

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

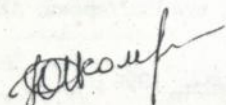
Інститут Механіки ім. С.П.Тимошенка

На правах рукопису

ХОМА Юрій Іванович

**ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА МЕХАНІКИ
КРИХКОГО РУЙНУВАННЯ МАТЕРІАЛІВ
З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ТРІЩИНОЮ ПРИ
ОСЬОВОМУ СТИСКУ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла



АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на одбуття наукового ступеня
кандидата фізико - математичних наук

Київ - 1995

AB 33.607

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в

Інституті механіки ім. С.П. Тимошенка
Національної академії наук України.

Науковий керівник –

академік НАН України,
доктор технічних наук,
професор ГУЗЬ О.М.

Науковий консультант –

доктор технічних наук,
професор НАЗАРЕНКО В.М.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук,
професор БАБИЧ І.Ю.

доктор фізико-математичних наук,
професор МАРТИНЕНКО М.А.

Провідна установа –

Інститут електрозварювання
ім Є.О. Патона
Національної академії наук України.

Захист відбудеться " 26 " грудня 1995 р. о 10 го-
дині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.03.03 при Інституті
механіки ім. С.П.Тимошенка Національної академії наук України за
адресою: 252057, Київ, вул. Нестерова, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотечі Інституту ме-
ханіки ім. С.П.Тимошенка НАН України (Київ, вул.Нестерова, 3).

Автореферат розіслано " 25 " листопада 1995 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради

доктор технічних наук, професор

Ч.Черниш І.С. Чернишенко

ЛНБ України ім.В.Стефаніка



00754950 (U)

ЛНБ ім. В. Стефаніка
АН України

AB - 33.607

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню осесиметричних задач механіки руйнування стисливих і нестисливих пружних матеріалів, підданих стиску вздовж паралельних твірних кругової циліндричної тріщини.

Актуальність і ступінь дослідженості тематики дисертації. Розвиток науки і сучасних технологій висуває нові вимоги до досліджень в такій фундаментальній галузі як механіка і, зокрема, до вивчення руйнування матеріалів з дефектами. Значна кількість досліджень, проведених до цього часу, та їх важливість зумовили формування механіки руйнування як самостійного напрямку в механіці твердого деформованого тіла, з яким пов'язують вивчення вичерпання несучої здатності матеріалів і елементів конструкцій. Тобто досліджується та стадія деформування на якій проявляються різноманітні механізми руйнування. Інженерно-конструкторська практика постійно потребує розробки нових методик розрахунку і прогнозування ймовірності руйнування матеріалів, що мають різного роду дефекти при різних умовах навантаження. Явище руйнування часто є важким матеріальним обитком, тому дослідження цього складного явища дає можливість обґрунтовано визначати запаси міцності, що веде до підвищення довговічності і надійності матеріалів та елементів конструкцій, і отже, є виключно важливою практичною задачею. Про актуальність тематики свідчить також зростаюча кількість робіт, присвячених дослідженню різних аспектів руйнування.

Основи класичної механіки руйнування були закладені фундаментальними працями Гріфітса, Ірвіна, Орована про поширення тріщин в крихких та квазікрихких матеріалах.

В подальшому значний вклад в становлення механіки руйнування і її розвитку до сучасного рівня, поряд з авторами основоположних робіт внесли такі вчені як В.М. Александров, А.Е. Андрейків, Г.І. Баренблатт, В.В. Болотін, Н.М. Бородачов, О.М. Гувь, А.А. Камінський, Г.С. Кіт, В.Д.Кулісь, М.Я. Леонов, І.Я. Маркузон, Е.М. Морозов, Н.Ф. Морозов, В.В. Новожилов, В.В. Панасюк, В.З. Партон, Ю.М. Подільчук, Ю.М. Работнов, Л.І. Седов, Л.І. Слепян, В.П. Тамуж, А.Ф. Улітко, Я.С. Уфлянд, Г.П. Черепанов,

W.D. Collins, D.S. Dugdale, A.H. England, F. Erdogan, A.E. Green, G. Gupta, M.K. Kassir, L.M. Keer, H. Liebowitz, S. Nemat-Nasser, H. Neuber, J.R. Rice, G.C. Sih, I.N. Sneddon, A.A. Wells, M.L. Williams, T. Yokobori, A.R. Zak та інші.

Аналіз праць свідчить, що в більшості робіт, проведених в області механіки руйнування матеріалів з тріщинами досліджувались, в основному, задачі розтягу або всузу. Значно менша кількість досліджень присвячена задачам про стиск матеріалів. Причому, задачі для тіл з тріщинами, підданих дії стискаючих зусиль, що спрямовані вдовж дефектів, складають клас задач, який не описується в рамках існуючих модельних представлень класичної механіки руйнування. Специфіка такого роду задач полягає в тому, що в рамках лінійної механіки руйнування не враховуються складові навантажень, що діють вдовж тріщин. Оскільки КІН, які входять в формулювання класичних критеріїв руйнування, за такої схеми навантаження, дорівнюють нулю, тому застосування критеріїв руйнування, типу Гріфітса-Ірвіна неможливе.

