МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

СТОРОЖ Олег Георгійович

МЕТОДИ ТЕОРІЇ РОЗШИРЕНЬ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ГРАНИЧНІ ОПЕРАТОРИ

01.01.01 - математичний аналіз

А в т о р е ф е р а т
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Львів - 1995

АВ 33.676

Дисертація є рукопис.

Робота виконана в Львівському державному університеті.

Офіційні опоненти :

доктор фізико-математичних наук,
професор Кужель О. В.,
доктор фізико-математичних наук,
професор Рофе-Бекетов Ф. С.,
доктор фізико-математичних наук
Лопушанський О. В.

Провідна установа: Інститут математики НАН України, м. Київ.

Захист відбудеться "15" лютого 1996 р. о 15-30 год. на засіданні спеціалізованої ради Д 04.04.01 при Львівському державному університуті ім. Ів. Франка за адресою : 290602, м. Львів, вул. Університетська, 1.

З дисертацією можна ознайомитись в науковій бібліотеці Львівського держуніверситету.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

Автореферат розісланий "30" листопада 1995 р.

ЛННБ України ім.В.Стефаника
00754903 (S)

Вчений секретар
спеціалізованої ради Микитюк Я. В.

АВ - 33.676

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Важливу роль в сучасному функціональному аналізі відіграє закладена Дж. фон Нейманом теорія розширень лінійних, перш за все симетричних, операторів в гільбертовому просторі. Його результати отримали дальший розвиток в роботах М. А. Наймарка і Б. Секефальві-Надя (розширення з виходом у ширший простір), М. О. Красносельського, А. В. Штрауса, О. В. Кужеля, Е. А. Коддінгтона, А. Дійксми, Г. Сноо (розширення симетричних відношень і нещільно визначених операторів), К. Фрідріхса, М. Г. Крейна, Філліпса (розширення невід'ємних і акретивних операторів) та багатьох інших математиків. У більшості з цих робіт опис шуканих розширень дано в термінах дефектних підпросторів.

М. Й. Вишик і М. Ш. Бірман отримали опис різних класів розширень оператора з обмеженим оберненим і застосували отримані результати для дослідження певних класів диференціальних операторів. Ф. С. Рофе-Бекетов та М. Л. Горбачук знайшли загальний вигляд самоспряженої крайової задачі для різних класів диференціально-операторних рівнянь в термінах крайових умов. Поширенню цих результатів на інші класи операторів присвячені роботи Л. Й. Вайнермана, В. І. Горбачук, В. О. Кутового, В. А. Михайлеця, а також А. Н. Кочубея і В. М. Брука, які показали, що схема досліджень, використана Ф. С. Рофе-Бекетовим та М. Л. Горбачуком, носить універсальний характер, і отримали опис дисипативних і самоспряжених розширень замкненого симетричного оператора з рівними дефектними числами у вигляді, який у випадку диференціальних операторів формулюється в термінах крайових умов.

В циклі робіт Ю. М. Арлінського, В. О. Деркача, М. М. Малламуда і Е. Р. Цекановського досліджено різні класи секторіальних (зокрема, акретивних) розширень невід'ємного оператора. Опис усіх максимально акретивних розширень мінімального додатно

визначеного оператора, породженого звичайним диференціальним виразом, отримано В. Д. Івансом та Дж. Ноулезом. Виявилось, що кожне таке розширення є спряженим до звуження максимального оператора, що визначається інтегральними крайовими умовами. Відзначимо, що диференціальні оператори з такими крайовими умовами досліджувалися Б. С. Павловим (в зв'язку з застосуваннями в теорії розсіяння), Т. Г. Керімовим і Ф. Г. Максудовим, Ю. І. Любичем, В. Брюнсом та іншими математиками. А. М. Кралл і Р. С. Браун розглянули клас операторів в L_2, що містить як звуження вказаного вигляду, так і спряжені з ними. Останні були названі диференціально-граничними операторами (ДГО). Крім цього, як показали Е. А. Коддінгтон і А. Н. Кочубей, ДГО містяться серед дисипативних, зокрема, самоспряжених, розширень нещільно визначених симетричних диференціальних операторів. Тому актуальним, на наш погляд, є вивчення класу операторів $T \in \mathcal{C}(H)$ (тут і далі $\mathcal{C}(H)$ - множина замкнених лінійних операторів в гільбертовому просторі H з областю визначення $D(T)$, щільною в H), який містить два фіксовані оператори L, $L_0 \in \mathcal{C}(H)$ ($L_0 \subset L$) множину

$$\{L_1 \in \mathcal{C}(H): \quad L_0 \subset L_1 \subset L\} \qquad (1)$$

і у випадку, коли L та L_0 - відповідно максимальний і мінімальний оператори, породжені даним диференціальним виразом, охоплює ДГО, зв'язані з цим виразом. Один з варіантів відповідної теорії (теорію споріднених операторів) запропонував В. Е. Лянце в припущенні, що $\dim [D(L)/D(L_0)] < \infty$.

Мета даної роботи - побудова нескінченновимірного аналогу теорії спорідненості і дослідження на її основі ДГО, зв'язаних з диференціально-операторними рівняннями, до яких, як відомо, зводяться деякі рівняння в частинних похідних.

Методика досліджень. Використовується (і частково розвивається) теорія розширень лінійних операторів в гільбертовому

просторі, теорія збурень таких операторів, методи дослідження граничних задач для диференціально-операторних рівнянь, теорія лінійних операторів в просторах з індефінітною метрикою.

В результаті вдається розвинути специфічну теорію збурень, яка охоплює не тільки зміну закону дії оператора, але і зміну його області визначення. В застосуванні до диференціальних операторів це означає збурення як диференціального виразу, так і крайових умов. Це природним чином приводить до різних нелокальних крайових задач, континуальних аналогів багатоточкових крайових задач, дозволяє доводити твердження про розв'язність деяких некласичних варіаційних задач.

Наукова новизна. Результати, викладені в дисертації, нові. В ній, зокрема, в термінах абстрактних граничних умов:

1. Описано максимально дисипативні розширення симетричного оператора з довільним індексом дефекту.

2. Встановлено загальний вигляд максимально невід'ємного та власного максимально акретивного розширення невід'ємного оператора.

3. Досліджено один клас збурень замкненого лінійного оператор, які змінюють не тільки закон його дії, а й область визначення, встановлено умови, що гарантують замкненість та щільну визначеність збуреного оператора, побудовано його резольвенту.

4. Розв'язано задачу про умови максимальної дисипативності і самоспряженості, а при певних припущеннях - про умови максимальної акретивності і максимальної невід'ємності розглядуваних збурень та про знаходження індукуючих їх квадратичних форм.

5. Описано усі максимально акретивні розширення додатно визначеного оператора зі скінченним індексом дефекту.

6. Результати, перераховані в попередніх пунктах, застосовано при дослідженні деяких конкретних класів диференціально-

граничних операторів.

Теоретична та практична значимість. В дисертації розроблені нові теоретико-операторні методи дослідження деяких класів замкнених лінійних операторів в гільбертовому просторі. Її результати носять теоретичний характер. Вони можуть знайти застосування при розв'язуванні конкретних задач математичної фізики.

Апробація роботи. Основні результати дисертації доповідалися в 5-ій (Новосибірськ-1979), 6-ій (Іркутськ-1981), 9-ій (Тернопіль-1984), 11-ій (Челябінськ-1986), 13-ій (Самара-1988), 14-ій (Новгород-1989), 15-ій (Ульяновськ-1990), 16-ій (Нижній Новгород-1991) школах з теорії операторів у функціональних просторах, в зональних школах-семінарах з спектральної теорії лінійних операторів (Ульяновськ-1979, 1981), в Воронезьких зимових математичних школах (1980, 1987), на республіканській конференції пам'яті М.Г. Крейна (Одеса-1990), на Міжнародних математичних конференціях, присвячених 100-річчю з дня народження С. Банаха (Львів-1992) і пам'яті академіка М.П. Кравчука (Київ, Луцьк-1992), на Всеукраїнській науковій конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь"(Дрогобич-1994), в Міжнародному математичному центрі ім. С. Банаха (Варшава-1992), на семінарах в Москві (МДУ, кер. проф. А.Г. Костюченко, проф. Б.М. Левітан), в Києві (ІМ НАН України, кер. проф. М.Л. Горбчук, проф. С.Д. Ейдельман), в Донецьку (ДонДУ, кер. проф. Е.Р. Цекановський), у Львові (ЛДУ, кер. проф. В.Е. Лянце).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1 - 24].

Структура та об'єм роботи. Дисертація складається з вступу, трьох розділів та списку літератури, викладених на 277 стр. машинописного тексту. Бібліографія містить 166 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність теми дисертації, коротко викладено основні її результати та роз'яснено позначення: $(\cdot|\cdot)_X$, $\|\cdot\|_X$ - скалярний добуток та норма в гільбертовому просторі X ; 1_X - тотожне перетворення цього простору; $R(T)$, $\ker T$ - область значень і ядро оператора T ; $\mathcal{B}(X,Y)$ $(\mathcal{B}_\infty(X,Y),\ \mathcal{B}^f(X,Y))$ - сукупність лінійних неперервних (компактних, неперервних скінченновимірних) операторів $T: X \to Y$, де X , Y - гільбертові простори, таких, що $D(T)=X$; $\mathcal{B}(X) \stackrel{def}{=} \mathcal{B}(X,X)$, $\mathcal{B}_\infty(X) \stackrel{def}{=} \mathcal{B}_\infty(X,X)$; $T|E$ та TE - відповідно звуження оператора T на множину E та образ цієї множини при відображенні T ; $(\cdot|\cdot)_T$, $\|\cdot\|_T$ - скалярний добуток і норма графіка оператора T; $D[T]$ - передгільбертів простір, що збігається як множина з $D(T)$ і наділений скалярним добутком $(\cdot|\cdot)_T$; $\oplus_T$, $\ominus_T$ - символи ортогональної суми і ортогонального доповнення в $D[T]$; під H розуміємо фіксований комплексний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot|\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$, а за вихідний об'єкт приймаємо пару операторів $L, L_0 \in \mathcal{C}(H)$ таких, що $L_0 \subset L$; $M \stackrel{def}{=} L_0^*$, $M_0 \stackrel{def}{=} L^*$ (отже, $M, M_0 \in \mathcal{C}(H)$, $M_0 \subset M$); $W^!$ - оператор, спряжений з оператором $W \in \mathcal{B}(D, \mathcal{H}_\mathcal{Y})$, якщо D - один з гільбертових просторів: $D[L]$ або $D[M]$, а $\mathcal{H}_\mathcal{Y}$ - допоміжний гільбертів простір, так що для всяких $y \in D$

