

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ
І МАТЕМАТИКИ ім. Я.С. ПІДСТРИГАЧА**

На правах рукопису
УДК 539.3

С У Л И М
Георгій Теодорович

**Основи математичної теорії
термопружної рівноваги середовищ
з тонкими включеннями**

01.02.04 - механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

ЛЬВІВ - 1995



АВ 33.617

Робота виконана у Львівському державному університеті ім. І.Франка

Науковий консультант - доктор технічних наук,
професор Гриліцький Д.В.

Офіційні опоненти: член-кореспондент НАН України,
доктор техн. наук, професор Андрейків О.Є.
доктор фіз.-мат. наук, професор Попов Г.Я.
доктор фіз.-мат. наук, професор Осадчук В.А.

Провідна організація - Дніпропетровський державний університет

Захист відбудеться "25" грудня 1995 р. о 14⁰⁰ год.
на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 04.17.01 при Інституті
прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН
України за адресою: 290053, Львів, вул. Наукова, 3-б.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту
прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН
України (Львів, вул. Наукова, 3-б).

Відгук на автореферат просимо надсилати за адресою:
290053, м.Львів, вул. Наукова, 3-б, ІППММ, вченому секретарю
спеціалізованої ради.

Автореферат розісланий "24" листопада 1995 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради
кандидат фізико-математичних наук

Шевчук П.Р.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Будова реальних матеріалів досить далека від ідеальної і прошарки чужорідних середовищ, частинки вогнетривів, зони окисненого металу є поширеними вадами їх мікро- та макроструктури. Вдосконалення процесів витопу металів дозволяє покращити їх якість, але не позбавляє від різноманітних за складом та розмірами включень. Велику частку спосеред них складають тонкі включення, один із розмірів яких малий у порівнянні з іншими.

На загал не лише тріщинні, але й довільні інші неоднорідності матеріалу, передусім тонкостінні, є потужними концентраторами напружень і саме біля них починаються процеси пластичного деформування та руйнування: безпосередньо біля вершин м'яких включень спостерігається локальне руйнування, а біля жорстких - згушення смуг ковзання та утворення мікротріщин на певній віддалі від вістря неоднорідності. Загалом характеристики втоми та міцності матеріалів істотно залежать від характеру розподілу, форми і механічних властивостей металічних та неметалічних включень, причому сталь з платівковими включеннями руйнується значно швидше від сталі з включеннями глобулярними.

Неметалічні включення підвищують водневе окрушіння сталі: мікродослідження зруйнованих труб нафто- і газопроводів виявляють множинні тріщини, пов'язані з платівковими видовженими включеннями сірчистого марганцю, котрі збільшують швидкість підростання тріщини та зменшують порогове значення коефіцієнта інтенсивності напружень у поперечному за товщиною труби напрямку. Механічні властивості зварних з'єднань теж істотно залежать від мікроструктури зварного шва та розподілу у ньому включень.

Виникли теорія та практика конструювання й використання прогресивних композиційних матеріалів з плоскою арматурою: їх міцність на розтяг у трансверсальному напрямку у випадку однонапрявленого армування стрічками складає 50...75% від величини міцності у поздовжньому напрямку, тоді як використання волокон дає зазвичай 2...15%. Огляди відзначають переваги плоского армування, що покращує технологічність, механічні властивості композиту, збільшує коефіцієнт армування, опір до порушення герметичності, це свідчить про перспективність застосування композитів з плівковою, стрічковою та лусковою арматурою. Використання зовнішнього стрічкового армування у сталезалізобетоні дозволяє економити 15...45% металу у порівнянні із залізобетонними та суто металічними

конструкціями.

Тонкими включеннями можна вважати тензодатчики, підкріплення, зварні та клейові з'єднання. Заповнену рідиною або іншим матеріалом тріщину теж можна вважати тонким включенням, а процедура заповнення щілини є одним із методів продовження працездатності виробів. Теорія тонкостінних включень знаходить застосування і у механіці гірських порід.

Неідеальний контакт тіл можна заступити ідеальним контактом через тонкий прошарок, наділений певними властивостями. Поверхні поділу матеріалів внаслідок складних фізико-хімічних явищ, що перебігають у цій зоні, своїми властивостями часто істотно відрізняються від середовищ, які до них пристають, і тому за допомогою тонких включень можна з певною точністю моделювати міжфазні межі. Необхідно враховувати тонкі включення також під час дослідження фазових перетворень матеріалів, наприклад росту мартенситу в аустенітному середовищі.

Існує п'ять загальних підходів аналізу відповідних задач: 1) розглянути включення довільної форми а потім зменшити один із його розмірів (Л.Т.Бережницький, В.В.Панасюк, Г.В.Пляцко, С.О.Калоєров, Ю.М.Коляно, О.С.Космодаміанський, О.Ю.Калекін, І.А.Кунін, В.Д.Купрадзе, М.Д.Мартиненко, Т.Л.Мартинович, П.І.Перлін, Б.Ю.Победря, Ю.М.Подільчук, Т.М.Савін, Е.Г.Соонфіна, Л.А.Фільштинський, Г.П.Черепанов, Д.І.Шерман, Н.Д.Conway, C.S.Chang, F.Erdogan, J.D.Eshelby, N.J.Hardiman, N.I.Ioakimidis, T.Mura, S.C.Lin, J.Stadek, V.Stadek, P.S.Theokaris); 2) застосувати прямі числові методи, зокрема МСЕ, МГР (Ю.В.Вержовський, В.І.Лавренюк, А.Г.Угодчиков, Н.М.Хуторянський, А.Г.Угодчиков, A.S.Carrara, F.J.McGarry, S.Mirza, D.R.J.Owen, O.C.Zientiewicz); 3) використати експериментальні методи (Ю.І.Сорокатий, I.M.Allison, G.J.Davies, A.J.Durelli, E.E.Gdoutos, L.C.Hollaway, R.W.Hunter, M.J.Iremonger, T.F.MacLaughlin, S.A.Paipetis, E.Scala, D.M.Shuster, P.S.Theokaris, W.R.Tyson, W.G.Wood); 4) за допомогою асимптотичних методів детально розглянути напружено-деформований стан біля вістря неоднорідності та межі поділу матеріалів (В.М.Александров, С.К.Канаун, Я.І.Кунець, О.Б.Мовчан, С.О.Назаров, О.П.Піддубняк, Б.І.Сметанін, Г.П.Черепанов, D.Cattlerie, J.D.Eshelby, C.Wozniak); 5) розвинути специфічну теорію, що дозволила б досить просто розв'язати відповідні задачі з урахуванням малої товщини дефекту (І.М.Абдурахманов, А.Я.Александров, О.Є.Андрейків, П.М.Витвіцький,

І.Я.Горбачевський, Д.В.Гриліцький, О.О.Євтушенко, Б.М.Зинов'єв, С.К.Канаун, Г.С.Кіт, Ю.М.Коляно, А.Ф.Кривой, Г.А.Морарь, О.В.Онішук, В.К.Опанасович, В.А.Осадчук, В.В.Панасюк, О.П.Піддубняк, Я.С.Підстригач, Й.З.Пісковзуб, Ю.З.Повстенко, С.Ю.Попіна, Г.Я.Попов, В.П.Силованюк, М.М.Стадник, М.Г.Стадчук, Г.П.Черепанов, К.С.Чобанян, Л.А.Фільштинський, Ю.С.Френчко, А.С.Хачикян, С. Atkinson, T.R.Brussat, F.Erdogan, T.Koizumi, T.Kondo, S.Matysiak, T.Mura, Z.Olesiak, H.Sekine, O.Tamate, R.A.Westmann) та інші.