При дослідженні згаданих задач вирізняють два етапи процесу руйнування: початковий етап, який характеризується втратою стійкості локального характеру в околі дефекту, і етап розвитку дефекту в закритичному (після втрати стійкості) стані.

Для дослідження згаданого початкового етапу руйнування широкого застосування набув наближений підхід, заснований на використанні прикладних теорій балок, пластин та оболонок. В його основу покладено механізм втрати стійкості стисненого елемента за Ейлером. Такий підхід був розвинений в працях В.В. Болотіна, Л.М. Качанова, А.М. Михайлова, Н.І. Ободан, Ю.Н. Работнова, Л.І. Слепiana, Г.П. Черепанова та інших. Однак, цей підхід має ряд істотних недоліків. По-перше, він є недостатньо строгим, оскільки в рамках цього підходу не враховується дійсний стан біля країв дефекту, внаслідок довільності вибору умов закріплення тонкостінного елемента. По-друге, цей підхід не можна застосовувати до "масивних" тіл, оскільки він дає значні похибки при визначенні критичних навантажень.

Новий критеріальний підхід, поєднаний цих недоліків, в рамках строгої постановки задач руйнування матеріалів при стиску вдовж тріщин був запропонований в працях О.М.Гузя. За критерій початку руйнування взято критерій з валученням співвідношень тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл (див. роботи

О.М.Гузя, І.Ю.Бабича та інших), згідно якого початок руйнування пов'язано з явищем втрати стійкості локального характеру в околі дефектів типу тріщин. Кількісним виразом цього критерію є критичні значення параметрів навантаження, що характеризують нестійкість біля тріщин.

Задачі механіки руйнування матеріалів при стиску вздовж тріщин в лінеаризованій постановці почали досліджуватися порівняно недавно. Основний вклад в ці дослідження зробили О.М. Гузь, В.М. Назаренко, В.І. Ключ, І.П. Стародубцев, І.О. Гузь, В.Л. Богданов, В.М. Александров, Л.М. Філіпова, L.M. Keer, S. Nemat-Nasser, A. Oganatnchai, С.Н. Wu. При цьому, необхідно зауважити, що роботи О.М. Гузя та його учнів базуються на загальному підході, який дозволяє розв'язувати такі задачі стосовно різних моделей матеріалів. Таким чином, дослідження для високоеластичних матеріалів проводяться в єдиній формі для стисливих і нестисливих матеріалів з довільним видом пружного потенціалу. Такий підхід легко узагальнюється на інші моделі деформованих тіл, наприклад композитні матеріали і пластичні тіла. При цьому конкретизація моделі матеріалу необхідна лише на етапі чисельного розв'язку, отриманої в загальному вигляді розв'язуючої системи рівнянь для обчислення величин і параметрів, що входять в цю систему.

В працях решти авторів дослідження виконані лише для деяких конкретних форм пружних потенціалів, у зв'язку з чим для кожного нового потенціалу всі викладки необхідно проводити спочатку. Розглянуто ряд задач для ізолюваних тріщин і системи тріщин, розташованих в одній площині.

В роботах авторів, дослідження яких базуються на загальному підході, були розглянуті задачі руйнування матеріалів при стиску вздовж тріщин стосовно найбільш поширеним схемам силового навантаження: плоскі задачі при одноосному стиску, просторові задачі при двохосному рівномірному стиску, а також для характерних схем геометричного розміщення дефектів в точки зору їх взаємодії між собою і з вільною поверхнею матеріалу. А саме, ізолювані не взаємодіючі тріщини, приповерхневі тріщини, розташовані паралельно вільній поверхні матеріалу, дві паралельні внутрішні тріщини, періодична система паралельних тріщин. Досліджені просторові неосесиметричні задачі при двохосному рівномірному стиску вздовж приповерхневих кругових тріщин.

Близькі за математичним апаратом проблеми досліджуються в контактних і змішаних задачах механіки деформівного твердого тіла. Значний вклад в їх розвиток зробили такі вчені: В.М. Александров, С.Ю. Бабич, Н.М. Бородачов, І.І. Ворович, В.Т. Грінченко, О.М. Гуов, М.О. Кільчевський, А.С. Космодаміанський, А.І. Лур'є, Н.І. Мухелішвілі, В.Б. Рудницький, Г.М. Савін, А.Ф. Улітко, і ряд інших авторів.