$h \in \mathcal{H}_y$ $(Wy|h)_{\mathcal{H}_y} = (y|W'h)_D$ $(= (y|W^*h)$ якщо W^* існує);

якщо $\mathcal{H}_y = \mathcal{H}_{y_1} \oplus \mathcal{H}_{y_2}$, $W_i \in \mathcal{B}(D, \mathcal{H}_{y_i})$ $(i = 1, 2)$, то

$$W = W_1 \oplus W_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall y \in D \quad Wy = (W_1 y, W_2 y);$$

$s\text{-}\lim$, $w\text{-}\lim$ - символи для позначення відповідно сильної та слабкої границь операторних послідовностей або функцій;

$\rho(T)$, $\sigma(T)$, T_λ - резольвентна множина, спектр та резольвента оператора T, так що $\forall \lambda \in \rho(T)$ $T_\lambda = (T - \lambda 1)^{-1}$.

Розділ I присвячено теорії розширень, а саме встановленню умов, необхідних і достатніх для приналежності оператора L_1, що міститься в множині (1), до того чи іншого класу (з точки зору його розв'язності або секторіальності відповідної квадратичної форми).

В § 1 досліджено умови взаємної спряженості операторів L_1, $M_1 \in \mathcal{C}(H)$ таких, що $L_0 \subset L_1 \subset L$, $M_0 \subset M_1 \subset M$. Тут введено поняття крайової пари, яке відіграє важливу роль в роботі.

1.1 Означення. Нехай $\mathcal{H}_y$ - гільбертів простір, а $\mathcal{U} \in \mathcal{B}(D[L], \mathcal{H}_y)$. Пара $(\mathcal{H}_y, \mathcal{U})$ називається крайовою для (L, L_0), якщо $\ker \mathcal{U} = D(L_0)$, $R(\mathcal{U}) = \mathcal{H}_y$. При цьому $\mathcal{H}_y$ називається крайовим простором, а $\mathcal{U}$ - повним крайовим оператором.

Має місце абстрактний аналог формули Лагранжа.

1.6 Наслідок. Нехай $\mathcal{H}_{y_1}$, $\mathcal{H}_{y_2}$ - гільбертові простори, а $\mathcal{U}_i \in \mathcal{B}(D[L], \mathcal{H}_{y_i})$ $(i = 1, 2)$ такі, що $(\mathcal{H}_y, \mathcal{U})$, де $\mathcal{H}_y = \mathcal{H}_{y_1} \oplus \mathcal{H}_{y_2}$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$, є крайовою парою для (L, L_0).

Існують єдині $\tilde{\mathcal{U}}_1 \in \mathcal{B}(D[M], \mathcal{H}_{y_2})$, $\tilde{\mathcal{U}}_2 \in \mathcal{B}(D[M], \mathcal{H}_{y_1})$ такі, що $(\tilde{\mathcal{H}}_y, \tilde{\mathcal{U}}) = (\mathcal{H}_{y_2} \oplus \mathcal{H}_{y_1}, \tilde{\mathcal{U}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{U}}_2)$ - крайова пара для (M, M_0) і

$$\forall y \in D(L), \ \forall z \in D(M) \quad (Ly|z) - (y|Mz) = (i\mathcal{J}\mathcal{U}y|\tilde{\mathcal{U}}z)_{\tilde{\mathcal{H}}_y} = (\mathcal{U}_1 y|\tilde{\mathcal{U}}_2 z)_{\mathcal{H}_{y_1}} - (\mathcal{U}_2 y|\tilde{\mathcal{U}}_1 z)_{\mathcal{H}_{y_2}}. \tag{2}$$

де $\forall h_i \in \mathcal{H}_{y_i}$ $(i = 1, 2)$ $\mathcal{J}(h_1, h_2) = (ih_2, -ih_1)$.

Перш ніж переходити до формулювання основних результатів, пояснимо, що оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, де $\mathcal{H}$ - гільбертів простір, ми називаємо правильним, якщо існують $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ і ортопроектор $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такі, що $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ і $A = P\mathcal{A}$. Зокрема, якщо $(\mathcal{H}, \mathcal{U})$ - крайова пара для (L, L_0), а $U = P\mathcal{U}$, то говоримо, що U - правильний крайовий оператор.

1.16 Твердження. Нехай $L_1 \in \mathcal{C}(H)$, $L_0 \subset L_1 \subset L$, а $\mathcal{H}$ - крайовий простір для (L, L_0). Існує ортогональний розклад $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ і правильні крайові оператори $U_1 \in \mathcal{B}(D[L], \mathcal{H}_1)$, $V_1 \in \mathcal{B}(D[M], \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_1)$ такі, що

$$R(U_1) = \mathcal{H}_1, \quad R(V_1) = \mathcal{H}_2, \quad \ker U_1 = D(L_1), \quad \ker V_1 = D(L_1^*).$$

Далі розглядається ситуація, коли $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ - крайовий простір для (L, L_0), $U_1 \in \mathcal{B}(D[L], \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$, $V_1 \in \mathcal{B}(D[M], \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_1)$ - правильні крайові оператори, $L_1 \subset L$, $M_1 \subset M$, причому

$$R(U_1) = \mathcal{H}_1, \; R(V_1) = \mathcal{H}_2, \; D(L_1) = \ker U_1, \; D(M_1) = \ker V_1.$$

1.19 Теорема. Такі твердження еквівалентні:

а) $L_1^* = M_1$, б) $D[L_0] \oplus_L MR(V_1') = \ker U_1$.

У § 2 розв'язано задачу про опис максимально дисипативних (див. с. 12), зокрема, самоспряжених, розширень симетричного оператора $L_0 \subset L_0^* \stackrel{def}{=} L$ $(L_0 \in \mathcal{C}(H))$. У випадку, коли L_0 має рівні дефектні числа, ця задача розв'язана А. Н. Кочубеєм і В. М. Еруком, які встановили, що для кожного симетричного оператора $L_0 \in \mathcal{C}(H)$ з рівними дефектними числами існує простір граничних значень (ПГЗ), тобто трійка $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ така, що $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \Gamma_1 \oplus \Gamma_2)$ - крайова пара для (L, L_0) і

$$\forall y, z \in D(L)\ (Ly|z) - (y|Lz) = (i\mathcal{J}\Gamma y|\Gamma z)_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} = \tag{3}$$
$$= (\Gamma_1 y|\Gamma_2 z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2 y|\Gamma_1 z)_{\mathcal{H}},$$

де $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$,

$$\forall h_1, h_2 \in \mathcal{H}\ \ \mathcal{J}(h_1, h_2) = (ih_2, -ih_1). \tag{4}$$

2.1 Означення. Нехай $\mathcal{H}_y^+, \mathcal{H}_y^-$ - гільбертові простори, $\delta_\pm \in \mathcal{B}(D[L], \mathcal{H}_y^\pm)$, $\mathcal{H}_y = \mathcal{H}_y^+ \oplus \mathcal{H}_y^-$, $\delta = \delta_+ \oplus \delta_-$. Четвірка $(\mathcal{H}_y^+, \mathcal{H}_y^-, \delta_+, \delta_-)$ називається антисиметричним ПГЗ оператора L_0, якщо

1) $\dim \mathcal{H}_y^\pm = \dim \ker (L \mp i 1_H) \overset{def}{=} m_\pm$,

2) $\ker \delta = D(L_0)$, 3) $R(\delta) = \mathcal{H}_y$,

4) $\forall y, z \in D(L)\ (Ly|z) - (y|Lz) = (i\mathcal{J}\delta y|\delta z)_{\mathcal{H}_y} =$

$$= i[(\delta_+ y|\delta_+ z)_{\mathcal{H}_y^+} - (\delta_- y|\delta_- z)_{\mathcal{H}_y^-}], \tag{5}$$

де

$$\forall h_+ \in \mathcal{H}_y^+, \forall h_- \in \mathcal{H}_y^-\ \ \mathcal{J}(h_+, h_-) = (h_+, -h_-). \tag{6}$$

В роботі показано (теорема 2.3), що для будь-якого гільбертового простору $\mathcal{H}_y$ розмірності $m_+ + m_-$ існують ортогональний розклад $\mathcal{H}_y = \mathcal{H}_y^+ \oplus \mathcal{H}_y^-$ і $\delta_\pm \in \mathcal{B}(D[L], \mathcal{H}_y^\pm)$ такі, що $(\mathcal{H}_y^+, \mathcal{H}_y^-, \delta_+, \delta_-)$ - антисиметричний ПГЗ оператора L_0.

2.15 Наслідок. Нехай $(\mathcal{H}_y^+, \mathcal{H}_y^-, \delta_+, \delta_-)$ - антисиметричний ПГЗ оператора L_0, $\mathcal{H}_y = \mathcal{H}_y^+ \oplus \mathcal{H}_y^-$, $A_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_y, \mathcal{H}_y^-)$, $A_1^\pm = A_1|\mathcal{H}_y^\pm$,

$$D(L_1) = \{y \in D(L): A_1^+ \delta_+ y + A_1^- \delta_- y = 0\},\ L_1 \subset L. \tag{7}$$

Такі твердження еквівалентні:

а) L_1 максимально дисипативний (самоспряжений);

б) $A_1^+ (A_1^+)^* \le A_1^- (A_1^-)^*$, $\ker A_1^- = \{0\}$

$(A_1^+ (A_1^+)^* = A_1^- (A_1^-)^*$, $\ker A_1^\pm = \{0\})$;

в) існує стиск (унітарний оператор) $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-)$ такий, що

$$D(L_1) = \{ y \in D(L) : \delta_- y = K \delta_+ y \}.$$

З результатів Р.С. Філліпса і А.В. Штрауса випливає, що в наслідку 2.15 наведено загальний вигляд максимально дисипативного розширення оператора L_0. Умови максимальної акумулятивності формулюються аналогічним чином.

