Харківський державний університет

На правах рукопису

К У Ч Е Р

Ольга Василівна

ГЕОМЕТРІЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПРОСТОРІВ ЗВ'ЯЗАНИХ З ПЕРЕТВОРЕННЯМИ ФУР'Є І ВІНЕРА.

(01.01.01 - математичний аналіз)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Харків 1995

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник Плічко Анатолій Миколаєвич

Офіційні опоненти:

1. Доктор фізико-математичних наук, професор Гандель Юрій Володимирович
2. Доктор фізико-математичних наук, професор Кадець Михайло Йосипович

Провідна організація: Київський державний університет ім.Т.Г.Шевченко.

Захист відбудеться "29" грудня 1995 р. о 17 год. 00 хв. на засіданні спеціалізованої вченої ради К 02.02.17 у Харківському державному університеті (адреса: 310077, м.Харків, пл. Свободи, 4, ауд. 6-48).

З дисертацією можна ознайомитися у Центральній науковій бібліотеці Харківського державного університету.

Автореферат розісланий "25" 11 1995 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Кощій О.Ф.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дослідження геометричної структури функційних просторів на яких задані перетворення Фур'є та Вінера, а також просторів значень цих операторів, з різних точок зору є актуальним напрямком в теорії функційних просторів. Вивчення середніх $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+\tau)x(t)dt$, $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x|^2$, де x локально інтегровна функція на $\mathbb{R}$ розпочалося в 20-х роках нашого століття. Н.Бор, А.Безикович, В.Степанов вперше використовували їх для дослідження структури та спектру майже періодичних функцій. Найбільш важливий внесок до цієї тематики зробив Н.Вінер у 30-х роках. На початку XX-го століття деякі фізики (Дж.Релей, А.Шустер, Г.Тейлор) намагалися застосувати гармонійний аналіз до вивчення хаотичних сигналів білого світла. Відомо, що ці типи сигналів мають скінченну потужність ($\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x|^2<\infty$), але нескінчену енергію ($\int_{-\infty}^{\infty}|x|^2=\infty$). Тому класичний аналіз на $L_2(\mathbb{R})$ не можна застосувати до аналізу цих сигналів. Н.Вінер у своїй відомій праці з узагальненого гармонійного аналізу [1)] показав, що границі вищезгаданих середніх можна застосовувати до вивчення функцій з неперервним спектром.

Для комплекснозначної вимірної за Борелем функції $x(t)$, заданої на прямій $\mathbb{R}$, у якої існує границя $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt$ Н.Вінер означив інтегральне перетворення Фур'є $y=Wx$ за формулою

$$y(s)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{-1}+\int_{1}^{\infty}\right)x(t)\,\frac{e^{-ist}}{-it}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}x(t)\,\frac{e^{-ist}-1}{-it}dt, \quad (1)$$

Тепер оператор W називають перетворенням Вінера. Н.Вінер довів, що середнє значення квадрату модуля такої функції $x(t)$ дорівнює квадратичній варіації її перетворення $y(s)$, точніше, що

$$\lim_{T\to\infty}(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt=\lim_{\varepsilon\to+0}(2\varepsilon)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}|y(s+\varepsilon)-y(s-\varepsilon)|^2ds. \quad (2)$$

---

1) Wiener N., Generalized harmonic analysis //Acta Math. - 1930. - 55. - P. 117-258.