Таким чином, аналіз наведеного огляду свідчить про відсутність досліджень цілого класу задач про стиск матеріалів водовж тріщин, що розташовані на циліндричних поверхнях в рамках точної постановки з залученням співвідношень тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл. До цього часу, в рамках такого підходу досліджувалися задачі про руйнування матеріалів з тріщинами, розташованими виключно в площинах, водовж яких відбувався стиск матеріалів. Навіть в рамках добре розвиненої лінійної механіки руйнування відомо кілька робіт для тіл з дефектами у вигляді циліндричної тріщини. Дослідження для огаданої конфігурації дефекту проводилися в роботах М.А. Мартиненка та А.Ф. Улітка; В.Х. Сіруянца; F. Erdogan та T. Ozbek; H. Kasano, H. Matsumoto та I. Nakahara; T.N. Faris, K. Kokini та I. Demir.

Отже, за відсутності подібних досліджень в рамках лінеаризованої постановки тема дисертаційної роботи, що присвячена вивченню руйнування стисливих і нестисливих пружних матеріалів з циліндричною тріщиною при осьовому стиску є актуальною, а лінеаризовані задачі з вказаною геометрією дефекту раніше не розглядалися.

Мета роботи полягає в дослідженні в рамках тривимірної лінеаризованої теорії просторових осесиметричних задач механіки руйнування матеріалів з круговим циліндричним дефектом в умовах осьового стиску, включаючи : 1) постановку осесиметричних задач про руйнування високоеластичних пружних тіл, а також композитних матеріалів при стиску водовж паралельних твірних кругової циліндричної тріщини в єдиній формі для різних моделей матеріалів; 2) розв'язання на основі розвинутого аналітичного методу дослідження поставлених лінеаризованих задач, з залученням апарату теорії інтегральних перетворень Фур'є-Ханкеля, а також методу розкладів в ряди, з метою побудови розв'язуючої системи рівнянь; 3) одержання числових результатів для конкретних моделей матеріалів, та їх аналіз.

Наукова новизна і значущість результатів роботи

В дисертаційній роботі вперше розв'язані просторові осесиметричні задачі механіки руйнування пружних матеріалів з циліндричною тріщиною при осьовому стиску. З залученням співвідношень тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл дана постановка задач для стисливих і нестисливих матеріалів. На основі апарату теорії інтегральних перетворень Фур'є-Ханкеля отримані системи парних інтегральних рівнянь, які з використанням методу розкладів в ряди по функціям Беселя зведені до однорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Розроблено алгоритм чисельного дослідження одержаних задач на власні значення і одійснена його програмна реалізація для обчислень на ПК. Отримані числові результати для високоеластичних стисливих і нестисливих матеріалів з деякими видами пружних потенціалів, а також цілого ряду композитних матеріалів. На основі одержаних результатів досліджені закономірності впливу геометричних та механічних характеристик на критичні параметри навантажень.

Результати для тіл з тріщинами циліндричної конфігурації в рамках тривимірної лінеаризованої теорії отримано вперше.

Достовірність одержаних в роботі результатів та висновків забезпечується: коректністю постановки задач; використанням співвідношень тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл; застосуванням строгого аналітичного апарату дослідження; ефективною обіжністю використовованого методу чисельного дослідження; погодженістю результатів між собою і відсутністю протиріч у встановлених закономірностях якісного характеру загальним уявленням фізичної природи.

Теоретичне значення та практична цінність одержаних в роботі результатів полягають:

- у створенні методики, що дозволяє визначати критичні параметри навантаження в осесиметричних задачах механіки руйнування матеріалів з круговими циліндричними тріщинами при осьовому стиску;
- у розвитку аналітичних методів дослідження на основі апарату теорії інтегральних перетворень Фур'є-Ханкеля і методу розкладів функцій в ряди з метою побудови розв'язуючих систем рівнянь;

- у розробці алгоритму та програмної реалізації отриманих задач на власні значення для проведення чисельних розрахунків на персональних комп'ютерах, які можуть використовуватися в розрахунковій практиці конструкторських бюро підприємств різних профілів;
- у знаходженні значень критичних напружень і деформацій для різних моделей матеріалів;
- у встановленні закономірностей впливу геометричних параметрів дефекту та механічних характеристик матеріалів на досліджувані явища руйнування.

Реалізація та впровадження результатів, одержаних в дисертації. Наукові дослідження виконувались в рамках робіт, передбачених програмами та планами НДР Національної академії наук України. Результати, отримані в дисертаційній роботі, увійшли до звіту держбюджетної науково-дослідної теми N 1.3.1.246 п. "Створення теорії і методів дослідження стійкості та руйнування композитних матеріалів в тривимірній постановці з врахуванням уточнюючих факторів".

Апробація роботи.

Основні результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на семінарах відділу динаміки і стійкості суцільних середовищ Інституту механіки НАН України (1992 - 1995 рр.); науковому семінарі по напрямку "Механіка композитних і неоднорідних середовищ" при Інституті механіки НАН України (1995); I Всеукраїнській конференції молодих вчених вузів України (м. Київ, 1994); Всеукраїнській науково-технічній конференції "Розробка і впровадження прогресивних технологій в харчову і переробну промисловість" (м. Київ, 1995); II Всеукраїнській конференції молодих вчених України (м. Київ, 1995); XVII і XVIII конференціях молодих вчених Інституту механіки НАН України (Київ, 1992 - 1993).