В § 3 побудовано резольвенту оператора L_1 виду (1). Тут вважаються даними крайові пари $(\mathcal{H}, \Gamma) = (\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \Gamma_1 \oplus \Gamma_2)$ – для (L, L_0) та $(\mathcal{H}, \tilde{\Gamma}) = (\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_1, \tilde{\Gamma}_1 \oplus \tilde{\Gamma}_2)$ – для (M, M_0) і оператори $A_{11} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, $A_{12} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ такі, що

$$\forall y \in D(L), \ \forall z \in D(M) \quad (Ly|z) - (y|Mz) = (\Gamma_1 y | \tilde{\Gamma}_2 z)_{\mathcal{H}_1} - (\Gamma_2 y | \tilde{\Gamma}_1 z)_{\mathcal{H}_2},$$

$$D(L_1) = \{ y \in D(L) : A_1 \Gamma y \equiv A_{11} \Gamma_1 y + A_{12} \Gamma_2 y = 0 \}, \quad L_1 \subset L. \tag{8}$$

З результатів, викладених в § 1, випливає, що L_1 завжди може бути поданий у вигляді (8), причому, не зменшуючи загальності, можна вважати, що $R(A_1) = \mathcal{H}_1$.

Припустимо, що для будь-якого $\lambda \in \rho(\hat{L})$ відома резольвента $\hat{L}_\lambda$ оператора $\hat{L} = L | \ker \Gamma_2$, а отже й резольвента $\hat{M}_{\bar{\lambda}}$ оператора $\hat{M} = \hat{L}^* = M | \ker \tilde{\Gamma}_2$. Покладемо

$$Z_\lambda = (\tilde{\Gamma}_1 \hat{M}_{\bar{\lambda}})^*.$$

В роботі доведено, що при всіх $\lambda \in \rho(\hat{L})$

$$Z_\lambda = (\hat{L}_\lambda (1_H + \lambda M) + M) \tilde{\Gamma}_1^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, H), \quad R(Z_\lambda) = \ker (L - \lambda 1_H),$$

$$Z_\lambda \Gamma_2 | \ker (L - \lambda 1_H) = 1_{\ker (L - \lambda 1_H)}, \quad \Gamma_2 Z_\lambda = 1_{\mathcal{H}_2}.$$

Таким чином, для будь-якого $\lambda \in \rho(\hat{L})$ і $\alpha \in \mathcal{H}_2$

$$y = Z_\lambda a \iff (Ly = \lambda y,\ \Gamma_2 y = a).$$

Введемо позначення: $M(\lambda) \overset{def}{=} \Gamma_1 Z_\lambda \quad (\lambda \in \rho(\hat{L}))$.

3.4 Наслідок. $\forall \lambda \in \rho(\hat{L}) \quad M(\lambda) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ і

$$D(L_0) \dotplus \ker(L - \lambda 1_H) = \{y \in D(L) : \Gamma_1 y = M(\lambda)\Gamma_2 y\}. \qquad (9)$$

Аналогічними властивостями володіють оператор-функції $\tilde{Z}_{\bar\lambda} = (\Gamma_1 \hat{L}_\lambda)^*$ та $\tilde{M}(\bar\lambda) = \Gamma_1 \tilde{Z}_{\bar\lambda}$. Крім цього, $M(\lambda)^* = \tilde{M}(\bar\lambda)$.

Покладемо $A_\lambda = A_{11} M(\lambda) + A_{12}$.

В роботі показано, що якщо $R(A_1) = \mathcal{H}_1$, то

а) $\dim \ker(L_1 - \lambda 1_H) = \dim \ker A_\lambda$,

б) $\dim \ker(L_1^* - \bar\lambda 1_H) = \dim \ker A_\lambda^*$,

в) $L_1 - \lambda 1_H$ нормально розв'язний тоді і тільки тоді, коли A_λ нормально розв'язний,

г) $\lambda \in \rho(L_1)$ тоді і тільки тоді, коли $A_\lambda^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

В цьому випадку

$$(L_1 - \lambda 1_H)^{-1} = \hat{L}_\lambda - Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_{11} \tilde{Z}_{\bar\lambda}^*. \qquad (10)$$

Зауважимо, що оператор-функція Z_λ, про яку йшла мова, є аналогом введеного М. Г. Крейном і І. Є. Овчаренком операторного поля і що задача про опис різних класів розширень замкненого оператора в точки зору їх розв'язності в термінах абстрактних граничних умов досліджувалась М. Й. Вишиком, Г. Грабб, В. М. Бруком, Л. Й. Вайнерманом, В. О. Деркачем і М. М. Маламудом, А. Н. Кочубеєм, В. А. Михайлецем. Але в роботах цих математиків граничні умови задано не в загальному (див. (8)), а в деякому "канонічному" вигляді.

Метою §4 є побудова жорсткого (фрідріхсівського) L_F та м'якого (крейнівського) L_K розширень невід'ємного оператора $L_0 \in \mathcal{C}(H)$ в термінах ПГЗ. Тут використовується схема, запропонована Т. Андо і К. Нішіо та А.В. Штраусом.

Нехай $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ - ПГЗ оператора L_0 такий, що $\hat{L} \stackrel{def}{=} L_0^* | \ker \Gamma_2 \neq 0$. Покладемо $Z_\lambda = (\Gamma_1 \hat{L}_\lambda)^*$, $M(\lambda) = \Gamma_1 Z_\lambda$ $(\lambda \in \rho(\hat{L}))$. З (9) випливає, що $M(\lambda)$ є функцією Вейля оператора L_0, яка відповідає ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, - в сенсі означення, запропонованого В.О. Деркачем і М.М. Маламудом. Відзначимо, що

$$\forall \lambda, \mu \in \rho(\hat{L}) \quad M(\lambda) - M(\mu) = (\lambda - \mu) Z_\mu^* Z_\lambda,$$

зокрема, при $\mu < \lambda < \inf \hat{L}$

$$M(\lambda) = M(\lambda)^*, \quad M(\lambda) >> M(\mu), \quad M'(\lambda) = Z_\lambda^* Z_\lambda.$$

Позначимо через $\mathcal{U}(\lambda)$ характеристичну функцію оператора L_0 в сенсі А.В. Штрауса - А.Н. Кочубея:

$$\forall \lambda \in \rho(\hat{L}) \quad \mathcal{U}(\lambda) = (M(\lambda) - i 1_{\mathcal{H}})(M(\lambda) + i 1_{\mathcal{H}})^{-1}.$$

Неважко довести, що існують унітарні оператори $\mathcal{U}(-\infty), \mathcal{U}(0) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такі, що $\mathcal{U}(-\infty) = \underset{\lambda \to -\infty}{s\text{-}\lim} \mathcal{U}(\lambda)$, $\mathcal{U}(0) = \underset{\lambda \to -0}{s\text{-}\lim} \mathcal{U}(\lambda)$. При цьому

$$D(L_F) = \{ y \in D(L_0^*) : (\mathcal{U}(-\infty) - 1_{\mathcal{H}}) \Gamma_1 y + i (\mathcal{U}(-\infty) + 1_{\mathcal{H}}) \Gamma_2 y = 0 \},$$

$$D(L_K) = \{ y \in D(L_0^*) : (\mathcal{U}(0) - 1_{\mathcal{H}}) \Gamma_1 y + i (\mathcal{U}(0) + 1_{\mathcal{H}}) \Gamma_2 y = 0 \}.$$

Побудова жорсткого і м'якого розширень оператора L_0 спрощується у випадку, коли L_0 та $\hat{L}$ додатно визначені. В цьому випадку існує $s\text{-}\lim_{\lambda \to -\infty} (M(\lambda) - M(0))^{-1} \stackrel{def}{=} B \leq 0$. Покладемо

$$\gamma_1 y = \Gamma_1 y - M(0) \Gamma_2 y, \quad \gamma_2 y = -B \Gamma_1 y + (1_{\mathcal{H}} + B M(0)) \Gamma_2 y.$$

Виявляється, що $(\mathcal{H}, \gamma_1, \gamma_2)$ - ПГЗ оператора L_0, причому $D(L_F) = \ker \gamma_2$, $D(L_K) = \ker \gamma_1$.

В цьому ж параграфі встановлено деякі аналітичні та асимптотичні властивості функцій Z_λ та $M(\lambda)$. Зокрема, показано, що має місце абстрактний аналог леми Рімана-Лебега:

$$w\text{-}\lim_{\lambda\to-\infty} Z_\lambda = 0, \qquad s\text{-}\lim_{\lambda\to-\infty} Z_\lambda^* = 0.$$

§ 5 присвячено описові максимально невід'ємних і власних максимально θ-акретивних (перш за все акретивних) розширень невід'ємного оператора $L_0 \in \mathcal{C}(H)$. Лінійний оператор $T: H \to H$ називаємо θ-акретивним $(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2})$, якщо для будь-якого $y \in D(T)$ $\arg(Ty|y) \in [\theta - \frac{\pi}{2}, \theta + \frac{\pi}{2}]$ і максимально θ-акретивним, якщо, крім цього, він не має в H θ-акретивних розширень. У випадку, коли $\theta = 0$ $(\theta = \frac{\pi}{2}, \theta = -\frac{\pi}{2})$, θ-акретивний оператор називається акретивним (дисипативним, акумулятивним).

5.1 Означення. Нехай $L_0 \in \mathcal{C}(H)$ - додатно визначений оператор. ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ оператора L_0 називається жорстким, якщо $\ker \gamma_1 = D(L_0) + \ker L_0^* = D(L_K)$, $\ker \gamma_2 = D(L_F)$.

