Fryntov A. *On an estimate of Harmonic measures* // ДАН Украины, Сер.А, **10**(1994), Т.10, С.20–22.

[11] Fryntov A. *A simple proof of Dubinin's theorem* // Мат. физика, анализ, геометрия, 1995, Т.2, No.3, pp.347–355.

Abstract

Alexander Fryntov. *Operators Preserving Subharmonicity and Some Problems of Classical Complex Analysis* Thesis for a Doctor Degree in Physics and Mathematical Sciences. **Speciality 01.01.01 — Mathematical Analysis.** B.I.VERKIN INSTITUTE FOR LOW TEMPERATURE & ENGINEERING OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKNAINE. Kharkov – 1995.

There are defended 11 scientific works in which there are constructed and investigated operators preserving subharmonicity and a series of problems of classical analysis are solved with application of these operators. Among them are a problem of B.Ya. Levin on extremal estimate of subharmonic functions of finite degree and bounded on a relatively dense set of the real axis; a problem of A. Weitsman on a sharp estimate of L^1-norm of the Green function of domains not containing arcs of opening greater than some fixed number l; an Anderson problem on extension of $\cos \pi\lambda$-relation on gap series.

There are solved a number of problems of classical complex analysis that pertain to the following topics: weight polynomial approximation (sufficient conditions for completeness of polynomials in discret weighted spaces, giving a positive answer to one of questions by P. Koosis), probability theory (characterization of Gaussian distributions by gaps of the sequence of their semi-invariants), value distribution theory of entire and meromorphic functions (counter example to a W. Hayman conjecture).

There are solved some other relative problems as well.

Аннотация

Фрынтов Александр Евгеньевич. *Операторы, сохраняющие субгармонiчность, и некоторые задачи классического комплексного анализа.* Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. **Специальность 01.01.01 — Математический Анализ.** *Физико-Технический Институт Низких Температур им.Б.И.Веркича НАН Украины.* Харьков – 1995.

Защищается 11 научных работ, в которых строятся и исследуются операторы, сохраняющие субгармоничность, решается ряд задач классического анализа з помощью применения таких операторов. Среди них задача Б.Я.Левина об экстремальной оценке субгармонических функций конечной степени и ограниченных на относительно плотном множестве вещественной оси, задача А. Вейцмана о точной оценке L^1-нормы функции

Грина для областей, не содержащих д... фиксированное число l. одна задача А... $\cos\pi\lambda$-теорем на лакунарные ряды.

Решен также ряд задач классического комплексного анализа, относящихся к следующим областям: весовая полиномиальная аппроксимация (достаточные условия полноты в весовых дискретных пространствах, дающие положительный ответ на один из вопросов П.Кусиса), теория вероятностей (характеризация Гауссовских распределений лакунами последовательностей их семиинвариантов), теория распределения значений целых и мероморфных функций (контрпример к одной из гипотез У.Хеймана).

Также приведены решения некоторых родственных задач.

Ключові слова: субгармонічна функція, гармонічна функція, ціла функція, мероморфна функція, дельта-субгармонічна функція, функція Гріна, гармонічна мера, поліноміальна апроксимація, поліноміальна мажоранта, хребтова функція, характеристична функція, ймовірностний розподіл, Гауссов розподіл, симетрізація, місткість, конденсатор, інтеграл Діріхле, лакунарність, екстремальна оцінка.

Ответсвенный за выпуск Г.М. Фельдман

Подписано к печати 30.10.1995 г. физ. п.л. 2
Уч.-изд. л. 2 Заказ № 41 , Тираж 100 экз.

Ротапринт ФТИНТ НАН Украины, Харьков 164, пр. Ленина, 47.