Публікації. По результатах дисертації опубліковано 9 наукових праць. Основний зміст роботи відображено в публікаціях [1-7].

В працях, які написані в співавторстві з науковим керівником та науковим консультантом, академіку НАН України О.М. Гузю належить ідея проведення досліджень, а також запропоновано підхід, що ґрунтується на використанні вагальних розв'язків рівнянь лінеаризованої теорії стійкості деформованих тіл, професором В.М. Назарен-

ком дана постановка задачі, дисертантом розроблено метод їх розв'язання, проведено аналітичне та чисельне дослідження задачі на IBM- сумісних персональних комп'ютерах, отримано числові результати для конкретних моделей матеріалів. Співавторам належить участь в обговоренні та аналізі результатів.

Структура роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, трьох глав, висновків, додатку і списку літератури. Робота викладена на 134 сторінках, включаючи 10 рисунків і три таблиці. Бібліографічний список налічує 153 назви.

КОРОТКИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі подано огляд публікацій з теми дисертації, сформульована мета роботи і визначено її місце серед раніше проведених досліджень, обгрунтовано актуальність і новизну, теоретичне значення і практичну цінність роботи, а також коротко викладаються основні результати і обгрунтовується їх достовірність. Сформульовані положення, що виносяться на захист. Стисло наводиться виклад роботи по главам.

В першій главі сформульована загальна постановка просторових задач про стиск тіл вздовж тріщин. При цьому використані позначення, термінологія і підходи, викладені в монографіях О.М. Гуоя. В главі подаються загальні положення лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл, включаючи: відомості з нелінійної механіки деформівних тіл та тензорного аналізу; принципи побудови та основні співвідношення лінеаризованої теорії стійкості; загальні розв'язки лінеаризованих рівнянь при однорідних докритичних станах в довільній циліндричній системі координат. Формулюється критерій руйнування при стиску матеріалів вздовж тріщин, а також наводиться короткий огляд основних моделей деформівних тіл.

Основні положення прийнятого механізму руйнування при стиску матеріалів вздовж тріщин є однаковим для стисливих та нестисливих тіл і полягають в наступному. Початок руйнування твердого тіла при стиску вздовж тріщин визначається локальною втратою стійкості сталу рівноваги в околі тріщини. Критичні навантаження, що відповідають локальній нестійкості рівноваги біля дефекту визначаються в рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл. При рівномірному одноосному стиску матеріалів вздовж паралельних твірних циліндричних тріщин докритичний стан в околі

тріщин є однорідним і для просторових задач визначається співвідношеннями

$$\begin{aligned} S_{11}^0 = S_{22}^0 = 0, \quad S_{33}^0 \neq 0, \quad (S_{33}^0 = \text{const}); \\ u_j^0 = \delta_{jm}(\lambda_j - 1)x_m, \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3, \quad (\lambda_j = \text{const}); \quad (\lambda_3 < 1). \end{aligned} \quad (1)$$

де S_{ij}^0 – компоненти симетричного тензора напружень; u_j^0 – переміщення, що відповідають початковим напруженням; λ_j – вкорочення вдовж осей.

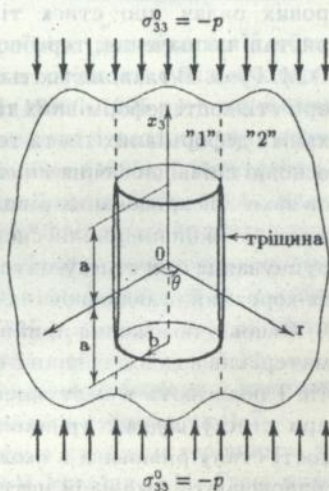
При цьому досліджується локальна втрата стійкості в околі дефектів, коли збурення напружень і переміщень ватухають "на нескінченності" при віддаленні від тріщин. Граничні умови лінеаризованих задач полягають в тому, що поверхні тріщини вільні від напружень.

Слід зауважити, що початковий докритичний стан (1) стає човити для подальшого дослідження особливий інтерес, оскільки при стиску матеріалів вдовж тріщин такий стан має місце в рамках точної математичної постановки.

Перша глава носить вступний характер і при її написанні використовувалися результати, викладені в монографіях О.М. Гузя.

Друга глава

присвячена аналітичному дослідженню осесиметричних задач механіки руйнування пружних матеріалів внаслідок рівномірного одноосного стиску вдовж скінченної тріщини, розташованої на круговій циліндричній поверхні. В главі подається постановка задач про стиск матеріалів вдовж паралельних твірних кругової циліндричної тріщини, до яких застосовується підхід, що ґрунтується на використанні представлень загальних роув'яків лінеаризованих рівнянь. Дослідження задач, у відповідності до загального підходу, що був вперше запропонований О.М. Гузем, проводиться в сдиній формі для різних моделей матеріалів в рамках теорії



великих і варіантів теорії малих початкових деформацій для випадку нерівних коренів характеристичного рівняння.