5.8 Наслідок. Нехай $L_0 >> 0$, $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ - ПГЗ оператора L_0 такий, що $\hat{L} = L_0^* | \ker \Gamma_2 >> 0$, а B, $M(0)$, γ_1, γ_2 такі, як вище. Покладемо:

$$a_{11} = A_{11}(1_{\mathcal{H}} + M(0)B) + A_{12}B, \quad a_{12} = A_{11}M(0) + A_{12}.$$

Оператор виду (8) максимально θ-акретивний тоді і тільки тоді, коли виконується одна (а отже й інша) з двох еквівалентних умов:

а) $\mathrm{Re}(e^{i\theta} a_{11} a_{12}^*) \le 0$, $\ker(a_{11} - e^{-i\theta} a_{12}) = \{0\}$,

б) існує стиск $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такий, що

$$D(L_1) = \{y \in D(L_0^*) : (K - 1_{\mathcal{H}})\gamma_1 y + e^{i\theta}(K + 1_{\mathcal{H}})\gamma_2 y = 0\}.$$

Для максимальної невід'ємності цього оператора необхідно і достатньо, щоб виконувалась кожна з таких еквівалентних умов:

а) $a_{11}a_{12}^{*} \le 0$, $\ker(a_{11}-a_{12}) = \{0\}$,

б) існує стиск $K = K^{*} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такий, що

$$D(L_1) = \{y \in D(L_0^{*}) : (K-1_{\mathcal{H}})\gamma_1 y + (K+1_{\mathcal{H}})\gamma_2 y = 0\}.$$

Зі сказаного вище і з результатів §3 випливає, що якщо L_1 - власне максимально акретивне розширення оператора $L_0 \ge 0$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (L_F + \varepsilon 1_{\mathcal{H}})^{-1} \le \mathrm{Re}(L_1 + \varepsilon 1_{\mathcal{H}})^{-1} \le (L_K + \varepsilon 1_{\mathcal{H}})^{-1}.$$

Далі розглядається ситуація, коли L_0 - невід'ємний, але не обов'язково додатно визначений оператор, причому, для простоти, припускаємо, що $L_F = L_0^{*} | \ker \Gamma_2$.

5.12 Теорема. При наведених припущеннях оператор L_1 виду (8) максимально акретивний (максимально невід'ємний) тоді і тільки тоді, коли

а) існує $\underset{\lambda \to -0}{s\text{-}\lim} A_{11} M(\lambda) A_{11}^{*} \overset{\text{def}}{=} A_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

б) $A_0 + \mathrm{Re}(A_{11}A_{12}^{*}) \le 0$

(відповідно $A_0 + A_{11}A_{12}^{*} \le 0$),

в) для деякого, а отже для будь-якого $\lambda < 0$

$$\ker(A_{11} - A_{12} - A_{11}M(\lambda)) = \{0\}.$$

Введемо в розгляд оператори

$$L_{min} = L_0^{*} | (D(L_F) \cap D(L_K)), \quad L_{max} = L_0^{*} | (D(L_F) + D(L_K)).$$

Легко аміркувати, що

а) $L_{min} = L_0 \iff \ker(U(0) - 1_{\mathcal{H}}) = \{0\}$,

б) $L_{max} = \overline{L_{max}} \iff R(U(0) - 1_{\mathcal{H}}) = \overline{R(U(0) - 1_{\mathcal{H}})}$,

в) $L_{max} = L_0^{*} \iff R(U(0) - 1_{\mathcal{H}}) = \mathcal{H}$,

г) $L_1^* \subset \overline{L_{max}} \iff R(A_{11}^*) \subset \overline{R(U(0)-1_{\mathcal{H}})}$,

д) для будь-якого власного максимально акретивного розширення L_1 оператора L_0 $L_{min} \subset L_1 \subset \overline{L_{max}}$.

Далі, нехай

$$\mathcal{H}_1 = \overline{R(U(0)-1_{\mathcal{H}})}, \quad \mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1, \quad \gamma_{ij} = P_j \Gamma_i \ (i,j=1,2),$$

де P_i - ортопроектор $\mathcal{H} \to \mathcal{H}_i$ $(i=1,2)$,

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} m(\lambda) & m_{12}(\lambda) \\ m_{21}(\lambda) & m_{22}(\lambda) \end{pmatrix}, \qquad U(0) = \begin{pmatrix} u_0 & 0 \\ 0 & 1_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix}$$

- матричні зображення відповідних відображень.

Легко бачити, що $(\mathcal{H}_1, \gamma_{11}, \gamma_{21})$ - ПГЗ для L_{min}. Таким чином будь-яке власне максимально акретивне розширення L_1 оператора L_0 можна подати у вигляді:

$$D(L_1) = \{y \in D(L_0^*): \gamma_{22} y = 0, \ \alpha_1 \gamma_{11} y + \alpha_2 \gamma_{21} y = 0\}, \ L_1 \subset L_0^*,$$

де $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$.

Далі в § 5 розглянуто деякі часткові випадки. Зокрема, встановлено (теорема 5.29) критерій максимальної акретивності (максимальної невід'ємності) оператора L_1, який задовольняє умову $L_1^* \subset L_{max}$ $(L_1 \subset L_{max})$.

Крім цього, доведено, що в ситуації, коли L_{max} замкнений (тільки тоді), існує $s\text{-}\lim\limits_{\varepsilon \to +0} M(-\varepsilon) = m_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$. Ця обставина дає можливість поширити поняття жорсткого ПГЗ на деякі невід'ємні оператори з нульовою нижньою гранню.

5.34 Означення. Нехай $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ - гільбертові простори, $\Gamma_{ij} \in \mathcal{B}(D[L], \mathcal{H}_j)$, $\Gamma_i = \Gamma_{i1} \oplus \Gamma_{i2}$ $(i,j=1,2)$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

Шістка $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \Gamma_{21}, \Gamma_{22})$ називається жорстким ПГЗ оператора L_0, якщо

а) $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ - ПГЗ оператора L_0,

б) $D(L_F) = \ker \Gamma_{21} \cap \ker \Gamma_{22}$; $D(L_K) = \ker \Gamma_{11} \cap \ker \Gamma_{22}$.

В роботі доведено, що для будь-якого невід'ємного $L_0 \in \mathcal{C}(H)$ такого, що $L_{max} = \overline{L_{max}}$, жорсткий ПГЗ існує.

5.39 Теорема. Нехай $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \Gamma_{21}, \Gamma_{22})$ - жорсткий ПГЗ оператора L_0, а L_1 - його власне максимально акретивне (максимально невід'ємне) розширення. Існують $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ такі, що

$$D(L_1) = \{y \in D(L_0^*) : \Gamma_{22} y = 0,\ B_1 \Gamma_{11} y + B_2 \Gamma_{21} y = 0\},\ L_1 \subset L_0^*, \quad (f1)$$

$\mathrm{Re}(B_1 B_2^*) \le 0$ (відповідно $B_1 B_2^* \le 0$) і $\ker(B_1 - B_2) = \{0\}$.

Навпаки, якщо L_1 визначено згідно з (11), а B_1 та B_2 задовольняють перераховані умови, то L_1 максимально акретивний (максимально невід'ємний).

5.40 Наслідок. В умовах теореми 5.39 L_1 максимально акретивний (максимально невід'ємний) тоді і тільки тоді, коли існує стиск (самоспряжений стиск) $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ такий, що

$$D(L_1) = \{y \in D(L_0^*) : \Gamma_{22} y = 0,\ (K - 1_{\mathcal{H}_1})\Gamma_{11} y + (K + 1_{\mathcal{H}_1})\Gamma_{21} y = 0\}.$$

Відзначимо, що відмінний від запропонованого в дисертації спосіб побудови жорсткого ПГЗ невід'ємного оператора у випадку $L_{max} = L_0^*$ вказано Ю. М. Арлінським. В близькій, хоч і дещо іншій в порівнянні з вище викладеною, формі опис максимально невід'ємних і власних максимально акретивних розширень невід'ємного оператора отримано В. О. Деркачем, М. М. Маламудом та Е. Р. Цекановським, у випадку, коли $L_0 >> 0$, - А. Н. Кочубеєм та В. А. Михайлецем. В термінах дефектних просторів задача про різні класи розширень невід'ємного оператора досліджувалася

М. Ш. Бірманом, А. В. Штраусом, О. В. Кужелем і Е. Роткевич та іншими математиками.

Розділ II є центральним в дисертації. У ньому розглядається один клас збурень замкненого щільно визначеного лінійного оператора в гільбертовому просторі, які змінюють не тільки закон його дії, а й область визначення. Як і в попередньому розділі, роль вихідного об'єкта тут відіграє пара (L, L_0), де $L, L_0 \in \mathcal{C}(H)$, $L_0 \subset L$. $M \stackrel{def}{=} L_0^*$, $M_0 \stackrel{def}{=} L^*$.

В § 6 дано опис таких збурень в термінах крайових пар.

6.1 Означення. Звуження $\hat{L}$ оператора L називається гладким (відносно (L, L_0)), якщо $\hat{L} \in \mathcal{C}(H)$, $D(\hat{L}^*) \subset D(M)$ і $D(\hat{L}^*)$ замкнена в $D[M]$.

6.2 Означення. Оператор $\hat{Q} \in \mathcal{B}(D[L], H)$ називається майже обмеженим (відносно (L, L_0)), якщо $\hat{Q}|D(L_0)$ є $H \to H$ -обмеженим відображенням.

Основний результат параграфа міститься в таких теоремах.