Метою роботи є розробка в рамках п'ятого підходу теорії термопружної рівноваги тіл з тонкими неоднорідностями, яка б дозволила відносно просто ставити і розв'язувати відповідні задачі теплопровідності, пружності та термопружності і яка б у своїх часткових випадках давала розв'язки для тріщин, гнучких неровстягливих та абсолютно жорстких дефектів, включаючи:

1. Розробку методу функцій стрибка для моделювання тонких неоднорідностей стрибками на їх серединній поверхні (лінії) температури, теплового потоку й векторів напружень та переміщень в ізотропних і анізотропних однорідних та кусково однорідних матеріалах.
2. Запис умов взаємодії тонкого включення з навколишнім матеріалом, які забезпечують можливість побудови систем сингулярних інтегральних рівнянь (ССР) для визначення функцій стрибка.
3. Опрацювання ефективних методів розв'язування цих ССР та обґрунтування їхньої застосовності зі створенням відповідного комплексу програмного забезпечення.
4. Побудову двочленних асимптотичних виразів для визначення напружень, переміщень, температури і її потоків поблизу вістря включення.
5. Отримання числових результатів для низки конкретних задач, аналіз нових закономірностей та механічних ефектів.
6. Застосування отриманої теорії до визначення

а) міцності тіл з поодинокими та стохастично розподіленими неоднорідностями;

б) ефективних характеристик стрічкових композитів;

в) сили, що діє на дислокацію поблизу тонкого дефекту.

Наукова новизна та значення. У роботі розроблена нова цілісна математична теорія для постановки та дослідження термопружної рівноваги тіл з тонкими неоднорідностями. У частковому випадку вона

збігається з математичною теорією тріщин. За допомогою побудованої теорії вперше розв'язана низка задач теорії теплопровідності для пластин з теплоактивними включеннями з і без урахування тепловіддачі з бічних поверхонь; плоских та антиплоских задач теорії пружності для тонких пружних включень у необмеженому однорідному середовищі, півплощині, на межі поділу матеріалів, у багатшарових середовищах за дії навантажень на нескінченності, зосереджених температурних, силових та дислокаційних чинників; задач термопружності тіл з включеннями. Досліджений вплив способу навантажування, механічних і теплофізичних властивостей матеріалів, анізотропії складових, геометрії задачі, профілю включень та їхньої взаємодії, зокрема під час одно та подвійно періодичного розташування. У плоскій анізотропії вдалося перейти до ізотропного випадку на аналітичному рівні. До побудови ССІР поставлених задач застосовані різні математичні методи: узагальнення формули Сомільяно, апарат теорії функцій комплексної змінної та інтегральних перетворень Фур'є. Запропонований спосіб використання методу колокацій розв'язування ССІР, який дозволяє у єдиному програмному комплексі розв'язувати задачі для системи включень, а також їхніх лінійно чи циклічно або подвійно періодичних відповідників. Створена теорія дозволила визначити поля температур і напружень у тілах з включеннями, концентрацію теплових потоків і напружень біля вершини включення; обчислити ефективні характеристики тіл за регулярного армування стрічками; дослідити розподіл сил, що діють на дислокацію поблизу тонкого включення.

Вірогідність результатів забезпечується тим, що:

- а) застосування трьох аналітичних методів до побудови ССІР основної задачі методу функцій стрибка та плоскої і антиплоскої задач про включення у півплощині дає однакові результати;
- б) у граничних випадках теплоізованих, абсолютно теплопровідних, абсолютно податливих, абсолютно жорстких включень чи плівок, а також включень з механічними і теплофізичними властивостями матриці, отримані результати збігаються з усіма відомими на цей час результатами розв'язування відповідних задач;
- в) у граничному випадку анізотропії отримані результати стосовно ізотропного матеріалу; зі збільшенням періодів розташування включень отримуються результати для періодичних та поодиноких включень; збільшення віддалі між включеннями дає результати для поодинокого включення; зі збільшенням відстані включення від межі

півплощини чи смуги реалізується відповідний граничний перехід;
г) числовий розв'язок у граничних випадках збігається з аналітичними розв'язками відповідних задач;
д) доведена збіжність застосованих числових методів та помітна їх практична збіжність зі збільшенням кількості вузлів розбиття;
е) результати застосування прямого методу скінченних елементів та МРС до тестового прикладу узгоджуються між собою;
є) відсутні протиріччя з результатами інших авторів, що застосовували інші підходи та методи.

Практична цінність полягає у створенні комплексу методів для визначення полів температур і напружень та концентрації цих величин в однорідних та кусково однорідних ізотропних та анізотропних середовищах з тонкими пружними, рідкими, пружно-пластичними включеннями. Отримані результати можна застосовувати до визначення граничного силового та температурного навантаження таких тіл з поодинокими чи стохастично розподіленими неоднорідностями, обчислення ефективних механічних і теплофізичних характеристик стрічкових композитів, дослідження кінетики руху дислокацій біля тонких дефектів для вивчення механізмів руйнування та пластичного деформування в околі концентраторів напружень. Отримані результати можуть бути еталонними під час застосування методу граничних інтегральних рівнянь до розв'язування відповідних задач з тонкими оболонковими включеннями.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідалися та обговорювалися на VI Всесоюзній конференції з міцності і пластичності (Москва, 1975), Всесоюзній науковій конференції "Змішані задачі механіки деформівного тіла" (Ростов-на-Дону, 1977), Всесоюзній школі і конференції молодих вчених "Механіка деформівного твердого тіла" (Куйбишев, 1978), XV науковій нараді з теплових напружень в елементах конструкцій (Київ, 1980), I Всесоюзній науково-технічній конференції "Міцність, жорсткість і технологічність виробів з композиційних матеріалів" (Кам'янець-Подільський, 1982), Всесоюзному семінарі-наradі "Фізико-хімічна механіка крихкого руйнування конструкційних матеріалів" (сел.Славське, 1982), Республіканському симпозіумі "Концентрація напружень" (Донецьк, 1983), I - III Всесоюзних конференціях "Механіка неоднорідних структур" (Львів, 1983, 1987, 1991), Республіканській науково-технічній конференції "Інтегральні рівняння у прикладному моделюванні" (Київ, 1983), Всесоюзній

конференції "Сучасні проблеми будівельної механіки і міцності літальних апаратів" (Москва, 1983), II Всесоюзному науково-технічному семінарі "Некласичні проблеми механіки композиційних матеріалів і конструкцій з них" (Львів, 1984), II Всесоюзному семінарі-нараді "Фізико-хімічна механіка крихкого руйнування конструкційних матеріалів" (Львів, 1985), III Всесоюзній конференції "Змішані задачі механіки деформівного твердого тіла" (Харків, 1985), II Всесоюзному симпозиумі з механіки руйнування (Житомир, 1985), I Всесоюзній конференції "Механіка руйнування матеріалів" (Львів, 1987), Республіканській науковій конференції "Диференціальні та інтегральні рівняння та їх застосування" (Одеса, 1987), I Всесоюзному симпозиумі "Механіка і фізика руйнування композитних матеріалів і конструкцій" (Ужгород, 1988), IV Всесоюзній конференції "Змішані задачі механіки деформівного твердого тіла" (Одеса, 1989), Всесоюзній конференції "Механіка конструкцій з композиційних матеріалів і проблеми динамічних випробувань" (Комсомольськ-на-Амурі, 1990), XII Всесоюзній конференції з числових методів розв'язування задач теорії пружності і пластичності (Тверь, 1991), I та II Міжнародних симпозиумах українських інженерів-механіків у Львові (Львів, 1993, 1995), VIII Міжнародній конференції з механіки руйнування матеріалів (ICF-8, Київ, 1993), III Міжнародному симпозиумі "Некласичні проблеми теорії тонкостінних елементів конструкцій та фізико-хімічної механіки композиційних матеріалів" (Івано-Франківськ, 1995), на щорічних звітних конференціях Львівського держуніверситету (Львів, 1972-1995), семінарах "Механіка композиційних матеріалів" під кер. проф. Б.Ю.Победри (МДУ, 1987), "Будівельна механіка конструкцій" під кер. проф. Ю.М.Новічкова (МГМІ, 1987), "Проблеми механіки неоднорідних тіл" під кер. проф. Ч.Возняка і проф. З.Олесяка (Варшавський університет, 1994).