Проте сукупність функцій, для яких границі у (2) існують, не утворюють лінійних просторів. Тому були введені лінійні простори

$$\mathfrak{W}^p=\left\{ x : \|x\|_{\mathfrak{W}^p} = \overline{\lim}_{T\to\infty} \left[(2T)^{-1} \int_{-T}^{T} |x(t)|^p dt\right]^{1/p} < \infty \right\},$$

$$V^p=\left\{ y : \|y\|_{V^p} = \overline{\lim}_{\varepsilon\to+0}\left[(2\varepsilon)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}|y(t+\varepsilon)-y(t-\varepsilon)|^p dt\right]^{1/p} < \infty\right\},$$

та аналогічні до них простори $\mathbb{W}^p$, $\mathbb{V}^p$ (в яких замість верхньої границі береться супремум), де $x(t)$, $y(t)$ - вимірні функції, $1<p<\infty$, між якими природно діє перетворення Вінера. Банахівські властивості просторів $\mathfrak{W}^p$ та $\mathbb{W}^p$ вивчались доволі докладно[2) 3)]. Структура просторів V^p та $\mathbb{V}^p$ виявилась значно складнішою і зараз, за винятком випадку $p=2$ ми про неї знаємо зовсім мало. Вперше у працях [4) 5)] показано, що перетворення Вінера буде ізоморфізмом з $\mathfrak{W}^2$ на V^2 і з $\mathbb{W}^2$ на $\mathbb{V}^2$, а також обмеженим оператором з $\mathfrak{W}^p$ в V^q , де $1<p<2$, $1/p+1/q=1$.

Мета роботи. Вивчення геометричної структури функційних просторів у яких діють перетворення Фур'є та Вінера, а також властивостей цих та близьких до них операторів.

Методи дослідження. Використовуються методи теорії банахових граток і симетричних просторів, теорії інтерполяції лінійних операторів у симетричних просторах та теорії спіралей Мазані.

Наукова новизна. Доведена строга сингулярність мажоровних інтегральних операторів для широкого класу функційних просторів. Введене поняття локально інтегрального і локально мажоровного

---

2) Feichtinger H.G., An elementary approach to Wiener's third Tauberian theorem on Euclidean n-space// Symposia Math.-1987.- 29.- P. 267- 301.

3) Lau K. On the Banach spaces of functions with bounded upper means // Pacif. J. Math.- 1980.- 91.- P.153-173.

4) Lau K., Lee J., On generalized harmonic analysis, // Trans. Amer. Math. Soc.-1980. - 259.- P.75-97.

5) Chen Y., Lau K., Wiener transformation on functions with bounded averages, Proc. Amer. Math. Soc. 108 (1990), P. 411-421.

операторів. Отримані загальні результати застосовано до встановлення строгої сингулярності перетворення Фур'є у просторах Орліча. Вперше введені й досліджені границі на прямій симетричних просторів на відрізках та простори обмеженої F-варіації для симетричних просторів F на прямій. Вивчаються властивості перетворення Вінера у цих просторах. Зокрема обмеженість, ін'єктивність, строга сингулярність та ін.

Практична і теоретична цінність. Дисертація має теоретичний характер. Її результати можуть знайти застосування при дослідженні конкретних інтегральних та локально інтегральних операторів. Вони можуть бути використані в абстрактному гармонійному аналізі для продовження вивчення властивостей перетворення Вінера.

Апробація роботи Результати дисертації доповідались автором на науковій конференції викладачів та студентів Запорізького державного університету (Запоріжжя, 1991 р.), на міжнародній конференції, присвяченій пам'яті акад. М.П.Кравчука (Київ-Луцьк, 1992 р.), на міжнародній математичній конференції, присвяченій пам'яті Ганса Гана (Чернівці, 1994 р.), на Семінарі з Аналізу (Цветтл, Австрія, 1994 р.), на XX Зимовій Школі з Абстрактного Аналізу (Лгота над Рогановим, Чехія, 1995 р.), на міському семінарі з геометрії банахових просторів (Харків, 1995 р.), на наукових семінарах відділу нелінійного математичного аналізу Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України (Львів, 1993-1995 рр.).

Публікації. За матеріалами дисертаційної роботи опубліковано 6 наукових праць, список яких подано в кінці автореферату. Роботи [2, 4] виконані самостійно.