6.5 Теорема. Нехай $\mathcal{Y}$ - крайовий простір для (L, L_0) і $T = \hat{L} + \hat{Q}$, де $\hat{L}$ - гладке звуження оператора L, а $\hat{Q}$ - майже обмежений відносно (L, L_0). Існують ортогональний розклад $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2$ і $U_i \in \mathcal{B}(D[L], \mathcal{Y}_i)$, $\Phi_i \in \mathcal{B}(H, \mathcal{Y}_i)$, $Q \in \mathcal{B}(H)$ $(i = 1, 2)$ такі, що

$(\mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2, U_1 \oplus U_2)$ - крайова пара для (L, L_0),

$$R(U_1 - \Phi_1) = R(U_1) = \mathcal{Y}_1, \tag{12}$$

$$D(T) = \{y \in D(L): U_1 y = \Phi_1 y\}, \tag{13}$$

$$\forall y \in D(T) \quad Ty = Ly + \Phi_2^* U_2 y + Qy. \tag{14}$$

6.9 Теорема. Нехай $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$ - гільбертові простори, $Q \in$

$\in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $U_i \in \mathcal{B}(D[L], \mathcal{Y}_i)$, $\Phi_i \in \mathcal{B}(H, \mathcal{Y}_i)$ $(i=1,2)$, причому $(\mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2,\ U_1 \oplus U_2)$ - крайова пара для (L, L_0), $R(U_1 - \Phi_1)$ замкнена в $\mathcal{Y}_1$, $\tilde{U}_1 \in \mathcal{B}(D[M], \mathcal{Y}_2)$, $\tilde{U}_2 \in \mathcal{B}(D[M], \mathcal{Y}_1)$ (одноaначно) визначаються умовою (2), а оператор T - за допомогою співвідношень (13) - (14). Тоді

а) T щільно визначений і виконуються рівності (12);

б) $L|D(T)$ - гладке звуження оператора L;

в) $D(T^*) = \{ z \in D(M):\ \tilde{U}_1 z = \Phi_2 z \}$,

$$\forall z \in D(T^*)\quad T^* z = Mz + \Phi_1^* \tilde{U}_2 z + Q^* z .$$

6.10. Наслідок. В умовах теореми 6.9 T^* є майже обмеженим збуренням гладкого звуження оператора M відносно (M, M_0) тоді і тільки тоді, коли $R(\tilde{U}_1 - \Phi_2) = \mathcal{Y}_2$.

В роботі доведено, що якщо Φ_1 та Φ_2 компактні або досить малі за нормою, то $U_1 - \Phi_1$ та $\tilde{U}_1 - \Phi_2$ нормально розв'язані і $T \in \mathcal{C}(H)$ (у випадку, коли U_1, U_2 мають L-грань, рівну нулю, а $\tilde{U}_1$, $\tilde{U}_2$ - M-грань, рівну нулю, це має місце при всіх $\Phi_i \in \mathcal{B}(H, \mathcal{Y}_i)$, $i = 1, 2$).

6.13 Приклад. Нехай L_0 - симетричний оператор з рівними дефектними числами, $L = L_0^*$, $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ - ПГЗ оператора L_0. $\Phi_i \in \mathcal{B}_\infty(H, \mathcal{H})$ $(i=1,2)$, $A = (A_{ij})_{i,j=1}^2$ - бієкція $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$,

$$D(S) = \{ y \in D(L):\ A_{11}\Gamma_1 y + A_{12}\Gamma_2 y = \Phi_1 y \}, \qquad (15)$$

$$\forall y \in D(S)\quad Sy = Ly + \Phi_2^* (A_{21}\Gamma_1 y + A_{22}\Gamma_2 y), \qquad (16)$$

$A^{-1} = (B_{ij})_{i,j=1}^2$. З теореми 6.9 випливає, що $S \in \mathcal{C}(H)$,

$$D(S^*) = \{ z \in D(M):\ B_{22}^* \Gamma_1 z - B_{12}^* \Gamma_2 z = \Phi_2 z \},$$

$$\forall z \in D(S^*)\quad S^* z = Mz + \Phi_1^* (-B_{21}^* \Gamma_1 z + B_{11}^* \Gamma_2 z).$$

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

§ 7 є продовженням попереднього. У ньому вважаються даними гільбертові простори $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ такі, що $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ - крайовий простір для (L, L_0) і $\Phi_i \in \mathcal{B}(H, \mathfrak{H}_i)$, $i = 1, 2$. Писатимемо: $(U_1, U_2) \in \{\Phi_1, \Phi_2\}$, якщо $U_i \in \mathcal{B}(D[L], \mathfrak{H}_i)$ $(i = 1, 2)$, $U \overset{def}{=} U_1 \oplus U_2$ - правильний крайовий оператор для (L, L_0), $R(U_1) = R(U_1 - \Phi_1) = \mathfrak{H}_1$, $R(U_2) = \overline{R(\Phi_2)}$, $R(U) = R(U_1) \oplus R(U_2)$.

Аналогічно слід розуміти запис $(V_1, V_2) \in \{\Phi_2, \Phi_1\}$, де $V_1 \in \mathcal{B}(D[M], \mathfrak{H}_2)$, $V_2 \in \mathcal{B}(D[M], \mathfrak{H}_1)$.

Для довільних пар $(U_1, U_2) \in \{\Phi_1, \Phi_2\}$, $(V_1, V_2) \in \{\Phi_2, \Phi_1\}$ визначимо оператори S та $\tilde{S}$ за допомогою співвідношень

$$D(S) = \{y \in D(L): U_1 y = \Phi_1 y\},$$
$$\forall y \in D(S) \quad Sy = Ly + \Phi_2^* U_2 y,$$
$$D(\tilde{S}) = \{z \in D(M): V_1 z = \Phi_2 z\},$$
$$\forall z \in D(\tilde{S}) \quad \tilde{S} z = Mz + \Phi_1^* V_2 z.$$

З результатів § 6 випливає, що S є майже обмеженим збуренням гладкого звуження оператора L відносно (L, L_0). Більше того, кожне таке збурення має вигляд $T = S + Q$, де $Q \in \mathcal{B}(H)$. Далі, нехай

$$D(L_1) = \ker U_1, \; L_1 \subset L; \quad D(M_1) = \ker V_1, \; M_1 \subset M.$$

7.4 Теорема. Нехай $(U_1, U_2) \in \{\Phi_1, \Phi_2\}$, $(V_1, V_2) \in \{\Phi_2, \Phi_1\}$. Оператори S та $\tilde{S}$ взаємно спряжені тоді і тільки тоді, коли

а) $$UMV^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1_{\overline{R(\Phi_1)}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1_{\overline{R(\Phi_2)}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (17)$$

де UMV' трактується як відображення $\overline{R(\Phi_2)} \oplus R(\Phi_2)^{\perp} \oplus \overline{R(\Phi_1)} \to \overline{R(\Phi_1)} \oplus R(\Phi_1)^{\perp} \oplus \overline{R(\Phi_2)}$,

б) $L_1^* = M_1$.

Оператори S та $\tilde{S}$ інтерпретуємо як збурення операторів L_1 та M_1 відповідно.

У § 8 побудовано резольвенту збуреного оператора. З отриманих співвідношень, які являють собою нескінченновимірні аналоги формул Ароншайна - Ванштейна, випливає, що якщо Φ_1 і Φ_2 компактні, то й різниця резольвент збуреного та незбуреного операторів компактна. Зокрема, якщо Φ_1 та Φ_2 ядерні, $S = S^*$ (а отже $L_1 = L_1^*$), то абсолютно неперервні частини операторів S та L_1 унітарно еквівалентні.

В § 9 у ситуації, коли L_0 - симетричний оператор з рівними дефектними числами і $L = L_0^*$, встановлено умови максимальної дисипативності досліджуваних операторів. Нехай $(\mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2,\ U_1 \oplus U_2)$ - крайова пара для (L, L_0), а $\Phi_i \in \mathcal{B}_\infty(H, \mathcal{Y}_i)$ $(i = 1,2)$. В роботі доведено, що з максимальної дисипативності оператора S, визначеного за допомогою співвідношень $D(S) = \{y \in D(L): U_1 y = \Phi_1 y\}$, $\forall y \in D(S)$ $Sy = Ly + \Phi_2^* U_2 y$, випливає існування бієкції $C_2 \in \mathcal{B}(\overline{R(\Phi_2)}, \overline{R(\Phi_1)})$, яка задовольняє рівність $\Phi_1 = C_2 \Phi_1$, тому можна зразу вважати, що

$$D(S) = \{y \in D(L): U_1 y = C \Phi y\}, \quad \forall y \in D(S) \quad Sy = Ly + \Phi^* U_2 y,$$

де $\Phi \in \mathcal{B}_\infty(H, \mathcal{Y}_2)$, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_1)$. Виявляється, що для максимальної дисипативності цього оператора необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$P\left[i\,\mathcal{U} L \mathcal{U}' - \begin{pmatrix} 0 & -iC \\ iC^* & 0 \end{pmatrix}\right] P \geq 0, \tag{18}$$

де P – ортопроектор $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \oplus \overline{R(\phi)}$, і щоб оператор $L_1 = L|_{\ker \Gamma_1}$ був максимально дисипативним.

Зосередимось на випадку $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 \stackrel{def}{=} \mathcal{H}$, $C = 1_{\mathcal{H}}$. Нехай $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ – ПГЗ оператора L_0, $A = (A_{ij})_{i,j=1}^2$ (де $A_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $i,j = 1,2$) оборотний в $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$, тобто

$$D(S) = \{ y \in D(L) : A_{11}\Gamma_1 y + A_{12}\Gamma_2 y = \phi y \}, \qquad (19)$$

$$\forall y \in D(S) \quad Sy = Ly + \phi^*(A_{21}\Gamma_1 y + A_{22}\Gamma_2 y). \qquad (20)$$

9.20 Теорема. Для максимальної дисипативності (самоспряженості) оператора (19) – (20) необхідним і достатнім є виконання умов

$$P(AJA^* - J)P \leq 0, \quad \ker(A_{11} + iA_{12}) = \{0\}$$

(відповідно $P(AJA^* - J)P = 0$, $\ker(A_{11} \pm iA_{12}) = \{0\}$).