Припускаючи, що тріщина достатньо віддалена від всіх граничних поверхонь матеріалу розглядається скінченна циліндрична тріщина довжини $2a$ і радіуса b в нескінченному пружному тілі. При цьому, тріщина, як це прийнято в механіці, моделюється математичним розтином і займає в тілі область: $\{r = b, 0 \leq \theta < 2\pi, -a \leq x_3 \leq a\}$, де (r, θ, x_3) – циліндрична система координат (Рис).

При рівномірному стиску тіла вздовж осі Ox_3 в околі тріщини виникає однорідний напружено-деформівний докритичний стан (1).

При формулюванні лінеаризованої задачі будемо використовувати вектор збурень переміщень u , а також несиметричний тензор збурень напружень Кірхгофа t . Простір, що займає пружне тіло, розіб'ємо на дві області. Індексом "1" позначимо внутрішню область ($r < b$), а индексом "2" – зовнішню область ($r > b$).

Враховуючи розбиття на області "1" і "2", граничні умови задачі можна подати в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} t_{rr}^{(1)} = t_{rr}^{(2)}, \quad t_{r3}^{(1)} = t_{r3}^{(2)}, \quad (\rho = 1, 0 \leq |\zeta| \leq \infty); \\ u_r^{(1)} - u_r^{(2)} = 0, \quad u_3^{(1)} - u_3^{(2)} = 0, \quad (\rho = 1, |\zeta| > \beta); \\ t_{rr}^{(1)} = t_{rr}^{(2)} = 0, \quad t_{r3}^{(1)} = t_{r3}^{(2)} = 0, \quad (\rho = 1, |\zeta| < \beta). \end{aligned} \quad (2)$$

В граничних умовах (2), що включають умови неперервності полів збурень переміщень і напружень на границі розділу областей "1" і "2" поза тріщиною, а також умови відсутності напружень на поверхнях циліндричної тріщини, введені безрозмірні величини виду: $\rho = r/b; \zeta = x_3/b; \beta = a/b$.

Загальні розв'язки лінеаризованих рівнянь при однорідному докритичному стані (1) для осесиметричної задачі у випадку нерівних коренів характеристичного рівняння $n_1 \neq n_2$ подаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} u_r = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}; \quad u_3 = m_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + m_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}; \\ t_{r3} = C_{44} \left[d_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial x_3} + d_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial x_3} \right]; \\ t_{rr} = C_{44} \left[-p_1 \left(l_1 \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \varphi_1 - p_2 \left(l_2 \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \varphi_2 \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Величини $C_{44}, m_i, d_i, p_i, l_i$ ($i = 1, 2$), що входять в представлення (3), залежать від вибору моделі матеріалу і визначаються для стисливих

матеріалів через компоненти тензора ω , а для нестисливих матеріалів – через складові тензора ε . При цьому потенційні функції φ_i ($i = 1, 2$), через які визначаються поля переміщень і напружень задовольняють рівнянням другого порядку

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + n_i \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \varphi_i(r, x_3) = 0, \quad (i = 1, 2). \quad (4)$$

Необхідно зауважити, що представлення (3) по формі нагадують представлення загальних розв'язків лінійної теорії пружності для трансверсально-ізотропного тіла і співпадають з ними лише при виконанні умов: $\omega_{ij\alpha\beta} = \omega_{ji\alpha\beta}$; $\omega_{ij\alpha\beta} = \omega_{ij\beta\alpha}$. Однак, в досліджуваних задачах складові тензора ω не задовольняють таким умовам симетрії. Зокрема, не виконується умова $\omega_{1313} = \omega_{3113} = \omega_{1331}$.

На основі апарату теорії інтегральних перетворень Фур'є-Ханкеля вихідна лінеаризована задача зводиться до системи парних інтегральних рівнянь. Для цього потенційні функції $\varphi_i(r, x_3)$, ($i = 1, 2$) подаються у вигляді інтегральних розкладів Фур'є-Ханкеля в областях "1" і "2" відповідним чином

$$\begin{aligned} C_{44}\varphi_i^{(1)} &= \int_0^\infty a_i(\lambda) I_0(\sqrt{n_i}\lambda\rho) \cos \zeta \lambda d\lambda; \\ C_{44}\varphi_i^{(2)} &= \int_0^\infty b_i(\lambda) K_0(\sqrt{n_i}\lambda\rho) \cos \zeta \lambda d\lambda; \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (5)$$

Верхній індекс у дужках відповідає номеру області; $a_i(\lambda), b_i(\lambda)$ – невідомі функції; $I_0()$ і $K_0()$ – модифіковані функції Бесселя.