Структура і об'єм роботи. Дисертаційна робота складається із вступу, п'яти параграфів, розбитих на пункти, списку основних позначень і списку літератури. Об'єм дисертації - 99 сторінок машинописного тексту. Бібліографія складає 64 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ

У <u>вступі</u> подано короткий історичний огляд теми роботи, загальна її характеристика та коротко викладено основні результати.

<u>У першому параграфі</u> наведені основні потрібні нам означення, позначення й відомі факти про банахові гратки, банахові ідеальні простори, симетричні простори та інтерполяцію лінійних операторів.

<u>У другому параграфі</u> роботи вивчається строга сингулярність інтегральних операторів у банахових ідеальних просторах (БІП).

Нагадаємо, що лінійний обмежений оператор A з банахового простору X в банахів простір X називається строго сингулярним, якщо його звуження на довільний нескінченновимірний підпростір не є ізоморфізмом. Оператор A з БІП X на вимірному просторі (T,Σ,μ) в простір вимірних функцій на вимірному просторі (S,Λ,ν) називається мажоровним, коли існує така вимірна на (S,Λ,ν) невід'ємна функція $z(s)$, що майже скрізь $\sup\{|(Ax)(s)|: x\in X, \|x\|\le 1\}\le z(s)$. Норма $\|\cdot\|$ БІП X називається абсолютно неперервною, якщо для будь-якої функції $x\in X$ і будь-якої спадної послідовності вимірних множин T_n з порожнім перетином $\|x\,\chi_{T_n}\|\to 0$ при $n\to\infty$, де χ_T- характеристична функція множини T. Послідовність $x_n\in X$, $n=\overline{1,\infty}$ буде диз'юнктною, якщо для будь-яких чисел $m\ne n$ $\mu(t: x_m(t)x_n(t)\ne 0)=0$.

Основним результатом пункту 2.1 є наступне

<u>Твердження 2.1.1.</u> Нехай X,Y-БІП на вимірних просторах (T,Σ,μ) та (S,Λ,ν), $A:X\to Y$ - мажоровний інтегральний оператор, норма простору Y абсолютно неперервна і жодна диз'юнктна послідовність з простору Y не еквівалентна послідовності простору X. Тоді оператор A строго сингулярний.

<u>Наслідок 2.1.2.</u> Якщо БІП X має котип p, а простір Y - верхню q- оцінку, $q>p$ і норма простору Y абсолютно неперервна, то кожен інтегральний мажоровний оператор $A: X\to Y$ буде строго сингулярним.

Наслідок 2.I.3. Кожен мажоровний інтегральний оператор з простору $L_p(\mu)$ в $L_q(\nu)$, $\max(p,2)<q<\infty$ буде строго сингулярним.

Далі ми застосовуємо наслідок 2.I.2 до знаходження достатніх умов строгої сингулярності інтегральних операторів у просторах Орліча. Нехай $M(t)$ функція Орліча на $[0,\infty)$. Покладемо

$$p_M=\sup\{p:\ \inf_{\lambda,t\geq1} M(\lambda t)/M(\lambda)t^p>0\}\ \text{і}$$
$$q_M=\inf\{q:\ \sup_{\lambda,t\geq1} M(\lambda t)/M(\lambda)t^q<\infty\}.$$

Наслідок 2.I.4. Нехай L_M, L_N - простори Орліча на $(0,1)$ або $(0,\infty)$ з відповідними функціями Орліча $M(t)$, $N(t)$, причому $\max(q_M,2)<p_N$ і $q_N<\infty$. Тоді кожен мажоровний інтегральний оператор з L_M в L_N строго сингулярний.

Наслідок 2.I.5. Нехай $M(t)$, $N(t)$ - доповнювальні одна до одної функції Орліча, причому $1<p_M,q_M<2$. Якщо L_M, L_N - відповідні функційні простори Орліча, то всякий інтегральний мажоровний оператор з L_M в L_N буде строго сингулярним.

У п.2.2 ми досліджуємо строгу сингулярність локально інтегральних і локально мажоровних операторів.