9.24 Теорема. Якщо $L_1 = L_1^*$, то оператор (19) – (20) максимально дисипативний (самоспряжений) тоді і тільки тоді, коли він може бути поданим у кожному з таких видів:

$$D(S) = \{ y \in D(L) : (\cos C)\Gamma_1 y - (\sin C)\Gamma_2 y = \Phi_C y \},$$

$$\forall y \in D(S) \quad Sy = Ly + \phi_C^*[(\sin C)\Gamma_1 y + (\cos C)\Gamma_2 y] + \phi_C^* Q_C \phi_C y$$

або

$$D(S) = \{ y \in D(L) : (K - 1_{\mathcal{H}})\Gamma_1 y + i(K + 1_{\mathcal{H}})\Gamma_2 y = \Phi_K y \},$$

$$\forall y \in D(S) \quad Sy = Ly + \tfrac{1}{4}\phi_K^*[-i(K + 1_{\mathcal{H}})\Gamma_1 y + (K - 1_{\mathcal{H}})\Gamma_2 y] + \phi_K^* Q_K \phi_K y,$$

де $C, K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ – відповідно самоспряжений і унітарний оператори; $\phi_C, \phi_K \in \mathcal{B}_\infty(H, \mathcal{H})$; $Q_C, Q_K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ дисипативні (самоспряжені).

Аналогічно формулюються умови максимальної акумулятивності.

В §§ 10-13 вважаємо, що $L_0 \in \mathcal{C}(H)$ додатно визначений, $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ - жорсткий ПГЗ оператора L_0, $L = L_0^*$, $\Phi \in \mathcal{B}_\infty(H, \mathcal{H})$, C_i, $A_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\Phi_i = C_i \Phi$, $i, j = 1, 2$, причому $A = (A_{ij})_{i,j=1}^2$ оборотний в $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ і розглядаємо питання про умови максимальної θ-акретивності та максимальної невід'ємності оператора S, визначеного за допомогою співвідношень (15) - (16). Нехай P - ортопроектор $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \overline{R(\Phi)}$, $Z = (\Gamma_1 L_F^{-1})^*$, $\forall h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ $\mathcal{X}(h_1, h_2) = (h_2, 0)$,

$$\mathcal{Y} = -P\left[\begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_2^* \end{pmatrix} A \mathcal{X} A^* \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_1^* \end{pmatrix} \mathcal{X}^* \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}\right] P,$$

$$\mathcal{F} = PF^*(\Phi L_F^{-1} \Phi^*)^{-1} F P, \text{ де } F(h_1, h_2) = \Phi Z A_{11}^* h_1 + (1_{\mathcal{H}} + \Phi Z A_{21}^* C_2) h_2.$$

10.22 Теорема. Якщо $\Phi \in \mathcal{B}^1(H, \mathcal{H})$, то S максимально θ-акретивний (максимально невід'ємний) тоді і тільки тоді, коли $\cos\theta \cdot \mathcal{F} + \operatorname{Re}(e^{i\theta}\mathcal{Y}) \geqslant 0$ (відповідно $\mathcal{F} + \mathcal{Y} \geqslant 0$) і, крім цього,

$$\ker\left[e^{-i\theta} A_{12} - A_{11}\left(1_{\mathcal{H}} + \cos\theta (\Phi Z)^* (\Phi L_F^{-1} \Phi^*)^{-1} \Phi Z\right)\right] = \{0\}$$

(відповідно

$$\ker\left[A_{12} - A_{11}\left(1_{\mathcal{H}} + (\Phi Z)^* (\Phi L_F^{-1} \Phi^*)^{-1} \Phi Z\right)\right] = \{0\}).$$

10.24 Теорема. Нехай $\Phi \in \mathcal{B}^1(H, \mathcal{H})$, $A_{11}, A_{12} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, причому оператор A_1, визначений умовою: $\forall h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ $A_1(h_1, h_2) = A_{11} h_1 + A_{12} h_2$, правильний, $R(A_1) = \mathcal{H}$, $\theta \neq \pm \frac{\pi}{2}$,

$$D(S) = \{y \in D(L) : A_{11}\Gamma_1 y + A_{12}\Gamma_2 y = \Phi y\}, \quad S \subset L.$$

S максимально θ-акретивний тоді і тільки тоді, коли

$$4\operatorname{Re}\left[e^{i\theta} A_{11}(\Phi Z - A_{12})^*\right] \geqslant \sec\theta \cdot \Phi L_F^{-1} \Phi^*,$$

$$\ker\left[e^{-i\theta}(A_{12} - \Phi Z) - A_{11}\right] = \{0\}.$$

Зауважимо, що у випадку, коли $\dim \mathcal{H} < \infty$, $\theta = 0$, у теоремі 10.24 подано загальний вигляд максимально акретивного звуження S оператора L, такого, що $D(S^*) \subset D(L)$.

§ 11 присвячено встановленню умови максимальної невід'ємності оператора T такого виду:

$$D(T) = \ker(\Gamma_2 + \Phi), \quad \forall y \in D(T) \quad Ty = Ly + \Phi^* \Gamma_1 y - \Phi^* C \Phi y,$$

де $0 \le C = C^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\Phi \in \mathcal{B}_\infty(H, \mathcal{H})$, $\overline{R(\Phi)} = \mathcal{H}$.

Об'єктом дослідження в § 12 є оператор $\tilde{L}_B$, визначений за допомогою співвідношень

$$D(\tilde{L}_B) = \{y \in D(L) : \Gamma_1 y - B\Gamma_2 y = \Phi y\}, \quad \forall y \in D(\tilde{L}_B) \ \tilde{L}_B y = Ly + \Phi^* \Gamma_2 y$$

$(\Phi \in \mathcal{B}_\infty(H, \mathcal{H}), \ B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Покладемо

$$\tilde{B} = 2\operatorname{Re}(\Phi Z) - \Phi L_F^{-1} \Phi^* + B$$

і позначимо через $\mathcal{P}$ проектор $D(L) \to D(L_F)$ паралельно $\ker L$ (легко встановити, що $\mathcal{P} = 1_{D(L)} - Z\Gamma_2$).

12.3 Теорема. $\tilde{L}_B$ максимально акретивний (максимально невід'ємний, розв'язний) тоді і тільки тоді, коли $\tilde{B}$ акретивний (невід'ємний, оборотний в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$). Зокрема, $\tilde{L}_B$ та $\tilde{B}$ додатно визначені (або ні) одночасно.

Далі в § 12 знайдено енергетичний простір оператора $\tilde{L}_B$ в припущенні, що він додатно визначений. Позначимо через H_e енергетичний простір оператора L_0, а через $\pi_0(\cdot,\cdot)$ - скалярний добуток цього простору. Оператори $\mathcal{P}$ та Γ_2 однозначно продовжуються неперервним чином до відображень $H_e \dotplus \ker L \to H_e$ та $H_e \dotplus \ker L \to \mathcal{H}$ відповідно (ці відображення також позначаємо через $\mathcal{P}$ та Γ_2).

12.9 Теорема. Припустимо, що $\tilde{B} \gg 0$ і позначимо через $\tilde{H}_B$ та $\tilde{\pi}_B(\cdot,\cdot)$ енергетичний простір оператора $\tilde{L}_B$ та від-

повідний енергетичний скалярний добуток. Тоді $\tilde{H}_B = H_e \dotplus \ker L$,

$$\forall u, v \in \tilde{H}_B \quad \tilde{\pi}_B(u,v) = \pi_0(Pu, Pv) +$$

$$+ (B\Gamma_2 u | \Gamma_2 v)_{\mathcal{H}} + (\phi u | \Gamma_2 v)_{\mathcal{H}} + (\Gamma_2 u | \phi v)_{\mathcal{H}}.$$

В § 13 в термінах ПГЗ розв'язана задача про опис максимально акретивних розширень додатно визначеного оператора зі скінченним індексом дефекту. В цьому параграфі H_e та P ті самі, що в попередньому, а через ϕ^* позначається оператор, спряжений з $\phi \in \mathcal{B}(H_e, \mathcal{H})$.

13.9 Теорема. Нехай T - максимально акретивне розширення оператора L_0. Тоді існують $A_{11}, A_{12} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\phi \in \mathcal{B}(H_e, \mathcal{H})$ такі, що

$$\operatorname{rank}(A_{11}, A_{12}) = \dim \mathcal{H}, \quad \phi\phi^* + 4\operatorname{Re}(A_{11}A_{12}^*) \le 0,$$

а T^* є звуженням оператора L на множину

$$D(T^*) = \{y \in D(L): A_{11}\Gamma_1 y + A_{12}\Gamma_2 y = \phi P y\}.$$

Навпаки, якщо $T \in \mathcal{C}(H)$ є розширенням оператора L_0, для якого виконуються перераховані умови, то це розширення максимально акретивне.

Розділ III (§§14-17) присвячено використанню викладених вище результатів у ситуаціях, коли оператори L та L_0, є відповідно максимальним та мінімальним операторами, породженими в гільбертовому просторі (вектор-)функцій H деяким диференціальним виразом $l[y]$.

В § 14 проаналізовано випадок, коли $l[y]$ - самоспряжений за Лагранжем вираз порядку $2n$ з дійсними коефіцієнтами, визначеними на інтервалі (a,b), а $H = L_2(a,b)$. Спочатку розглядається ситуація, коли цей вираз регулярний.

Нехай $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{4n}$ - невироджена числова матриця,

$$\forall y \in D(L) \quad U_i(y) = \sum_{j=1}^{2n} (\alpha_{ij} y^{[j-1]}(a) + \alpha_{i,j+2n} y^{[j-1]}(b)) \quad (i = 1, \dots, 4n),$$

$$D(S) = \{ y \in D(L) : U_i(y) = (y | \varphi_i), \ i = 1, \dots, 2n \},$$

$$\forall y \in D(S) \quad Sy = l[y] + \sum_{i=1}^{2n} u_{2n+i}(y) \varphi_{2n+i},$$

де $\varphi_1, \dots, \varphi_{4n} \in L_2(a,b)$, а $y^{[j]}$ - квазіпохідна порядку j функції y. В роботі побудовано спряжений оператор S^* (теорема 14.1), з'ясовано умови самоспряженості та максимальної дисипативності (теореми 14.3, 14.4), а в припущенні, що L_0 додатно визначений, - умови максимальної акретивності і максимальної невід'ємності оператора S (теореми 14.7, 14.8, 14.9). Аналогічні твердження доведені у випадку, коли коефіцієнти виразу $l[y]$ визначені на півосі $[0, \infty)$, причому кінець $x = 0$ регулярний, а мінімальний оператор, породжений цим виразом в $L_2(0, \infty)$, має індекс дефекту $(n; n)$.