У повному обсязі дисертаційна робота доповідалася на IV Міжнародній конференції "Механіка неоднорідних структур" (Тернопіль, 1995), V-й Загальнопольській конференції "Механіка руйнування" (Моншюціце-Амельйовка, 1995), I Українсько-польській літній школі "Мішані задачі механіки неоднорідних середовищ" (Шацьк, 1995), семінарах кафедри механіки Львівського ДУ, "Математичні методи механіки" Дніпропетровського ДУ під кер. проф. В.В.Лободи, "Проблеми механіки" Київського НУ під кер. чл.-кор. НАН України, проф. А.Ф.Улітка, "Математичні проблеми механіки

суцільного середовища" Донецького ДУ під кер. акад. НАН України, проф. О.С.Космодамианського, Одеського ДУ під кер. проф. Г.Я.Попова, "Математичне моделювання і методи оптимізації у природознавстві і техніці" центру математичного моделювання ІППМ НАН України під кер. чл.-кор. НАН України, проф. Я.И.Бурака, "Проблеми механіки деформівного твердого тіла" ІППМ НАН України під кер. чл.-кор. НАН України, проф. Г.С.Кіта, "Механіка крижкого руйнування матеріалів" ФМІ НАН України під кер. акад. НАН України, проф. В.В.Панасюка.

Публікації. За результатами дисертації опубліковано 85 наукових праць.

Структура і обсяг роботи. Робота складається з вступу, семи розділів, висновків, опису літератури, що охоплює 577 назв, та трьох додатків; містить 107 рисунків та 27 таблиць. Загальний обсяг становить 408 с., у тому числі 299 с. основної текстової частини.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Вступ містить короткий огляд праць, що стосуються теми дисертації. Обґрунтована актуальність проблематики, сформульована мета дисертації, відзначені новизна, наукове та практичне значення, коротко викладені результати, одержані у дисертації.

У першому розділі викладені засади застосування методу функцій отримка у задачах теорії пружності і термопружності. Ідея МФС ґрунтується на використанні двох основних положень: 1) принципу спряження континуумів різної вимірності (ПС); 2) існування умов взаємодії (УВ) тонкого включення із зовнішнім середовищем.

Суть ПС полягає у заміні тонкого включення поверхнею (лінією у двовимірних задачах) розриву теплофізичного та напружено-деформованого стану тіла. Включення вилучається із розгляду, а його вплив зводиться до утворення у матриці отримків f_r деяких фізико-механічних полів (ФМП) (температури T , теплових потоків $\partial T / \partial x_r$, переміщень u_i , напружень σ_{ij} тощо) під час проходження через серединну поверхню (лінію) тонкого дефекту

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \sigma_{ij}(\mathbf{r}, f_r), \quad u_i(\mathbf{r}) = u_i(\mathbf{r}, f_r), \quad T(\mathbf{r}) = T(\mathbf{r}, f_r). \quad (1.1)$$

Для визначення невідомих ФС використовують умови взаємодії (УВ) тонкого включення із зовнішнім середовищем, які відображають можливість побудови математичної моделі включення (ММВ): залежності

$$F_j(T_B^+, T_{B,n}^+, t_{nv}^+, u_B^+) = 0 \quad (1.2)$$

між температурами T_B^+ , тепловими потоками $T_{B,n}^+$, векторами зміщень

$u_{\pm}^{\pm}$ та напружень $t_{\pm}^{\pm}$ на верхній (+) та нижній (-) його поверхнях. Використання умов контакту включення з матрицею з урахуванням занесення відповідних величин ФМП з реальної межі поділу на середину поверхню включення дозволяє записати ММВ з використанням граничних значень ФМП на межі фаз

$$\Psi_j(\Gamma^{\pm}, \Gamma_n^{\pm}, t_n^{\pm}, u^{\pm}) = 0, \quad t_{ni}^{\pm} = \sigma_{ij}^{\pm} n_j. \quad (1.3)$$

Знайшовши з (1.1) граничні значення ФМП на межі фаз та підставивши їх в УВ (1.3), отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) для визначення ФС

$$\Phi_j(\Gamma_r) = 0. \quad (1.4)$$

Розв'язок (1.4) визначає на основі ПС (1.1) ФМП у довільній точці ξ матриці; умови контакту та (1.2) дають ФМП всередині включення.

Як приклад реалізації загальної схеми ММС на основі формули Сомільяно побудовані ключові співвідношення для тонкого включення уздовж поверхні S . Для цього розглянутий неосмежений простір V з розрізом уздовж поверхні S з берегами S^+ та S^- і нормальми n^+ , $n^- \sim n$ відповідно (рис.1) у загальному випадку анізотропії пружних і теплофізичних властивостей. Ураховуючи динамічні члени,

взаємозв'язаність температури та деформацій та скінченність швидкості поширення тепла (узагальнений закон теплопровідності), узагальнену формулу Сомільяно вдається записати як залежність переміщень від стрибків температури, теплових потоків, переміщень та напружень на поверхні S

$$[p_{in}]_S = f_i = p_{in}^- - p_{in}^+, \quad [u_i]_S = f_{i+3} = u_i^- - u_i^+, \quad [q_n]_S = q_n^- - q_n^+, \quad [T]_S = T^- - T^+. \quad (i=1,2,3). \quad (1.5)$$

У випадку статичної пружності вона набуває вигляду

$$u_k(\xi) = \int_S [f_{i+3}(x) p_{ik}^i(x, \xi) - f_i(x) u_{ik}^i(x, \xi)] dS(x) + \int_V \chi_{ij}(x) u_{ij}^k(x, \xi) dV(x). \quad (1.6)$$

Тоді компоненти тензора деформацій і напружень дорівнюють

$$\epsilon_{pq}(\xi) = \frac{1}{2} (\nabla_p^{\xi} u_q(\xi) + \nabla_q^{\xi} u_p(\xi)), \quad \sigma_{ij}(\xi) = c_{ijpq} \nabla_p^{\xi} u_q(\xi) - \sigma_{ij}^*(\xi), \quad \sigma_{ij}^*(\xi) = c_{ijpq} \epsilon_{pq}^* = \int_S c_{ijpq} n_q f_{p+3}(x) \delta(x-\xi) dS(x) \quad (1.7)$$

Вирази (1.6), (1.7) реалізують ПС.

Вважатимемо теж, що відома ММВ і побудовані відповідно до (1.3) шість УВ включення з матрицею

$$\Psi_j(t_n^{\pm}, u^{\pm}) = 0, \quad t_{ni}^{\pm} = \sigma_{ij}^{\pm} n_j \quad (j=1 \dots 6). \quad (1.8)$$

Підставляючи вирази (1.6) та (1.7) у (1.8), одержимо ССІР стосовно шести функцій стрибка, які згідно з (1.6) повністю визначають напружено-деформований стан тіла. Якщо тіло перебуває під впливом певних зовнішніх чинників, то у формулах (1.6), (1.7) та ін. слід долучити члени $u_k^0(\xi)$, $\varepsilon_{pq}^0(\xi)$, $\alpha_{ij}^0(\xi)$, які характеризують однорідний розв'язок ОР, тобто розв'язок відповідної задачі для тіла без дефектів під час дії тих самих зусиль.

Метод придатний і до аналізу обмежених поверхнею S_1 (S_1^+) тіл V з прошарками, якщо подумки доповнити V до безмежного простору і розглядувати S_1 на додаток до S як ще одну поверхню стрибка. Тоді крайові умови які відповідають заданим на $S_{1\sigma}$ зусиллям f_i^+ , а на S_{1u} - переміщенням g_i^+ , еквівалентні шести умовам взаємодії

$$t_{ni}^- = 0, \quad t_{ni}^+ = f_i^+ \text{ на } S_{1\sigma}, \quad u_i^- = 0, \quad u_i^+ = g_i^+ \text{ на } S_{1u} \quad (i=1,2,3). \quad (1.9)$$

Співвідношення для антиплоскої деформації уздовж осі x_3 для ізотропного тіла легко отримати на основі загальних виразів, якщо обмежитися значенням $k=3$, а зосереджені сили, які фігурують у записі тензорів Гріна, вважати рівномірно розподіленими уздовж осі $x_1=\xi_1$, $x_2=\xi_2$. Після інтегрування уздовж цієї осі в ізотропному матеріалі для ненульових компонент отримаємо вирази

$$\alpha_{32}(\xi) + i\alpha_{31}(\xi) = \frac{-1}{2\pi} \int_L [f_3(x) + i\mu\theta f_6(x)/\theta] P(x-\xi) d\ell(x),$$

$$P(x-\xi) = 2\pi i \mu (\nabla_2^2 + i\nabla_1^2) U_3^3(x, \xi) = 1/(x-\xi). \quad (1.10)$$

Методами ТФКЗ одержується такий самий вираз.