На основі співвідношень (3), (5) та граничних умов (2) одержується система парних інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій $K_r(\lambda)$ і $K_z(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda \left[\alpha_{11} K_r(\lambda) + \overline{\psi}_{11}(\lambda) K_r(\lambda) + \overline{\psi}_{12}(\lambda) K_z(\lambda) \right] \cos \zeta \lambda d\lambda &= 0, \\ \int_0^\infty \lambda \left[\alpha_{22} K_z(\lambda) + \overline{\psi}_{21}(\lambda) K_r(\lambda) + \overline{\psi}_{22}(\lambda) K_z(\lambda) \right] \sin \zeta \lambda d\lambda &= 0, \quad (\zeta < \beta); \quad (6) \\ \int_0^\infty K_r(\lambda) \cos \zeta \lambda d\lambda = 0, \quad \int_0^\infty K_z(\lambda) \sin \zeta \lambda d\lambda &= 0, \quad (\zeta > \beta). \quad (7) \end{aligned}$$

тут α_{11}, α_{22} – константи. Решта величин, що входять в рівняння (6), (7) визначаються співвідношеннями виду:

$$\overline{\psi}_{11}(\lambda) = \overline{\psi}_{22}(\lambda) = O(1/\lambda^2); \quad \overline{\psi}_{12}(\lambda) = \overline{\psi}_{21}(\lambda) = O(1/\lambda). \quad (8)$$

Одним із методів розв'язку парних інтегральних рівнянь є метод, який, в даному випадку, полягає в тому, що розв'язки вибираються в такому вигляді, щоб рівняння, котрі виконуються при $\zeta > \beta$ задовольнялися тотожно. Решта рівнянь ($\zeta < \beta$), за допомогою методу розкладів в ряди, зводяться до системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь.

Для цього невідомі функції $K_r(\lambda)$ і $K_x(\lambda)$ подаються у вигляді нескінченних рядів по функціям Беселя першого роду з невідомими константами a_j і b_j :

$$K_r(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \lambda^{-1} J_{2j+1}(\beta\lambda); \quad K_x(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \lambda^{-1} J_{2j+2}(\beta\lambda). \quad (9)$$

Зауважимо, що вибір функцій $K_r(\lambda)$ та $K_x(\lambda)$ у вигляді (9) забезпечує тотожне задоволення рівнянь (7). А рівняння (6), на основі відомих розкладів функцій $\cos \zeta\lambda$ і $\sin \zeta\lambda$ у вигляді

$$\begin{aligned} \cos \zeta\lambda &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i J_{2i}(\beta\lambda) \cos 2i\varphi; \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_i = 2 \quad (i \geq 1); \\ \sin \zeta\lambda &= \sum_{i=0}^{\infty} 2J_{2i+1}(\beta\lambda) \sin(2i+1)\varphi; \quad \varphi = \arcsin(\zeta/\beta); \end{aligned} \quad (10)$$

дають нескінченну однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих a_j та b_j :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} a_j (\alpha_{11} R_{ij}^* + R_{ij}) + \sum_{j=0}^{\infty} b_j T_{ij} &= 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots; \\ \sum_{j=0}^{\infty} a_j P_{ij} + \sum_{j=0}^{\infty} b_j (\alpha_{22} Q_{ij}^* + Q_{ij}) &= 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

В отриманій системі рівнянь (11) через R_{ij}, \dots, Q_{ij} позначені невідомі інтеграли виду:

$$R_{ij} = \int_0^{\infty} \overline{\psi}_{11}(\lambda) J_{2i}(\beta\lambda) J_{2j+1}(\beta\lambda) d\lambda; \quad \dots; \quad \text{і т.п.} \quad (12)$$

Для знаходження нетривіального розв'язку системи однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих a_j і b_j необхідно визначник системи рівнянь покласти рівним нулю. Для стисливих та нестисливих матеріалів маємо відповідні співвідношення

$$\det \|d_{kl}(\beta, \lambda_3, \omega)\| = 0; \quad \det \|d_{kl}(\beta, \lambda_3, \infty)\| = 0, \quad (k, l = 1, 2, \dots). \quad (13)$$

Таким чином, вихідна задача зведена до задачі на власні значення відносно параметра вкорочення вздовж осі λ_3 або напружень стиску $S_{33}^0 = S_{33}^0(\lambda_3)$, що характеризують докритичний стан.

В третій главі викладена методика чисельного дослідження отриманих задач на власні значення. Для різних моделей матеріалів подається конкретизація параметрів, що входять в розв'язуючі співвідношення. В главі наведені чисельні результати для: 1) нестисливого високоеластичного матеріалу з потенціалом Трелора (в рамках теорії великих початкових деформацій); 2) стисливого пружного матеріалу з потенціалом, що співпадає по формі з пружним потенціалом лінійної теорії пружності ізотропного тіла (в рамках другого варіанту малих початкових деформацій); 3) композитних матеріалів при малих початкових деформаціях (композити армовані однонаправленими волокнами типу скло-епоксидна смола з об'ємним вмістом $V_f = 0,63$; типу графіт-епоксидна смола з $V_f = 0,5$; та ряд інших композитних матеріалів).