Оператор $A:X\to Y$ називатимемо локально інтегральним, якщо існує така вимірна функція $K(s,t)$, $t\in T$, $s\in S$ що для кожної підмножини $D\in\Sigma$ скінченної міри оператор $(A_D x)(s)=\int_D K(s,t)x(t)d\mu(t)$ буде інтегральним. Локально інтегральний оператор A буде локально мажоровним, якщо кожен оператор A_D мажоровний.

Твердження 2.2.I. Нехай $A:X\to Y$ - локально інтегральний і локально мажоровний оператор, норми просторів X, Y абсолютно неперервні, жодна диз'юнктна послідовність з Y не еквівалентна послідовності в X і жодна нормована диз'юнктна послідовність в X не мажорується жодною обмеженою послідовністю в Y. Тоді A строго сингулярний.

Наслідок 2.2.I. Нехай $A:X\to Y$ - локально інтегральний і локально мажоровний оператор. Якщо простір X має нижню p-оцінку для деякого $p<2$, а простір Y верхню q-оцінку для деякого $q>2$ і тип 2, то оператор A буде строго сингулярним.

Наслідок 2.2.2. Кожен локально інтегральний, локально мажоровний оператор з $L_p(\mu)$ в $L_q(\nu)$, $1<p<2$, $2<q<\infty$ буде строго сингулярним. Зокрема оператор перетворення Фур'є з $L_p(\mathbb{R}^n)$ в $L_q(\mathbb{R}^n)$, $1<p<2$, $1/p + 1/q = 1$ строго сингулярний.

Застосовуючи наслідок 2.2.І знаходимо достатні умови строгої сингулярності перетворення Фур'є у просторах Орліча.

Наслідок 2.2.3. Нехай $M(t)$, $N(t)$- доповнювальні одна до одної функції Орліча, $1<p_M$, $q_M<2$. Тоді оператор перетворення Фур'є з $L_M(0,\infty)$ в $L_N(0,\infty)$ строго сингулярний.

У §3 ми за симетричним функційним простором E на відрізку будуємо "граничні" простори M_E та $\mathfrak{M}_E$ так само, як за простором $L_p(-1,1)$ будувалися простори M^p та $\mathfrak{M}^p$. Більшість отриманих властивостей "граничних" просторів відома для M^p та $\mathfrak{M}^p$, але є і нові. Методика доведень, природно, більш абстрактна, як нам здається, менш громіздка і з точки зору теорії банахових просторів прозоріша. Спершу у п.3.І розглядається одна абстрактна конструкція, яку можна назвати індуктивною l_∞- границею послідовності банахових просторів.

Нехай X_n - послідовність лінийних просторів, $Y_n=X_1\oplus\ldots\oplus X_n$ і нехай Y_n банахів простір з нормою $\|\ \|_n$, причому для кожного n $\|y\|_{n+1} \le \|y\|_n$ для будь-якого $y\in Y_n$ і проектор із Y_{n+1} на Y_n паралельно X_{n+1} обмежений в нормі $\|\ \|_{n+1}$. Розглянемо множину $X = \left\{x=(x_1,\ldots,x_n,\ldots): x_n\in X_n,\ \sup_n\|(x_1,\ldots,x_n)\|_n<\infty\right\}$. Для $x=(x_1,\ldots,x_n,\ldots)$ покладімо $P_n x = (x_1,\ldots,x_n,0,\ldots)$.

Твердження 3.І.І. Множина X з нормою $\|x\|=\sup_n\|P_n x\|_n$ буде банаховим простором.

Казатимемо, що задовольняється умова (*), якщо для будь-якого $y_m\in Y_m$ $\|y_m\|_n \to 0$ коли $n\to\infty$.

Твердження 3.І.4. При умові (*) для будь-якого $\varepsilon>0$ простір X містить (доповнювальний) підпростір Z, $(1+\varepsilon)$-ізометричний до l_∞, причому $Z\cap X_0$ містить підпростір $(1+\varepsilon)$- ізометричний до c_0.