Співвідношення для відповідної задачі стосовно ізотропного армованого тіла в рамках плоскої деформації можна отримати, поклавши $i, j, k=1,2$ та рівномірно розподіливши уздовж осі $x_1=\xi_1$, $x_2=\xi_2$ зосереджені сили, що фігурують у записі тензорів Гріна:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} [u_1(\xi) + iu_2(\xi)] = -\frac{g_1}{2\mu} \int_L \left\{ x K^{(-1)}(x-\xi) f_1^*(x) + 2\mu\kappa K^{(1/x)}(x-\xi) f_4^*(x) - \right. \\ \left. - L(x-\xi) \frac{d\bar{x}}{dx} (f_1^*(x) + 2\mu f_4^*(x)) \right\} dx + n_1 [u_1(x) + iu_2(x)] \delta(L), \quad f_1^*(x) = [\alpha_n - i\alpha_r]_L, \\ f_4^*(x) = \frac{\partial}{\partial \xi} [u_1 + iu_2]_L, \quad K^{(a)}(x) = a/x - 1/\bar{x}, \quad L(x) = (\bar{x} - x)/\bar{x}^2. \quad (1.11)$$

Розв'язування задач теорії тонких неоднорідностей та ін. зводиться до ССІР другого роду

$$Af(x) + \frac{1}{\pi} \int_L \left\{ \frac{B}{\xi-x} + C \ln|\xi-x| + K(\xi, x) \right\} f(\xi) d\xi = F(x) \quad (x \in L = [-a, a]), \quad (1.12)$$

$$\int_L f(\xi) d\xi = Q, \quad \det(A \pm B) \neq 0. \quad (1.13)$$

Тут матриці $A, B, C, Q \in \mathbb{C}$; $f(x)$ - шукана вектор-функція; $K(\xi, x)$ - матриця-функція регулярних ядер ССІР.

Характеристичну для (1.12) частину ССІР можна діагоналізувати або деякими його перетвореннями або введенням нової невідомої вектор-функції $\Phi(x)$

$$f(x) = D\Phi(x) \quad (1.14)$$

і у найзагальнішому випадку шукана функція має вигляд

$$f_n(x) = \sum_{m=1}^M d_{nm} \Phi_m(x) \quad (n=1 \dots M), \quad \Phi_n(x) = w_n(x) \varphi^n(x) \quad (n=1 \dots M),$$

$$\varphi^n(x) \sim \varphi_N^n(x) = \sum_{m=0}^N A_m^{\hat{p}} \hat{p}_m^{\alpha, \beta}(x/a) \quad (N \rightarrow \infty). \quad (1.15)$$

У наближеному розв'язку характеристичної частини одного СІР

$$f(x) = w(x) \varphi(x), \quad w(x) = w(x; \alpha, \beta) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \quad (1.16)$$

коефіцієнти розвинення функції $\varphi(x) \sim \varphi_N(x)$ типу (1.15) зі скінченним N шукають, вимагаючи ортогональності системи функцій $\hat{p}_1^{(-\alpha, -\beta)}(x)$ та нев'язки рівняння.

Доведені лема, за якою послідовність частинних сум (1.15) збігається у середньому, якщо F є неперервно диференційовною функцією і теорема, яка явно оцінює швидкість збіжності процесу при додаткових умовах стосовно гладкості правої частини $F(x)$.

У другому розділі розглянуті методи розв'язування ССІР

$$\sum_{i=1}^I \left\{ \sum_{m=1}^M \left[A_{ij}^{mp} f_j^m(x_p) + B_{ij}^{mp} t_j^m(z_{mp}) + C_{ij}^{mp} \ell_j^m(z_{mp}) + \int_{L_m} K_{ij}^{mp}(t, z_{mp}) f_j^m(t) dt + \right. \right. \\ \left. \left. + D_{ij}^p s_{pj}(x_p) / h(x_p) \right] \right\} = F_{ip}(x_p) \quad (x_p \in L_p^*; i, j=1 \dots I; p, m=1 \dots M); \quad (2.1)$$

$$\int_{L_m} f_j^m(t) dt = Q_{mj} \quad (m=1 \dots M; j=1 \dots I), \quad (2.2)$$

де

$$t_j^m(z) = \frac{1}{\pi} \int_{L_m} \frac{f_j^m(t) dt}{t-z}, \quad \ell_j^m(z) = \frac{1}{\pi} \int_{L_m} f_j^m(t) \ln |t-z| dt, \quad s_{pj}(x) = \int_{-a}^x f_j^p(t) dt$$

$$z_{mp} = \exp(-i\alpha_m) [x_{0p} + iy_{0p} - (x_{0m} + iy_{0m}) + x_p \exp(i\alpha_p)];$$

$A_{ij}^{mp}, B_{ij}^{mp}, C_{ij}^{mp}, D_{ij}^{mp}, h, F_{ip}$ - деякі сталі або гладкі функції; K_{ij}^{mp} - ядра типу Фредгольма; Q_{mj} - сталі; z_{mp} - координати відповідної точки $z \in L_p^*$ відрізка L_p^* у системі координат x_m, y_m , зв'язаної з серединою відрізка L_m^* . Координати центра O_m відрізка L_m^* в основній системі координат x_1, y_1 дорівнюють x_{1m}, y_{1m} ; α_m - кут, утворений $O_m x_m (L_m^*)$ з віссю x_1 .

Основна увага зосереджена на розв'язуванні рівняння (2.1) за умови $A_{ij}^{mp} = 0$. Однак окремі результати стосуються і СІР другого роду. Розв'язок ССІР (2.1), (2.2) шукають у вигляді ряду

$$r_j^m(t) = T(t/a_m) \varphi_j^m(t/a_m), \quad T(u) = (1-u^2)^{-1/2}, \quad \varphi_j^m(t/a_m) = \sum_{n=0}^N A_n^{mj} T_n(t/a_m). \quad (2.3)$$

Підставляючи (2.3) у (2.1) та (2.2) отримаємо систему рівнянь

$$\sum_{j=1}^I \sum_{n=0}^N \{A_n^{pj} H_n^p(x_p/a_p) + \sum_{m=1}^M A_n^{mj} G_n^{mp}(z_{mp}/a_m)\} = F_{ip}(x_p) \quad (2.4)$$

$(x_p \in L_p^*, i=1 \dots I; p=1 \dots M), \quad A_0^{mj} = Q_{mj}/\pi.$

Σ^* означає, що підсумовування не поширюється на $m=p$.

Обґрунтована обчислювальна схема методу ортогональних многочленів (МОН), коли за власні функції беруть многочлени Якобі і Чебишова. Доведена рівномірна збіжність МОН, а збіжність у середньому отримується як наслідок рівномірної збіжності. Одержані середньоквадратичні і рівномірні оцінки похибок. ці результати застосовані до СІР з регулярним ядром $K(t, x) = \frac{1}{2} \text{sign}(x-t)$.

У §6 розглянутий спосіб застосування МОН у випадку ядер Фредгольма у вигляді інтегралів Фур'є

$$K(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G(\xi) \begin{cases} \sin[\xi(t-x)] \\ \cos[\xi(t-x)] \end{cases} d\xi, \quad G(\xi) = o(e^{-\xi P}) \text{ якщо } \xi \rightarrow \infty, \quad p > 0. \quad (2.5)$$

Доведена збіжність методу колокацій (МК) розв'язування СІР першого роду, коли прирівнюють праві та ліві частини (2.4) у вузлах колокації

$$x_{Np}^{(k)} = a_p \cos[\pi k / (N+1)] \quad (k=1 \dots N) \quad (2.6)$$

і приходять до СЛАР

$$\sum_{j=1}^I \sum_{n=0}^N \{A_n^{pj} H_n^p(x_{Np}^{(k)}/a_p) + \sum_{m=1}^M A_n^{mj} G_n^{mp}(z_{mp}^{(k)}/a_m)\} = F_{ip}(x_{Np}^{(k)}), \quad (2.7)$$

$A_0^{mj} = Q_{mj}/\pi \quad (i=1 \dots I; p=1 \dots M; k=1 \dots N)$

$(z_{mp}^{(k)} - \text{значення } z_{mp} \text{ при } x_p = x_{Np}^{(k)}, y_p = 0).$

У випадку лінійної періодичності кожна з ліній L_m^* повторюється у площині $x_0 y_0$ безмежну кількість разів з періодом $d^1 = d_x^1 + i d_y^1$ і розв'язок задачі повинен давати на кожній із цих ліній однакові значення функцій f_j^m .