Зауважимо, що при дослідженні композитних матеріалів припускалося, що мінімальні розміри тріщин значно більше розмірів структурних елементів матеріалів, тобто розглядалися макротріщини. Крім того, не розглядалися процеси руйнування, в яких виявляються властивості кусково-однорідного середовища на зразок руйнування на границі розділу середовищ. При зроблених припущеннях, композит моделюється однорідним середовищем з приведеними характеристиками трансверсально-ізотропного тіла в віссю ізотропії, що співпадає з віссю Ox_3 , вздовж якої відбувається стиск матеріалу. До вказаних матеріалів відносяться волокнисті однонаправлені матеріали з волокнами, спрямованими вздовж осі Ox_3 , а в площині ізотропії $x_3 = const$ немає чітко визначеного напрямку переважного армування.

При чисельному дослідженні характеристичних рівнянь (13) нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь (11) зводилася до скінченної системи N алгебраїчних рівнянь. При цьому, порядок редукції системи визначався шляхом досягнення практичної збіжності. Аналіз збіжності членів ряду показує, що для обчислення критичних вкорочень λ_3 з точністю до п'ятого знака після коми достатньо обмежитися 10–15 членами ряду, в залежності від моделі матеріалу.

На відміну від класичного випадку, коли параметр задачі входить лінійним чином як множник при лінійному операторі, в досліджуваних в цій роботі задачах параметр вкорочення λ_3 складним неліній-

ним чином входить в елементи визначників (13). Тому дослідження задач на власні значення полягає в знаходженні першого значення $\lambda_3 < 1$, при зменшенні λ_3 , починаючи із значення $\lambda_3 = 1$, при якому система рівнянь має нетривіальний розв'язок. *

Зауважимо, що елементи визначників (13) є невласними інтегралами з нескінченними верхніми границями інтегрування типу (12). Для їх оцінки інтеграли подавалися у вигляді суми скінченної та асимптотичної частин. При цьому перші складові обчислювалися за квадратурними формулами Гауса, а для чисельного інтегрування других складових, що мають вид

$$F_k(m, n, x_0) = \int_{x_0}^{\infty} x^{-k} J_m(x) J_n(x) dx; \quad (k = 1, 2). \quad (14)$$

використовувалися формули типу

$$F_1(m, n, x_0) = \frac{2 \sin\left[\frac{(m-n)\pi}{2}\right]}{\pi(m^2 - n^2)} + \frac{x_0}{m^2 - n^2} \left[J_{m+1}(x_0) J_n(x_0) - J_m(x_0) J_{n+1}(x_0) \right] - \frac{J_m(x_0) J_n(x_0)}{m+n}; \quad (m \neq n);$$

$$F_1(m, m, x_0) = \frac{1}{2m} \left[J_0^2(x_0) + 2 \sum_{s=1}^{m-1} J_s^2(x_0) + J_m^2(x_0) \right]; \quad (m = n > 0);$$

... і т.п. (15)

Результати обчислень представлені в дисертації у вигляді графіків і відображають залежність критичних параметрів навантажень від пружних характеристик матеріалів, а також геометричних параметрів дефекту.

В заключній частині дисертації в узагальненому вигляді сформульовані основні результати, отримані в роботі і подаються висновки, зроблені на основі аналізу цих результатів.

І. Таким чином, в дисертаційній роботі вперше розв'язані в рамках тривимірної лінеаризованої теорії просторові осесиметричні задачі механіки руйнування пружних матеріалів з циліндричною тріщиною при осьовому стиску, включаючи:

1. Постановку задач про стиск нескінченного тіла вдовж паралельних твірних кругової циліндричної тріщини.

2. Побудову розв'язуючих співвідношень на основі апарату теорії інтегральних перетворень Фур'є-Ханкеля і методу розкладів в ряди.
3. Розробку алгоритму і його програмну реалізацію для чисельного дослідження задач на власні значення.
4. Одержання числових результатів для конкретних моделей матеріалів та їх аналіз.

II. Основні результати роботи полягають в наступному:

1. На основі загального підходу в рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл дається постановка просторових осесиметричних задач про руйнування матеріалів з круговою циліндричною тріщиною при осьовому стиску.
2. З використанням представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь в координатах недеформівного стану, на основі теорії інтегральних перетворень Фур'є-Ханкеля одержані парні інтегральні рівняння, які з залученням методу розкладів в ряди по функціям Бесселя зводяться до однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
3. Розроблена методика чисельного дослідження отриманих задач на власні значення для скінченних однорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, коли шуканий параметр складним нелінійним чином входить в розв'язуючі рівняння.
4. Складено алгоритм і втілено його програмна реалізація для програмування на ПК.
5. Отримані числові результати і проведені їх аналіз для конкретних моделей матеріалів : а) стисливого матеріалу з потенціалом, що співпадає по формі з пружним потенціалом лінійної теорії пружності ізотропного тіла; б) нестисливого високоеластичного матеріалу з потенціалом Трелора; в) композитних матеріалів (композити армовані однонаправленими волокнами типу скло-епоксидна смола, графіт-епоксидна смола та ряд інших композитів).