<u>Твердження 3.1.5.</u> Якщо виконується умова (*) і всі Y_n рефлексивні простори, то $X = X_0^{**}$.

<u>Твердження 3.1.6.</u> Нехай існує таке число $C<1$, що для будь-якого $n>1$ і будь-якого $y \in Y_{n-1}$ виконується умова $\|y\|_n \le C\|y\|_{n-1}$. Для елемента $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in X$ покладемо $\|x\|_0 = \sup_n \|x_n\|_n$. Тоді норма $\|x\|_0$ еквівалентна вихідній нормі $\|x\|$ і $(X, \| \|_0) = = l_\infty(X_n)$ та $(X_0, \| \|_0) = c_0(X_n)$.

Як наслідкі одержуємо, що X_0 містить доповнювальний підпростір ізоморфний до c_0 , простір X_0 не доповнювальний в X і не ізоморфний до спряженого.

У п.3.2 ми будуємо простори M_E , $\mathfrak{M}_E$ та I_E і застосовуємо одержані в п.3.1 результати до цих просторів.

Для числа $T>0$ позначимо через ψ_T лінійне відображення відрізку $[-T,T]$ на $[-1,1]$; $\psi_T(-T)=-1$, $\psi_T(T)=1$. Нехай E - симетричний простір на відрізку $[-1,1]$ з мірою Лебега λ нормованою на одиницю: $\lambda([-1,1])=1$. Тоді всі функції вигляду $x(\psi_T(t))$, де x пробігає простір E, утворюють симетричний простір E_T на відрізку $[-T,T]$ з нормою $\|x(\psi_T(t))\|_T := \|x\|_E$. Кожну функцію на відрізку $[-T,T]$ ототожнюватимемо з функцією на всій прямій, доозначуючи її поза $[-T,T]$ нулем. Позначмо через M_E сукупність (класів) комплексних вимірних функцій $x(t)$ на дійсній прямій, для яких $\|x\|_{M_E} = \sup_{T\ge 1} \|x\|_T < \infty$, а через $\mathfrak{M}_E$ - сукупність функцій, для яких $\|x\|_{\mathfrak{M}_E} = \overline{\lim}_{T\to\infty} \|x\|_T < \infty$. Нехай $I_E = \left\{ x \in M_E : \lim_{T\to\infty} \|x\|_T = 0 \right\}$.

З результатів п.3.1 випливає, що коли E - простір з абсолютно неперервною нормою, то I_E має базис; не доповнювальний в M_E; не ізоморфний до спряженого і містить доповнювальний підпростір, ізоморфний до c_0; M_E містить (доповнювальний) підпростір, ізоморфний до l_∞ і має повну мінімальну систему, а $\mathfrak{M}_E$ (ізометричний до M_E/I_E) містить ізоморфно l_∞/c_0, отже, не має еквівалентної строго опуклої норми. Показано, що для рефлексивного простору E буде $I_E^{**} = M_E$. Якщо ж верхній індекс Бойда простору E

скінченний, то простір I_E ізоморфний до $c_0(E)$, а M_E- до $l_\infty(E)$, а якщо крім того й нижній індекс Бойда більший від 1, то I_E має безумовний базис. Вивчається множина крайніх точок кулі, зокрема показано, що куля простору I_E не містить крайніх точок.

Нехай X -банахів простір з базисом (x_n), для якого з нерівностей $|a_n|\le|b_n|$ для всякого n випливає $\|\sum a_n x_n\|\le\|\sum b_n x_n\|$ і E_1, E_2,...-банахові простори. Через $\oplus_X E_n$ позначають простір послідовностей (y_n), $y_n\in E_n$, для яких $\sum_1^\infty \|y_n\| x_n\in X$ з нормою $\|(y_n)\| = \|\sum_1^\infty \|y_n\| x_n\|_X$. Якщо $X=l_p$ або c_0 , то $\oplus_X E_n$ позначають через $l_p(E_n)$ та $c_0(E_n)$. При цьому виникає природне загальне питання : які властивості просторів X та E_n успадковує простір $\oplus_X E_n$. Ми розглянемо властивість Гротендіка (п.3.3) та p- властивість Банаха-Сакса (п.3.4), а також наведемо деякі застосування отриманих результатів до границь симетричних просторів означених в п.3.2.