Застосування МОН до СІР першого роду з ядром Гільберта і Фредгольмовим ядром типу (2.5) аналогічне запропонованому у §6.

Використовуючи МК, можна користуватися загальною схемою (2.7). Однак зручно також відмовитися від урахування безмежної повторюваності ліній інтегрування і у кожному такому ряді обмежитися лише $2Q$ першими найближчими до L_m^* відрізками, змінивши відповідним чином ліву частину рівнянь (2.7). Так само поступають і за циклічної періодичності з періодом $d=2\pi/P$.

Застосовуючи апарат СІР до розв'язування задач з подвійною періодичністю, необхідно замінити ядро Коші $1/u$ подвійною сумою

$$S(u) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1}{u-P}, \quad u=t-z, \quad P=qd^1+ld^2, \quad d^p=d_x^p+id_y^p, \quad (2.8)$$

 d^1, d^2 - періоди повторюваності комірки періодичності вздовж першої та другої осей періодичності відповідно. Спосіб підсумовування впливає на вибір сталих C або C_j у рівності

$$S(u) = I(u) + Cu = r(u) - 2u\delta_j/d^j + uC_j. \quad (2.9)$$

Якщо в безмежних сумах обмежитися найближчими $2Q$ членами по першому періоду і $2L$ рядами образів L_m^* по другому періоду, то при наближеному розв'язуванні ССІР можна розв'язувати СЛАР (2.7), модифікувавши її ліву частину.

Зменшити кількість обчислень та одночасно підвищити точність обчислень може допомогти екстраполяція за Річардсоном. Існує обґрунтування екстраполяції за Річардсоном для рівномірного кроку розбиття. Запропоноване у нерівномірному розбитті МОМ та МК розв'язування ССІР застосування екстраполяції другого і ще вищих порядків зарекомендувало себе дуже добре.

Третій розділ присвячений побудові умов взаємодії (УВ) тонкого включення з навколишнім середовищем. Досліджена **температурна взаємодія з матрицею тонкого теплоактивного** (виділяє тепло) **включення** малої ширини $2h(x)$, розташованого уздовж відрізка $L^*=[a,b]$ (рис.2). Товщина включення - 2δ (для плоского температурного поля $\delta \rightarrow \infty$); температура $t_B(x,y,z)$ у ньому симетрична відносно серединної площини xOy . Величини, які стосуються включення, позначають нижнім індексом "в".

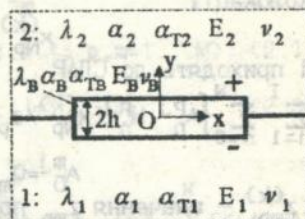


Рис. 2

Використавши умову теплового балансу для елементарного об'єму включення, закон Фур'є і теплообмін з довкіллям температурою T_c , усереднюючи за товщиною, маємо

$$\lambda_B \Delta T_B(x,y) - f(T_B, T_c, \alpha, \beta, \dots) / \delta - Q_B(x,y) = 0. \quad (3.1)$$

Тут T_B, Q_B - середня за товщиною температура і густина внутрішніх джерел.

Усереднення (3.1) за шириною та інтегрування по $x \in [a,b]$ дають

$$\lambda_B \int_{-h}^h \frac{\partial T_B(x,y)}{\partial x} dy - Q_X(a) \cdot \lambda_B \int_a^b \left[\frac{\partial T_B(\xi, h)}{\partial y} - \frac{\partial T_B(\xi, -h)}{\partial y} \right] d\xi -$$

$$-\frac{2h}{\delta} \int_a^x f^C(\xi) d\xi + 2h \int_a^x Q_B^C(\xi) d\xi = 0,$$

$$Q_X(w) = \int_{-h(w)}^{h(w)} \lambda_B \frac{\partial T_B(w, y)}{\partial x} dy, \quad w = \{a, b\}, \quad \varphi^C(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \varphi(x, y) dy. \quad (3.2)$$

Використання розвинення функцій у ряди Тейлора на берегах включення і (3.2) дає MMB

$$\lambda_B [T_B]_h + h \left\langle \lambda_B \frac{\partial T_B}{\partial y} \right\rangle_h = 0, \quad \lambda_B h \left\langle \frac{\partial T_B}{\partial x} \right\rangle_h - \int_a^x \left[\lambda_B \frac{\partial T_B}{\partial y} \right]_h d\xi - \frac{2h}{\delta} \int_a^x f^C(\xi) d\xi + 2h \int_a^x Q_B^C(\xi) d\xi - Q_X(a) = 0 \quad (\langle \varphi \rangle_h = \varphi(x, -h) + \varphi(x, h), \quad [\varphi]_h = \varphi(x, -h) - \varphi(x, h)). \quad (3.3)$$

Урахування членів порядку h^2 та подальших дає точніші проте й складніші моделі. Тепловий контакт між включенням вважається неідеальним з коефіцієнтом тепловіддачі α_{yk} ($\alpha_{yk} = 0$ - теплоізоляція, $\alpha_{yk} \rightarrow \infty$ - ідеальний контакт). Температура $T(x, y)$ подається сумою однорідної $t^0(x, y)$ та збуреної $\hat{t}(x, y)$ присутністю включень складових.

Використання умов контакту у рівняннях (3.2) породжує УВ

$$\frac{\lambda_B}{h} \left[1 - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \left\{ [\hat{t}] + \left\langle \lambda \frac{\partial \hat{t}}{\partial y} \right\rangle \right\} + \left\langle \lambda \frac{\partial \hat{t}}{\partial y} \right\rangle + \frac{h}{2\delta} [f] = F_3(x),$$

$$\lambda_B h \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \langle \hat{t} \rangle + \left\langle \lambda \frac{\partial \hat{t}}{\partial y} \right\rangle \right\} + h^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \frac{\partial \hat{t}}{\partial y} \right] - \int_a^x \left[\lambda \frac{\partial \hat{t}}{\partial y} \right] d\xi - \frac{2h}{\delta} \int_a^x f^C(\xi) d\xi = F_6(x),$$

$$[\varphi] = \varphi_1^-(x) - \varphi_2^+(x), \quad \langle \varphi \rangle = \varphi_1^-(x) + \varphi_2^+(x) \quad (x \in L), \quad (3.4)$$

де функції F_r залежать від ОР і параметрів включення. Суцільними лініями у (3.4) підкреслені члени, які враховують величини порядку h^2 ; пунктиром - члени, які слід відкинути за ідеального контакту з включенням. УВ можна теж спростити на основі наближення

$$f(x \pm h) \cong f^\pm(x) \pm h(x) \frac{\partial f^\pm(x)}{\partial y} \text{ або } f(x \pm h) \cong f^\pm(x). \quad (3.5)$$

Баланс тепла у включенні й нерозривність температурного поля дають

$$\int_{L^+} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right]_h d\xi = Q_X(b) - Q_X(a) - \frac{2h}{\delta} \int_L f^C(\xi) d\xi + 2h \int_L Q_B^C(\xi) d\xi, \quad \int_{L^+} \left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]_h d\xi = 0. \quad (3.6)$$

Торцові потоки тепла (ТПТ) $Q_X(w)$ можна обчислити з апіорного припущення, яке дозволяє точно задовольнити усім граничним випадкам (теплоізоване; абсолютно теплопровідне включення; теплофізична еквівалентність матеріалів включення та матриці)

$$Q_X(w) = 2\lambda_B h(w) \min \left\{ \left[\frac{\lambda_B}{\max(\lambda, \lambda_B)} \right]^\varphi, \left[\frac{\lambda}{\max(\lambda, \lambda_B)} \right]^\psi \right\} \frac{\partial T_B}{\partial x} \quad (w = a, b; \varphi, \psi > 0). \quad (3.7)$$

За аналогією Г.С.Кіта поздовжний зсув еквівалентний до двовимірної задачі теплопровідності без урахування тепловіддачі з

бічних поверхонь і УВ **антиплоскої деформації** можна одержати відповідною інтерпретацією (3.4), (3.6). Окремий розгляд дає можливість ширшого механічного аналізу.