III. На основі отриманих результатів можна зробити такі висновки:

1. Метод, що використовується для чисельного дослідження задач на власні значення є ефективним в усіх розглянутих випадках.
2. Для обчислення критичних вкорочень з точністю до п'ятого знака після коми, в розв'язуючій системі лінійних алгебраїчних рівнянь достатньо обмежитися 10 – 15 членами ряду, в залежності від моделі матеріалу.
3. Критичні навантаження у всіх розглянутих випадках суттєво залежать як від геометричних параметрів задачі, так і від механічних характеристик матеріалу.
4. Для композитних матеріалів критичні значення навантажень в більшій мірі залежать від величини E/G' , ніж від параметрів ν , ν' , E/E' .

В додатку описано алгоритм програм для чисельного дослідження на ПК.

Основний зміст дисертаційної роботи викладено в наступних працях :

1. О разрушении бесконечного сжимаемого композита, содержащего конечную цилиндрическую трещину в условиях осевого сжатия // Прикл. механика. – 1995. – 31, N9. – С. 15 – 23. (Соавт. Гувь А.Н., Назаренко В.М.).

2. Сжатие бесконечного композитного материала вдоль конечной цилиндрической трещины // Механика композит. материалов. – 1995. – 31, N1. – С. 27 – 34. (Соавт. Назаренко В.М.).

3. О методе решения задач разрушения бесконечного материала с цилиндрической трещиной при осевом сжатии (случай неравных корней) // Докл. АН Украины. – 1994. – N7. – С. 62 – 66. (Соавт. Назаренко В.М.).

4. Разрушение композитного материала при сжатии вдоль цилиндрической трещины Докл. НАН Украины. – 1995. – N10. – С. 48 – 52. (Соавт. Гувь А.Н., Назаренко В.М.).

5. Осесимметричная задача механики разрушения бесконечного тела с цилиндрической трещиной при осевом сжатии //Тр. XVII науч. конф. мол. ученых Ин-та мех. АН Украины. – Киев, 1992. – Ч. 1. – С. 101 – 105. – Деп. в УкрИНТЭИ 07.07.92, N1021 – Укр92. (Соавт. Назаренко В.М.).

6. Осесимметричная задача механики разрушения материала с цилиндрической полостью и соосной приповерхностной цилиндрической трещиной при осевом сжатии //Тр. XVIII науч. конф. мол. ученых Ин-та мех. АН Украины. – Киев, 1993. – Ч. 2. – С. 130 – 134. – Деп. в ГНТБ Украины 16.08.93, N1765 – Ук93. (Соавт. Назаренко В.М.).

7. О методе решения задачи механики разрушения стержня кругового поперечного сечения, содержащего цилиндрическую трещину при осевом сжатии //Тр. Всеукраинской конф. мол. ученых вузов Украины (математика), Киев, ун-т, – 1994. – С. 174 – 180. – Деп. в ГНТБ Украины 20.07.94, N1302 – Ук94. (Без соавторов).

Khoma Yu.I. An axisymmetric problem of brittle fracture of materials with a cylindrical crack under an axial compression.

Dissertation for the Candidate of Physical and Mathematical Sciences Degree in Speciality 01.02.04 – mechanics of a deformable solid, S.P.Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 1995.

Nine papers containing the theoretical investigation on compression of elastic materials along a cylindrical crack in the frame-work of the three-dimensional linearized stability theory of the deformed bodies are defended. It has been studied an influence of the defect geometry and the elastic constants of the materials on a value of the critical loads.

Хома Ю.И. Осесимметричная задача механики хрупкого разрушения материалов с цилиндрической трещиной при осевом сжатии.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 - механика деформируемого твердого тела, Институт механики им. С.П. Тимошенко Национальной академии наук Украины, Киев, 1995.

Защищается 9 научных работ, которые содержат теоретическое исследование о сжатии упругих материалов вдоль цилиндрической трещины в рамках трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел. Изучено влияние геометрических параметров дефекта и упругих постоянных материала на величины критических нагрузок.

Ключевые слова: тривимірна лінеаризована теорія, циліндрична тріщина, механіка руйнування матеріалів, осьовий стиск, локальна втрата стійкості, макротріщина, критичні параметри навантаження.

Підп. до друку 21.11.95 Формат 60×84^{1/16}. Папір
друк. № 2 Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 10
Умовн. фарбо-відб. 10 Облік-вид. арк. 10
Тираж 100 Зам. № 5-4949.

Фірма «ВІПОЛ».
252151, Київ, вул. Волинська, 60.

452488

4B 33.607

AB 33.607

[Faint, illegible text covering the majority of the page, likely bleed-through from the reverse side.]