Банахів простір X називається гротендіковим, якщо у спряженому X^* слабка і слабка* збіжності послідовностей співпадають. Простір E називатимемо B-опуклими, якщо він не містить l_1^n рівномірно.

Основним результатом п.3.3 є наступне твердження.

Твердження 3.3.I. Нехай E- B-опукла банахова гратка. Тоді простір $l_\infty(E)$ гротендіків.

Нехай X-банахів простір і X^*- його спряжений. Набір x_i, f_i, $x_i\in X$, $f_i\in X^*$, $i\in$I, I-деяка множина, називається базисом Маркушевича, якщо $\forall\ i,j\in$I $f_i(x_j)=\delta_{ij}$ (символ Кронекера), лінійна оболонка елементів x_i :$i\in$I щільна в X і з $f_i(x)=0$ $\forall i$ випливає $x=0$.

Наслідок 3.3.I. В умовах твердження 3.3.I простір $l_\infty(E)$ не має базиса Маркушевича.

Наслідок 3.3.2. Нехай E- симетричний B-опуклий простір на відрізку, верхній індекс Бойда $q_E<\infty$. Тоді простір M_E гротендіків і не має базиса Маркушевича.

Відзначимо, що наслідок 3.3.2 дає новий результат навіть у випадку $E=L_p[-1,1]$, $1<p<\infty$.

У п.3.4 ми вивчаємо p-властивість Банаха-Сакса у просторах $c_o(E)$ та l_E. Кажуть, що банахів простір X має властивість Банаха-Сакса (BSP), якщо в ньому кожна обмежена послідовність (x_n) має підпослідовність (x_n'), $(C,1)$- збіжну до деякого елемента x з X : $\|N^{-1}\sum_1^N x_n' - x\|\to 0$ при $N\to\infty$. Якщо ж така умова виконується лише для кожної слабко збіжної до нуля послідовності, то X має слабку властивість Банаха-Сакса (WBSP) (у цьому випадку $x=0$). Нагадаємо, що простір E має p-властивість Банаха-Сакса (p-BSP), $p>1$, якщо у ньому з кожної слабко збіжної до нуля послідовності $(x\ )$ можна виділити підпослідовність (x_n'), для якої

$$\sup_N \|\sum_1^N x_n'\|/N^{1/p}<\infty .$$

<u>Твердження 3.4.1.</u> Нехай простір E має p-властивість Банаха-Сакса для деякого $p>1$. Тоді простір $c_o(E)$ має (p-BSP), отже й (WBSP).

<u>Наслідок 3.4.1.</u> Якщо E-рівномірно опуклий симетричний простір на відрізку $[-1,1]$, то простір l_E має (p-BSP) для деякого $p>1$.

<u>У §4</u> ми за симетричним простором F на прямій вводимо простори V_F та $\mathbb{V}_F$ обмеженої F-варіації та доводимо їх повноту.

Нехай F - комплексний симетричний простір на прямій з абсолютно неперервною нормою $\|\ \|$, а $\varphi(\varepsilon)=\|\chi_{[0,\varepsilon]}\|$ - його фундаментальна функція. Нехай також $\tau_\varepsilon(y)=y(t+\varepsilon)$, $\varepsilon\in\mathbb{R}$ - оператор зсуву, а $\bar\tau_\varepsilon(y):=\tau_\varepsilon y-y$. Позначмо через $\mathbb{V}_F$ простір (класів) вимірних функцій $y(t)$, для яких $\|y\|_{\mathbb{V}_F}=\sup_{0<\varepsilon<1}\|\bar\tau_\varepsilon y\|/\varphi(\varepsilon)<\infty$. Доведення повноти $\mathbb{V}_F$ схоже на доведення повноти простору V^p [3] та подібного до нього простору функцій з скінченою верхньою p-варіацією [6] і грунтується на теорії спіралей Мазані.