Через пропорційність похідних від зміщень компонентам тензора напружень основну модель (ОМ) УВ можна подати у вигляді

$$G_B \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle - \frac{1}{h} \int_a^x [\sigma_{yz}] d\xi = 2\alpha_{xz}^C(a), \quad \langle \sigma_{yz} \rangle + \frac{G_B}{h} \int_a^x [\sigma_{xz}/G] d\xi = w_{-}^* \frac{G_B}{h} + \frac{G_B}{B} \langle \sigma_{yz}^0/G \rangle, \quad (3.8)$$

де $\alpha_{xz}^C(a)$, w_{-}^* - торцеві сталі. Знехтувавши у (3.8) підкресленим членом, зведемо основну модель до плівкової (ПМ). Для торцевих сталей побудовані аналогічні до (3.7) апіорні залежності, які дозволяють отримати з (3.8) співвідношення для щілин з заданими на їхніх берегах напруженнями, для ідентичних матеріалів та для абсолютно жорсткого включення (АЖВ) нульової чи ненульової товщини.

Додаткові умови зводяться до виразів

$$\int_L \frac{\partial}{\partial \xi} [w] d\xi = \int_L [\sigma_{xz}/G] d\xi = 0, \quad \int_L [\sigma_{yz}] d\xi = 0. \quad (3.9)$$

Подібні залежності побудовані для анізотропного, пружно-пластичного та рідкого або в'язкого включень.

Методика побудови умов **плоскої термопружної** та температурної чи антиплоскої взаємодії принципово не різняться. Усередненням рівнянь рівноваги включення по ширині та інтегруванням в межах від a до x , використанням закону Гука та деяких наближень отримують математичну модель тонкого пружного теплопровідного включення

$$\begin{aligned} & - \frac{\nu_B}{E_B} \int_a^x [\sigma_{xuy}]_h d\xi + \int_a^x \left[\frac{\partial u_{yB}}{\partial x} \right]_h d\xi + \frac{h}{E_B} \langle \sigma_{yuy} \rangle_h + \alpha_{TB} h \langle T_B \rangle_h - \frac{\nu_B}{E_B} N_x(a) + V(a) = 0, \\ & - \frac{1}{E_B} \int_a^x [\sigma_{xuy}]_h d\xi + h \left\langle \frac{\partial u_{xB}}{\partial x} \right\rangle_h + \frac{\nu_B}{E_B} h \langle \sigma_{yuy} \rangle_h - \alpha_{TB} h \langle T_B \rangle_h - \frac{1}{E_B} N_x(a) = 0, \\ & - \int_a^x \left[\frac{\partial u_{xB}}{\partial x} \right]_h d\xi + \frac{1}{\nu_B E_B} \int_a^x [\sigma_{yuy}]_h d\xi - \frac{\nu_B}{E_B} h \langle \sigma_{xuy} \rangle_h + \frac{1+\nu_B}{\nu_B} \alpha_{TB} \int_a^x [T_B]_h d\xi + \frac{\nu_B}{E_B} N_{xy}(a) - \\ & \quad - \frac{1}{\nu_B} \int_a^x \left[\frac{\partial u_{yB}}{\partial y} \right]_h d\xi = 0, \\ & - \int_a^x \left[\frac{\partial u_{xB}}{\partial x} \right]_h d\xi - \frac{1}{G_B} \int_a^x [\sigma_{yuy}]_h d\xi + h \left\langle \frac{\partial u_{yB}}{\partial x} \right\rangle_h - V^*(a) = 0 \quad (x \in L^+). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Для стійлості запису збережені лише члени порядку мализни не вище h .

Вважаючи механічний контакт між матрицею і включенням ідеальним, враховуючи жорсткий поворот включення ε_B та тонкостінність, з ММВ (3.10) отримують відповідні УВ. ці умови дозволяють реалізувати різні рівні спрощень. Поряд з ними опрацьовані також інші моделі пружного включення, які враховують

анізотропію матеріалу, вигнутість осі, вплив температурного чинника, зокрема й модель балки Кірхгофа. Досліджені переваги та недоліки кожної з моделей.

В УВ входять торцеві сталі

$$N_x(w), N_{xy}(w), U'(w), V'(w) \quad w=\{a,b\}. \quad (3.11)$$

Для їх визначення можна використати апіорні співвідношення.

Подібно до (3.9) повинні виконуватися теж три додаткові умови

$$\int_a^b \{[\sigma_{yy}]_h, [\sigma_{xy}]_h, [u_x']_h, [u_y']_h\} d\xi = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}. \quad (3.12)$$

Урахування жорсткої складової повороту включення вимагає теж нульовості головного моменту прикладених до включення сил.

Записані також УВ включення зі стисливої рідини.

У четвертому розділі досліджене температурне поле двох злучених півплощин S_k ($k=1,2$) з коефіцієнтами теплопровідності λ_k .

Уздовж $L^* = \bigcup_{n=1}^N L_n^*$, $L_n^* = [a_n^-, a_n^+]$ на межі поділу лежать N

теплоактивних включень малої ширини $2h(x)$ з коефіцієнтами теплопровідності λ_{bn} (рис.3).

Діє тепловий потік $q = q_{xk}^\infty + i q_{y}^\infty$, у точках $z_{jk} \in S_k$ - джерела тепла q_k та теплові диполі q_{kk} з орієнтацією e_k . Тепловий контакт між включенням і матрицею є ідеальним або неідеальним, між півплощинами - ідеальним; включення виділяють тепло Q_n .

Температура $T = t^0(z) + \hat{t}(z)$ є суперпозицією основної та збуреної складових. Включення моделюється стрибком температури і теплового потоку на його осьовій лінії. Тому

$[t^0] = 0, [\lambda \partial t^0 / \partial y] = 0 \quad (x \in L^*),$

$$\left[\frac{\partial \hat{t}}{\partial x} - i \lambda \frac{\partial \hat{t}}{\partial y} \right] = f_3(x) - i f_6(x) \quad (x \in L^*; \quad f_r(x) = 0 \quad (r=3,6) \text{ коли } x \in L^{**}). \quad (4.1)$$

Урахування тепловіддачі супроводжується введенням у розгляд товщини 2δ пластинок та включень, їхніх коефіцієнтів тепловіддачі α_k , α_{bn} , температури зовнішнього середовища T_c , припущенням про симетричність стосовно серединної площини пластинки дії температурних чинників.

А) Відсутність тепловіддачі з бічних поверхонь пластин

За відсутності тепловіддачі з бічних поверхонь температура є гармонійною функцією і тому

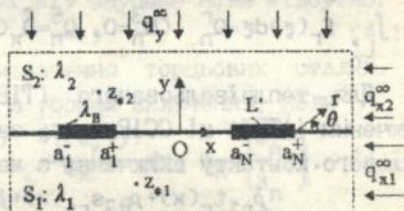


Рис. 3

$$T(z) = \operatorname{Re} \Phi_T(z). \quad (4.2)$$

Методами ТНКЗ крайова задача (4.1) зводиться до задачі лінійного спряження, розв'язок якої дає

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_T(z) &= -ip_j \ell_3(z) + p \ell_6(z), \\ \{t_r(z), \ell_r(z)\} &= \frac{1}{\pi} \int_L \left\{ \frac{1}{\xi - z}, \ln |\xi - z| \right\} f_r(\xi) d\xi, \quad \tilde{f}_r(x) = \int f_r(x) dx. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Вважаючи $f_r(x) = f_r \delta(x)$, отримують розв'язок для джерела тепла та його диполя на межі поділу матеріалів. Отже за МІС у задачах теплопровідності включення моделюють розподіленими уздовж його осі джерелами тепла та тепловими диполями.