В § 15 мова йде про ДГО типу Штурма-Ліувілля з обмеженим операторним потенціалом. Нехай $-\infty < a < b < \infty$ і для будь-якого $x \in [a,b]$ $p(x) = p(x)^* \in \mathcal{B}(H_0)$, де H_0 - сепарабельний гільбертів простір, причому функція $x \mapsto p(x)$ сильно неперервна. Розглянемо диференціальний вираз $l[y] = -y'' + p(x)y$ і позначимо через L та L_0 максимальний і мінімальний оператори, породжені в $H = L_2(H_0, (a,b))$ цим виразом. Далі, нехай $\alpha_{ij} \in \mathcal{B}(H_0)$, $\Phi_i \in \mathcal{B}_\infty(H, H_0)$ $(i,j = 1, \dots, 4)$, причому $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^4$ оборотний в $\mathcal{B}(H_0^4)$,

$$U_i(y) = \alpha_{i1} y(a) + \alpha_{i2} y'(a) + \alpha_{i3} y(b) + \alpha_{i4} y'(b) \quad (y \in D(L), \ i = 1, \dots, 4),$$

$$D(S) = \{ y \in D(L) : U_i(y) = \Phi_i y, \ i = 1, 2 \}, \tag{21}$$

$$\forall y \in D(S) \quad Sy = l[y] + \Phi_3^* u_3(y) + \Phi_4^* u_4(y). \tag{22}$$

Введемо позначення: $1 = 1_{H_0}$, $\mathcal{H} = H_0 \oplus H_0$,

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{J} = i \begin{pmatrix} 0 & 1_{\mathcal{H}} \\ -1_{\mathcal{H}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_{12} & -\alpha_{14} \\ \alpha_{22} & -\alpha_{24} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_{12} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{pmatrix}.$$

15.2 Теорема. $S \in \mathcal{C}(H)$, а спряжений оператор S^* задається за допомогою співвідношень

$$D(S^*) = \{ z \in D(L) : \tilde{u}_1(z) = \phi_3 z, \ \tilde{u}_2(z) = \phi_4 z \},$$

$$\forall z \in D(S^*) \quad S^* z = l[z] + \phi_1^* \tilde{u}_3(z) + \phi_2^* \tilde{u}_4(z),$$

де $\tilde{u}_i(z) = \tilde{\alpha}_{i1} z(a) + \tilde{\alpha}_{i2} z'(a) + \tilde{\alpha}_{i3} z(b) + \tilde{\alpha}_{i4} z'(b)$

$(z \in D(L), \ i = 1, \dots, 4), \quad (\tilde{\alpha}_{ij})_{i,j=1}^{4} = -\mathcal{J}(A^*)^{-1}\mathcal{E}.$

15.7 Теорема. Припустимо, що $\phi_3 = \phi_1$, $\phi_4 = \phi_2$, тобто

$$D(S) = \{ y \in D(L) : u_i(y) = \phi_i y, \ i = 1, 2 \},$$

$$\forall y \in D(S) \quad Sy = l[y] + \phi_1^* u_3(y) + \phi_2^* u_4(y).$$

S максимально дисипативний тоді і тільки тоді, коли

$$P(i A \mathcal{E} A^* + \mathcal{J}) P \geqslant 0, \quad \ker(\mathcal{A}_{11} + i\mathcal{A}_{12}) = \{0\},$$

де P - ортопроектор $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \overline{\mathcal{H} \oplus R(\phi_1 \oplus \phi_2)}$.

Зауважимо, що ці теореми вірні не тільки для компактних, а й для довільних $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{B}(H, H_0)$.

Далі в §15 розглядається ситуація, коли потенціал $p(x)$ рівномірно додатно визначений $(\forall x \in [a, b] \ p(x) \geqslant k^2 1_{H_0}, \ k > 0)$ і

досліджується оператор T , область визначення якого складається з тих $u \in H^{2\,(e)} = H^2(H_0,(a,b))$, які задовольняють умови

$$\begin{cases} -u'(a) + \beta_{11} u(a) + \beta_{12} u(b) + \phi_1 u = 0 \\ u'(b) + \beta_{21} u(a) + \beta_{22} u(b) + \phi_2 u = 0 , \end{cases}$$

де $\beta_{ij} = \beta_{ji}^* \in \mathcal{B}(H_0)$ $(i,j = 1,2)$, а закон дії такий:

$$Tu = l[u] + \phi_1^* u(a) + \phi_2^* u(b).$$

15.10 Теорема. Нехай $\omega_1(x), \omega_2(x)$ - операторні розв'язки рівняння $Y'' = p(x)Y$ такі, що $\omega_1(a) = \omega_2(b) = 1_{H_0}$, $\omega_1(b) = \omega_2(a) = 0$. Покладемо

$$\begin{cases} B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \omega_1'(a) & \omega_2'(a) \\ -\omega_1'(b) & -\omega_2'(b) \end{pmatrix}, \\ \phi Z = \begin{pmatrix} \phi_1 \omega_1 & \phi_1 \omega_2 \\ \phi_2 \omega_1 & \phi_2 \omega_2 \end{pmatrix}, \quad \phi L_F^{-1} \phi^* = \begin{pmatrix} \phi_1 L_F^{-1} \phi_1^* & \phi_1 L_F^{-1} \phi_2^* \\ \phi_2 L_F^{-1} \phi_1^* & \phi_2 L_F^{-1} \phi_2^* \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{23}$$

Оператор T додатно визначений тоді і тільки тоді, коли

$$B + 2\,\mathrm{Re}(\phi Z) - \phi L_F^{-1} \phi^* > > 0. \tag{24}$$

Цей результат застосовано для доведення розв'язності однієї варіаційної задачі. Нехай $\forall u, v \in H^{1\,(e)} = H^1(H_0,(a,b))$

$$\pi(u,v) = \int_a^b [(u'(x)|v'(x))_{H_0} + (p(x)u(x)|v(x))_{H_0}]\,dx +$$
$$+ (\beta_{11}u(a)|v(a))_{H_0} + (\beta_{12}u(b)|v(a))_{H_0} + (\beta_{21}u(a)|v(b))_{H_0} + (\beta_{22}u(b)|v(b))_{H_0} +$$
$$+ (\phi_1 u|v(a))_{H_0} + (\phi_2 u|v(b))_{H_0} + (u(a)|\phi_1 v)_{H_0} + (u(b)|\phi_2 v)_{H_0},$$

$$\forall u \in H^1 \quad J[u] = \pi(u,u) - 2\,\mathrm{Re} \int_a^b (u(x)|f(x))_{H_0}\,dx.$$

15.11 Теорема. Припустимо, що виконується нерівність (24), де B, ϕZ, $\phi L_F^{-1} \phi^*$ ті самі, що в (23). H^1 - енергетичний

простір оператора T з енергетичним скалярним добутком $\mathcal{H}(\cdot,\cdot)$.

15.12 Наслідок. В умовах теореми 15.11 варіаційна задача $J[u] \to \min$, $u \in H^1$, для будь-якого $f \in H$ має єдиний розв'язок $u_0 = T^{-1} f$. При цьому $J[u_0] = -(f|u_0)$.

§ 16 є продовженням попереднього. У ньому побудовано резольвенту і встановлено умови фредгольмовості оператора (21)-(22) в припущенні, що $\Phi_i y = \int_a^b \varphi_i(x)^* y(x)\,dx$, де

$$\forall x \in [a,b] \quad \varphi_i(x) \in \mathcal{B}_\infty(H_0), \quad \int_a^b \|\varphi_i(x)\|^2 dx < \infty \quad (i = 1,\dots,4)$$

(при цьому, взагалі кажучи, $p(x) \neq p(x)^*$).

Нехай $Y_1(x,\lambda)$, $Y_2(x,\lambda)$ - операторні розв'язки рівняння $-Y'' + p(x)Y = \lambda Y$ такі, що $Y_1(c,\lambda) = Y_2'(c,\lambda) = 1_{H_0}$, $Y_2(c,\lambda) = Y_1'(c,\lambda) = 0$ $(c \in [a,b])$. Покладемо

$$g(x,\xi,\lambda) = \pm \frac{1}{2}\left(Y_1(x,\lambda)Y_2^*(\xi,\bar\lambda) - Y_2(x,\lambda)Y_1^*(\xi,\bar\lambda)\right)$$

("+" береться при $x > \xi$, а "-" при $x < \xi$); $v_i = u_i - \Phi_i$, $i = 1,2$; $v_i = u_i$, $Y_i(x,\lambda) = \int_a^b g(x,\xi,\lambda)\varphi_i(\xi,\lambda)\,d\xi$, $i = 3,4$;

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} v_1(Y_1) & \dots & v_1(Y_4) \\ \dots & \dots & \dots \\ v_4(Y_1) & \dots & v_4(Y_4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{H_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{H_0} \end{pmatrix}.$$

16.14 Теорема. Оператори $S - \lambda 1_H$ та $\Delta(\lambda)$ фредгольмові одночасно і мають рівні індекси. Зокрема, $\lambda \in \rho(S)$ тоді і тільки тоді, коли $\Delta(\lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(H_0^4)$ і в цьому випадку

$$(S - \lambda 1_H)^{-1} f(x) = \int_a^b \Big[g(x,\xi,\lambda) - \sum_{j,k=1}^{4} Y_j(x,\lambda)\delta_{jk}(\lambda)v_k(g)\Big] f(\xi)\,d\xi,$$

де

$$\Delta(\lambda)^{-1} = (\delta_{jk}(\lambda))_{j,k=1}^4, \quad f \in H.$$

В § 17 наведено деякі приклади максимально дисипативних ДГО. Зупинимось на одному з них. Нехай C -самоспряжений опе-

ратор в сепарабельному гільбертовому просторі H_0, $C \geq 1_{H_0}$, а L та L_0 - відповідно максимальний та мінімальний оператори, породжені в $H = L_2(H_0, (a,b))(-\infty < a < b < \infty)$ диференціальним виразом $l[y] = -y'' + Cy$.