<u>Теорема 4.1.2.</u> Простір $\mathbb{V}_F$ повний.

Зауважимо, що простір $\mathbb{V}_F$ несепарабельний (твердження 4.1.2).

---

6) Nelson R.R., The spaces of funstions of finite upper p-variation // Trans. Amer. Math. Soc. -1979. - 253 - P. 171-190.

Наслідок 4.1.4. Спряжений V_F^* буде слабко* сепарабельним. Отже, V_F не містить несепарабельних рефлексивних (і, навіть, несепарабельних слабко компактно породжених) підпросторів.

У §5 досліджуется дія перетворення Вінера W, заданого формулою (1) між "граничними" просторами M_E та V_F. Наше доведення обмеженості W грунтується на загальних результатах теорії інтерполяції лінійних операторів у симетричних просторах. Спочатку розглядаємо звичайне перетворення Фур'є і його інтерполяцію. Застосувавши відоме узагальнення Крейна і Семенова інтерполяційної теореми Марцинкевича, ми будуємо симетричний простір $E_{-1,-1}(\mathbb{R})$ в який перетворення Фур'є обмежено відображатиме симетричний простір $E(\mathbb{R})$.

Нагадаємо, що нижній і верхній індекси Бойда симетричного простору E означаються формулами

$$p_E = \lim_{T\to\infty} \frac{\log T}{\log \|D_T\|}, \quad q_E = \lim_{T\to+0} \frac{\log T}{\log \|D_T\|},$$

де D_T - оператор розтягу : $(D_T x)(t) = x(t/T)$, $(T > 0)$.

Основним результатом п.5.1 є наступна

Теорема 5.1.1. Нехай простір $(E(\mathbb{R}), \|\ \|_1)$ має індекси Бойда $1 \le p \le q \le 2$, $E \subset E(\mathbb{R})$- підпростір функцій з носіями на $[-1,1]$, а $F=E_{-1,-1}(\mathbb{R})$ - простір, побудований за $E(\mathbb{R})$. Нехай, крім того, існує така константа $b< \infty$, що для будь-якого числа $T>1$

$$\varphi^{-1}_{E(\mathbb{R})}(T)\|D_T\|_1 < b$$

Тоді перетворення Вінера W, задане формулою (1) буде обмеженим лінійним оператором з M_E в V_F.

Зауважимо, що крім просторів $L^p(\mathbb{R})$ наприклад, простори Лоренца Λ_ψ і Марцинкевича M_ψ з напівмультиплікативною фундаментальною функцією задовольняють умову теореми 5.1.1.

Теорема 5.1.2. Перетворення Вінера W буде обмеженим лінійним оператором з $\mathfrak{M}_E$ в V_F.

Наступний наслідок уточнює результат Лау і Лі[3)] про обмеженість перетворення Вінера з простора $\mathfrak{M}^p$ у простор V^q .

Наслідок 5.1.1. При $1 \le p \le 2$ перетворення Вінера буде обмеженим лінійним оператором з M^p в $V_{L^{q,p}(\mathbb{R})}$ і з $\mathfrak{M}^p$ в $V_{L^{q,p}(\mathbb{R})}$.

У п.5.2 ми досліджуємо деякі властивості перетворення Вінера (ін'єктивність, неізоморфізм та строгу сингулярність).

Теорема 5.2.1. Перетворення Вінера ін'єктивне з M_E в V_F, де M_E і V_F - простори, описані в п.5.1.