На основі формул Сохоцького-Племелі з (4.2), (4.3) отримують граничні значення температури та її похідних на лінії поділу матеріалів і з УВ (3.4) - ССІР

$$\rho_{r1} t_r(x) + \rho_{r2} t_r^*(x) + \rho_{r3} s_{rn}(x) + \rho_{r4} f_r(x) + \rho_{r5} f_r^*(x) = F_r(x); \quad (4.4)$$

$$\int_{L_n} f_r(\xi) d\xi = Q_n^r \quad (Q_n^3 = 0, Q_n^6 = \hat{Q}_n(a_n^+) - \hat{Q}_n(a_n^-) + Q_n, x \in L_n^r; n=1 \dots N; r=3,6; \ell=9-r). \quad (4.5)$$

Для теплоізолизованого (ТІВ) та абсолютно теплопровідного включення (АТІВ) ці ССІР мають замкнутий розв'язок. За ідеального теплового контакту включення з матрицею ССІР спрощується

$$\begin{aligned} \rho_{r1} t_r(x) + \rho_{r3} s_{rn}(x) + \rho_{r4} f_r(x) &= F_r(x) \\ (x \in L_n; n=1 \dots N; r=3,6; \ell=9-r). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Для АТІВ з (4.6) впливає остальність температури всередині включення.

Аналіз ССІР (4.6) показує, що

$$f^{m*}(x) = (a_m^+ - x)^{-1/2 - i\mu} (x - a_m^-)^{-1/2 + i\mu} \varphi^*(x), \quad f^{m*} = df_3^m + if_6^m, \quad (4.7)$$

де μ визначається характеристичною частиною ССІР (4.6). Тому

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (T - T^0) \right\} &= \frac{k_x^{\pm}}{2\sqrt{2\pi i}} [c_k^- M^+(1) + c_k^+ M^-(1)] + \frac{\eta k_y^{\pm}}{2\sqrt{2\pi i}} [c_k^- M^+(0) - c_k^+ M^-(0)] - N_k^{\pm} + O(\sqrt{r}), \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (T - T^0) \right\} &= \frac{k_x^{\pm}}{2\sqrt{2\pi i}} \left\{ -j \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \mu \ell\right) + (j-1) \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \mu \ell\right) \right\}, \\ M^{\pm}(j) &= e^{\pm i\mu \ell} \left\{ -j \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \mu \ell\right) - (j-1) \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \mu \ell\right) \right\}, \quad N_k^{\pm} = p \begin{Bmatrix} \operatorname{Im}(n^{\pm}) \\ -\operatorname{Re}(n^{\pm}) \end{Bmatrix}, \\ n^{\pm} &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow a_m^{\pm} + 0} \{ t^{m*}(x) - i \operatorname{th}(\pi \mu) f^{m*}(x) \}; \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$k_x^{\pm} - i k_y^{\pm} = \frac{k_x - i k_y}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \frac{\pm \sqrt{\pi(a_m^+ - a_m^-)}}{\sqrt{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \operatorname{ch}(\pi \mu)} \{ \varphi_6(a_m^{\pm}) + i \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \varphi_3(a_m^{\pm}) \}, \quad 2a = a_m^+ - a_m^-. \quad (4.9)$$

$k_x^{\pm}, k_y^{\pm}$ - коефіцієнти інтенсивності градієнтів температурного поля (КІГТП); k_x, k_y - інтенсивності теплових потоків (КІТП).

Коефіцієнти $N_k^{\pm}$ характеризують другі члени асимптотичних залежностей і у граничних випадках ТІВ й АТПВ визначаються лише однорідним розв'язком задачі. КІТП у цих випадках також мають замкнутий вигляд для потоку, джерел та диполів тепла.

Якщо матеріали півплощин еквівалентні ($\lambda_1 = \lambda_2$) або якщо міжфазне включення не проводить тепла чи абсолютно теплопровідне, то осциляція розв'язку відсутня ($\mu=0$) і асимптотики спрощуються. За ідеального контакту однорідної матриці з включенням ССІР стає ще простішою, функції стрибка мають кореневу особливість і

$$\begin{cases} q_x - q_x^0 \\ q_y - q_y^0 \end{cases} = \frac{k_y^{\pm}}{\sqrt{2\pi}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} + \frac{k_x^{\pm}}{\sqrt{2\pi}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \pm \begin{Bmatrix} n_6^{\pm} \\ -\lambda n_3^{\pm} \end{Bmatrix} + O(\sqrt{r}); \quad (4.10)$$

$$k_x^{\pm} - i k_y^{\pm} = \pm \frac{\sqrt{\pi a}}{2} (\varphi_6(a_m^{\pm}) + i \lambda \varphi_3(a_m^{\pm})) = \lim_{r \rightarrow 0 (\theta=0)} [\sqrt{2\pi} (q_x + i q_y)], \quad n_r^{\pm} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow a_m^{\pm} \mp 0} t_r^m(x) \quad (4.11)$$

Для еквівалентних матеріалів ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_B = \lambda$) збурене поле відсутнє:

$$f_3(x) = f_6(x) = 0 \quad (x \in L). \quad (4.12)$$

Розглянутий і другий спосіб визначення торцевих сталей. У випадку ідеального контакту матриці з торцем включення, коли

$$Q_x(w_n) = \int_{-h(w_n)}^0 \lambda_1 \frac{\partial T(w_n, y)}{\partial x} dy + \int_0^{h(w_n)} \lambda_2 \frac{\partial T(w_n, y)}{\partial x} dy, \quad w_n = \begin{Bmatrix} a_n^- \\ a_n^+ \end{Bmatrix}, \quad (4.13)$$

інтегрування відомого однорідного поля дає Q_x^0 , збуреного -

$$\hat{Q}_x(w_n) = \frac{1}{\pi} \int_L f_6(\xi) \arctg \frac{h(w_n)}{\xi - w_n} d\xi. \quad (4.14)$$

Числові результати одержані для одного включення. Для різномодульної півплощини вивчалася сім типів навантаження: тепловий потік на нескінченності; різне розташування джерел і диполів тепла; відплив тепла з включення. У граничних випадках ТІВ та АТПВ отримані прості аналітичні формули для КІТП.

Детальні обчислення зроблені для однорідної матриці з одним включенням

$$h(x) = h_0 [1 - (x/a)^2]^{1/2\beta}, \quad \bar{h} = h_0/a (=0,01). \quad (4.15)$$

При $\beta=1$ включення має еліптичний профіль, при $\beta=\infty$ - прямокутний; $\gamma, Bi_y: 10^{-5} \dots 10^5$. Числові розв'язки при $\gamma=10^{-5}$ і $\gamma=10^5$ (для $Bi_y=10^{10}$) відрізняються від точних для ТІВ та АТПВ менше як на 1%.

Б) Узагальнене плоске температурне поле

За тепловіддачі з бічних поверхонь постановка задачі зберігається, хоча температура задовольняє рівняння

$$\lambda_k \Delta T(x, y) - \frac{q_k}{\delta} (T(x, y) - T_c) = - \frac{Q_k(x, y)}{2\delta}, \quad (x, y) \in S_k; \quad k=1, 2. \quad (4.16)$$

Застосувавши до (4.16) та умови (4.1) перетворення Фур'є за

координатою x отримане подання збуреного температурного поля

$$t(x,y)=(-1)^{k+1} \int_L \tilde{f}_3(\xi) \Lambda_k^1(\xi-x,y) d\xi + \int_L f_6(\xi) \Lambda_k^2(\xi-x,y) d\xi,$$

$$\{\Lambda_k^1(x,y), \Lambda_k^2(x,y)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{\lambda_j \omega_j, 1\} e^{-\omega_k |y| + i s x} \frac{ds}{\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2} \quad (4.17)$$

Зокрема, коли $\omega_1 = \omega_2$, тобто $\alpha_2/\lambda_2 = \alpha_1/\lambda_1 = \omega^2 \delta$,

$$\Lambda_k^1(x,y) = \frac{\rho_1 \omega |y|}{\pi} K_1(\omega r), \quad \Lambda_k^2(x,y) = \frac{\rho_k}{\pi} K_0(\omega r), \quad (4.19)$$

де K_1 - функції Макдональда. Визначаючи граничні значення температури і теплового потоку на L^* , від УВ приходять до ССІР.

Одержані граничні випадки ССІР для: 1)ТІВ; 2)АТПВ; 3)однорідної пластинки з включенням; 4)бездефектної пластинки. Побудовані залежності для визначення ТПТ. Числовий аналіз здійснений для одного включення в однорідній матриці за ідеального контакту компонентів при (4.18).