М. Л. Горбачуком доведено, що для всякого $y \in D(L)$ коректно визначені вектори

$$y_a = \lim_{t \to a+0} C^{-1/4} y(t), \qquad y_b = \lim_{t \to b-0} C^{-1/4} y(t)$$

$$y'_a = \lim_{t \to a+0} C^{1/4}(y'(t) + C^{1/2} y(t)), \qquad y'_b = \lim_{t \to b-0} C^{-1/4}(y'(t) - C^{1/2} y(t))$$

(мається на увазі збіжність відносно норми простору H_0) і що $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, де $\mathcal{H} = H_0 \oplus H_0$, $\Gamma_1 y = (y'_a, y'_b)$, $\Gamma_2 y = (y_a, -y_b)$, - ПГЗ оператора L_0.

Нехай $\phi \in \mathcal{B}_\infty(H, \mathcal{H})$, P - ортопроектор $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \ominus \overline{R(\phi)}$, $A_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $(i,j = 1,2)$, $A = (A_{ij})_{i,j=1}^2$, причому $A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$,

$$D(S) = \{y \in D(L) : A_{11}\Gamma_1 y + A_{12}\Gamma_2 y = \phi y\},$$

$$\forall y \in D(S) \quad Sy = Ly + \phi^*(A_{21}\Gamma_1 y + A_{22}\Gamma_2 y).$$

Виявляється, що

а) S максимально дисипативний тоді і тільки тоді, коли

$$P(AJA^* - J)P \leq 0, \quad \ker(A_{11} + iA_{12}) = \{0\};$$

б) якщо $\overline{R(\phi)} = \mathcal{H}$, то максимальна дисипативність оператора S рівносильна двосторонній J-нероатягуваності оператора A;

в) якщо незбурений оператор L_1

$$(D(L_1) = \ker(A_{11}\Gamma_1 + A_{12}\Gamma_2), \quad L_1 \dot{\subset} L)$$

самоспряжений, то для максимальної дисипативності оператора S необхідно і достатньо, щоб існували $B = B^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\phi_B \in \mathcal{B}_\infty(H, \mathcal{H})$ і дисипативний оператор $Q_B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такі, що

$$D(S)=\{y\in D(L):(\cos B)\Gamma_1 y-(\sin B)\Gamma_2 y=\Phi_B y\},$$

$$\forall y\in D(S)\quad Sy=Ly+\Phi_B^*[(\sin B)\Gamma_1 y+(\cos B)\Gamma_2 y]+\Phi_B^* Q_B \Phi_B y.$$

Зокрема, якщо L та L_0 - максимальний та мінімальний оператори, породжені в $L_2((a,b)\times R)$ диференціальним виразом

$$-\Delta y+y,\quad d_1, d_2\in B(L_2(R)),\quad \mathcal{K}=\mathcal{K}(t,x,\xi)\in L_2((a,b)\times R^2),$$

то, застосовуючи ці результати в ситуації, коли C - самоспряжений оператор, породжений в $L_2(R)$ диференціальним виразом $-y''+y$, переконуємось, що оператор S, визначений за допомогою співвідношень

$$D(S)=\{y\in D(L):\ y_a(x)+(d_1 y_a')(x)=\int_{[a,b]\times R}\mathcal{K}(t,x,\xi)y(t,\xi)\,d\xi\,dt,$$

$$-y_b(x)+(d_2 y_b')(x)=0\},$$

$$\forall y\in D(S)\quad Sy=-\Delta y+y-\int_R \overline{\mathcal{K}(t,\xi,x)}\,y_a'(\xi)\,d\xi,$$

максимально дисипативний тоді і тільки тоді, коли d_1 та d_2 дисипативні.

Основні результати опубліковні в таких роботах:

1. Лянце В.Е., Сторож О.Г. Умови взаємної спряженості деяких замкнутих операторів в термінах абстрактних граничних операторів // Доп. АН УРСР. Сер. А. - 1980.-N 6. - С. 29-32.
2. Лянце В.Э., Сторож О.Г. О некоторых возмущениях линейных операторов с изменением области определения // Мат. методы и физ.-мех. поля. - 1982. - Вып. 15. - С. 25-30
3. Лянце В.Э., Сторож О.Г. Операторы, удовлетворяющие условию гладкости // Укр. мат. журн. - 1982.-34, N 4. - С. 451-455.
4. Лянце В.Э., Сторож О.Г. Методы теории неограниченных операторов. - К.: Наук. думка, 1983. - 210 с.
5. Лянце В.Э., Сторож О.Г. О резольвенте возмущенного операто-

ра//Мат. методы и физ.-мех. поля.-1984.- Вып.19.- С. 23-25.

6. Сторож О.Г. О максимальной диссипативности обыкновенных дифференциально-граничных и некоторых других операторов // Укр. мат. журн. - 1984. - 36, N 1. - С. 78-82.
7. Сторож О.Г. О разрешимости расширений положительно определенного оператора// В кн.: 9-ая Школа по теории операторов в функциональных пространствах.-Тернополь, 1984.-С.133-134.
8. Сторож О.Г. О расширениях симметрических операторов с неравными дефектными числами// Мат. заметки. -1984. -36, N 5, С. 791 - 796.
9. Сторож О.Г. Диссипативные возмущения с изменением области определения и J-нерастягивающие операторные матрицы // Мат. методы и физ.-мех. поля. - 1985.- Вып. 22.- С. 17-20.
10. Сторож О.Г. О максимальной неотрицательности одного замкнутого оператора // В кн.: 11-ая Всесоюзная школа по теории операторов в функциональных пространствах. - Челябинск, 1986. - Т. 2, С. 119.
11. Сторож О.Г. Диссипативные возмущения с изменением области определения // Функцион. анализ (Ульяновск). - 1986. - Вып. 26. - С. 136-140.
12. Сторож О.Г. Опис деяких класів розширень невід'ємного оператора// Доп. АН УРСР. Сер. А. 1987.- N 10. - С. 14-16.
13. Сторож О.Г. Условия максимальной диссипативности дифференциально-граничных операторов в пространстве вектор-функций // Дифференц. уравнения.- 1988.- 24, N 2. С. 359-361.
14. Сторож О.Г. Аккретивные операторы, родственные положительно определенному// Укр. мат. журн.-1989.-41,N6.-С. 789-794.
15. Сторож О.Г. Об аккретивных расширениях неотрицательного оператора // В кн.: 14-ая Школа по теории операторов в функциональных пространствах.- Новгород, 1989. Т. 3, С. 51.
16. Сторож О.Г. О разрешимости расширений замкнутого оператора

// В кн.: Методы исследования дифференц. и интегр. операторов. - К.: Наук. думка, 1989. С. 171-175.

17. Сторож О.Г. Экстремальные расширения неотрицательного оператора и аккретивные граничные задачи // Укр. мат. журн. - 1990. - 42, N 6. - С. 858 - 860.
18. Сторож О.Г. Условие неотрицательности оператора, родственного оператору Дирихле // Мат. методы и физ.-мех. поля. - 1990. - Вып. 32. - С. 30-33.
19. Мильо О.Я., Сторож О.Г. Про загальний вигляд максимально акретивного розширення додатно визначеного оператора // Доп. АН УРСР. - 1991. - N 6. - С. 19-22.
20. Storozh O.G. On minimization of quadratic form, inducing differential-boundary operator // В кн.: Теми Міжнародної математичної конференції, присвяченої 100-річчю народження С. Банаха. - Львів, 1992, С. 40.
21. Сторож О.Г., Шувар О.Б. Замкненість, щільна визначеність та умови самоспряженості диференціально-граничних операторів у просторі вектор-функцій // Доп. АН України. - 1993. - N 8. - С. 20 - 24.
22. Сторож О.Г. Диференціально-граничний оператор другого порядку в просторі вектор-функцій, асоційовний з квадратичною формою // Мат. студії. Праці Львів. мат. т-ва. - 1993. - N 8. - С. 59-63.
23. Сторож О.Г., Шувар О.Б. Умови максимальної дисипативності деяких диференціально-граничних операторів у просторі вектор-функцій // Доп. АН України. - 1994. - N 2. С. 20-24.
24. Сторож О.Г. Про умови розв'язності і резольвенту диференціально-граничного оператора другого порядку в просторі вектор-функцій// Укр. мат. журн. - 1995. - 47, N 4, С. 517-524.

Сторож О. Г. Методы теории расширений и дифференциально-граничные операторы.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 - математический анализ. Львовский ун-т. Львов, 1995.

Защищается 24 научные работы, содержащие теоретические исследования по теории неограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве. С помощью методов теории расширений построена специфическая теория возмущений, изменяющих не только действие оператора, но и область его определения. В случае дифференциальных операторов это означает возмущение как дифференциального выражения, так и краевых условий. Установлены условия секториальности и разрешимости исследуемых операторов.

Storozh O. G. Extension theory methods and differential-boundary operators.

Doctor of Science Thesis (Physics and Mathematics), specialization - mathematical analysis. Lviv University, Lviv, 1995.

24 scientific papers containing theoretical studies on the unbounded linear operators theory in Hilbert space are defended. With the help of extension theory methods the specilical perturbation theory is developed. Such perturbations change not only the functioning of operator, but it's domain also. In the case of differential operators this means the perturbation of the differential expression and of the boundary conditions. Criteria of sectorialness and solvability of investigated operators have been established.

Ключові слова: дисипативне розширення, гладке звуження, простір граничних значень, диференціально-граничний оператор.

Підписано до друку 20.II.95. Формат 60x84/16. Папір друк. №I. Друк офсет. Умовн.друк.арк.2,6. Умовн.фарб.відб.2,6. Обл.-вид. арк.2,8. Тираж 100. Замовлення 280.

Машинно-офсетна лабораторія Львівського державного університету ім. І.Франка. 290602 Львів, вул. Університетська, І.

452609

AB 33.616