Теорема 5.2.2. Нехай простір $E(\mathbb{R})$ задовольняє умови теореми 5.1.1 і перетворення Вінера W неперервно відображає $\mathfrak{M}_E$ в V_{E^*}. Якщо верхній індекс Бойда q простору $E(\mathbb{R})$ менший від 2, то перетворення Вінера $W\colon I_E \to V^0_{E^*}$ буде неізоморфізмом.

Теорема 5.2.3. В умовах теореми 5.1.1 перетворення Вінера $W\colon I_E \to V^0_F$ не строго сингулярне (тим більше, не компактне).

Твердження 5.2.1. Нехай E- симетричний рефлексивний простір на відрізку, Y - банахів простір і $U\colon \mathfrak{M}_E \to Y$ - лінійний неперервний ін'єктивний оператор. Тоді звуження U на деякий підпростір континуальної ваги буде ізоморфізмом.

Автор висловлює щиру вдячність науковому керівнику доктору фізико - математичних наук А.М.Плічку за постановку задач і постійну увагу до роботи.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ РОБІТ ПО ТЕМІ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Kucher O.V., Plichko A.M. Limits on the real line of symmetric spaces on segments// Укр. мат. ж.-1995.- 3, N1, P.46-55.
2. Кучер О.В. Властивість Гротендіка у просторі $l_{\infty}(E)$ і ρ-властивість Банаха-Сакса в $c_0(E)$ // Доповіді НАН України-1995.- N8.- С. 16-19.
3. Kucher O.V., Plichko A.M. The Winer transformation on the limits of symmetric spaces // Acta Universitatis Carolinae, Math. et Phys.-1995.-36,2.
4. Кучер О.В. Некоторые геомерические свойства пространства СМО$^{\rho}$// Тез. науч. конф. ЗГУ - Запорожье.-1992.-С. 101-102.
5. Кучер О., Плічко А. Усереднені симетричні простори на прямій // Тез. міжнар. конф., присвяченої пам'яті акад. М.П.Кравчука.- Київ - Луцьк, 1992.- С.108.
6. Кучер О., Плічко А. Строга сингулярність локально інтегральних операторів в ідеальних банахових просторах // Тез. міжнар. матем. конф., присвяченої пам'яті Ганса Гана.- Чернівці.- 1994.- С.79.

Kucher O.V. Geometry of the function spaces connected with the Fourier and Wiener transformations. Manuscript. Thesis for a degree of Candidate of Science (Ph.D.) in Phisics and Mathematics, the spesiality 01.01.01 - Mathematical Analysis. Kharkov University. Kharkov.1995.

It is introdused and invistigated the limits on the real line of symmetric spaces on segments and the spaces of functions of bounded F-variation for the symmetric spaces F on $\mathbb{R}$. The properties of the Wiener transformation in these spaces are studied (boubdedness, injectivity, strict singularity etc.). It is proved the strict singularity of majorisable integral operators for a large class of function spaces.

Кучер О.В. Геометрия функциональных пространств связанных с преобразованиями Фурье и Винера. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01- математический анализ. Харьковский государственный Университет. Харьков. 1995.

Введены и исследованы пределы на прямой симметричных пространств на отрезках и пространства функций ограниченной F-вариации для симметричных пространств F на прямой. Изучаються свойства преобразования Винера в этих пространствах. Вчастности ограниченность, иньективность, строгая сингулярность и др. Доказана строгая сингулярность мажорируемых интегральных операторов для широкого класса пространств функций.

Ключові слова: симетричний простір, строга сингулярність лінійних операторів, перетворення Вінера, перетворення Фур'є, простори Орліча.

Підписано до друку І4.ІІ.95 .Формат 60×84¹⁄₁₆. Папір друк.№ 2
Друк. офсетний. Умовн. друк. арк.І.0. Тираж 75 прим. Зам.№2083

ЗЦНТЕІ, 330002, м.Запоріжжя, пр. Леніна 77.