Стосовно розподілу градієнтів температури в околі торців включення, то перші члени асимптотичних розвинень теплових потоків збігаються з аналогічними виразами (4.8), (4.10) для пластини з теплоізовльованими бічними поверхнями.

Числово досліджений вплив тепловіддачі з бічних поверхонь пластини і включення на концентрацію температурного поля в околі включення для збалансованих джерела і стоку тепла.

У п'ятому розділі вивчається поздовжний зсув середовища зі стрічковими включеннями.

Розглянутий ізотропний масив з двох півпросторів з модулями зсуву G_k ($k=1,2$) за умов поздовжнього зсуву уздовж осі z , коли на межі поділу розташовані N тонких включень з модулями зсуву G_B . Двовимірна геометрія задачі аналогічна розглянутій на початку розд.4. Навантаження є напруження на нескінченності $\sigma_{yz}^\infty = \tau$, $\sigma_{xz}^\infty = \tau_k$ ($z \in S_k$; $S_1 \sim Rez < 0$, $S_2 \sim Rez > 0$, $k=1,2$), сили Q_k , гвинтові дислокації b_k , силові та дислокаційні диполі у точках $z_{*k} \in S_k$. На лінії поділу матеріалів півплощин контакт ідеальний.

Включення моделюють стрибком напружень і переміщень

$$[\sigma] = f \text{ на } L, \quad (5.1)$$

де $\sigma(z) = \{\sigma_{yz}(z), \partial w(z)/\partial x\}$ - вектор отану; $f(x) = \{f_3(x), f_6(x)\}$ - вектор стрибка, $\{f(x), f_r(x)\} = \{f^p(x), f_r^p(x)\}$ коли $x \in L_p^*$.

У кожній з півплощин для вектора напруження $\tau(z) = \{\sigma_{yz}(z), \sigma_{xz}(z)\}$ справедливе подання

$$\tau(z) = \omega^*(z), \quad w(z) = i \operatorname{Im} w(z)/G_k, \quad \omega^*(z) = \tau + i \tau_k + i S(z) + \omega_0^*(z),$$

$$S(z) = \sum_{k=1,2} (a_k + i b_k) / [2\pi(z - z_{*k})] \quad (z \in S_k) \quad (5.2)$$

$\omega_0(z)$ - голоморфна у кожній з півплощин і зникає на ∞ .

Методами ТФКЗ побудовані задачі лінійного спряження граничних значень, розв'язок яких дає

$$\begin{aligned} \tau(z) &= i p_k t_3(z) - c t_6(z) + \tau^0(z), \quad \tau^0(z) = \{\alpha_{yz}^0(z), \alpha_{xz}^0(z)\}, \\ &\quad (z \in S_k; \quad \Gamma = 3, 6; \quad k = 1, 2; \quad \ell = 3 - k); \quad (5.3) \\ \alpha_{yz}^\pm(x) &= \mp p_k f_3(x) - c t_6(x) + \alpha_{yz}^{0\pm}(x), \quad \alpha_{xz}^\pm(x) = \mp c f_6(x) + p_k t_5(x) + \alpha_{xz}^{0\pm}(x), \quad k = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Якщо півплощини ідентичні, то вирази (5.3), (5.4) спрощуються і збігаються з (1.10), одержаними за формулою Сомільяно.

Застосування принципу суперпозиції дає загальніший розв'язок задачі для випадку довільним чином орієнтованих включень

$$\begin{aligned} \tau_p(z_p) &= \frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^N \int_{L_m} P_{pm}(t, z) f_{3m}^*(t) dt + \tau^{Op}(z_p), \quad P_{pm}(t, z) = e^{i\alpha_p} / (T_m - z_p), \\ &\quad T_m = t e^{i\alpha_m} + z_{0m} \quad (5.5) \end{aligned}$$

Вважаючи, що лінія $L_0^* = [-\infty, \infty]$ є віссю необмеженого розрізу, з (5.5) отримують дещо складніші вирази для півпростору.

Усі результати поширюються на випадок викривлених ліній стрибка, заданих рівнянням $z_0 = z_p^*(x)$, коли

$$\begin{aligned} T_p &= z_p^*(x), \quad \alpha_p \sim \alpha_p(t) = \arctg(y_p^*(t)/x_p^*(x)), \\ f_{3p}^*(t) &= \sigma_{nzp}^-(t) - \sigma_{nzp}^+(t) + i(\sigma_{tzp}^-(t) - \sigma_{tzp}^+(t)). \end{aligned} \quad (5.6)$$

В околі вершини включення справедливі асимптотичні вирази (4.8), (4.9), якщо у них зробити заміну

$$\begin{aligned} T \rightarrow w, \quad \alpha_x \rightarrow \alpha_{xz}, \quad \alpha_y \rightarrow \alpha_{yz}, \quad \lambda \rightarrow G, \quad f_3 \rightarrow f_6, \quad f_6 \rightarrow f_3, \quad t_3 \rightarrow t_6, \quad t_6 \rightarrow t_3, \\ k_x^\pm \sim \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} k_x^\pm + K_{3,2}^\pm, \quad k_y^\pm \sim \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} k_y^\pm + K_{3,1}^\pm, \quad n_3^\pm \rightarrow n_6^\pm, \quad n_6^\pm \rightarrow n_3^\pm. \end{aligned} \quad (5.7)$$

$K_{3,1}$, $K_{3,2}$ - узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (УКІН). Якщо матеріали півплощин пружно еквівалентні ($G_1 = G_2$) або якщо міжфазне включення абсолютно жорстке чи абсолютно податливе, то осциляції розв'язку немає ($\mu = 0$) і асимптотики спрощуються. Зокрема, якщо включення (пласке чи вигнуте) лежить у однорідному матеріалі, то справедливі вирази (4.10), (4.11). Для щілини УКІН $K_{3,1}$ відповідає класичний КІН K_3 .

Зіставлення точного і наближеного одно- та двочленного асимптотичного розвинень для пружного дефекту показали, що використовувати асимптотики слід обережно, оскільки вони можуть дати не лише кількісно але і якісно хибну картину.

Підставляючи граничні значення напружень на лінії стрибка в УВ

(скажімо (5.4) у (3.8)), отримують ССІР, аналогічні рівнянням (4.6), що розв'язуються числовими методами розд.2. Граничні випадки міжфазної щілини ($G_B \rightarrow 0$) та абсолютно жорсткої плівки (АЖП) ($G_B \rightarrow \infty$) мають аналітичні розв'язки.

Отримано, що стрибок переміщень $w(x-ih)-w(x+ih)$ на берегах АЖВ в рамках прийнятих наближень нульовий. Обчислені значення σ_{yz} на межі тонкого еліптичного включення теж є сталими. це ж дає і точний розв'язок задачі для еліптичного включення, засвідчуючи високу міру адекватності МЭС.

Для одного тонкого включення еліптичного профілю побудований замкнутий розв'язок задачі, який є особливо простим за дії ОПНН

$$f_r(t) = F_r t(a^2 - t^2)^{-1/2}. \quad (5.8)$$

Задавши у (5.3) чи (5.5) функції стрибка як дельта-функції

$$f_r(t) = f_r \delta(t), \quad f_3 = Q, \quad f_6 = b, \quad (5.9)$$

отримаємо вирази $\tau(z)$ для сили Q та гвинтової дислокації b на межі поділу матеріалів чи у довільній точці однорідної матриці. Отже, МЭС стосовно поздовжнього зсуву означає заміну тонких включень розподіленими на їхній серединній поверхні силами та гвинтовими дислокаціями. Дія сили еквівалентна впливу дислокації суто уявної інтенсивності ($Q \sim iGb$); дислокаційний диполь еквівалентний силовому, повернутому на кут $\pi/2$.

Досліджений вплив на УКІН та поле напружень і переміщень таких чинників: а) відносної товщини включення $\bar{h} = h_0/a$ (якщо $\bar{h} \rightarrow 0$, то концентрація напружень зменшується до одиниці); б) відносної жорсткості включення $k = G_B/G$ (якщо $k=1$, то концентрація напружень мінімальна, для ОПНН - одинична; в граничних випадках $k \rightarrow 0$; $k \rightarrow \infty$ числові розрахунки збігаються зі значеннями відповідних аналітичних виразів для тріщини і АЖП, коли концентрація напружень найбільша); в) параметра β форми включення (зі збільшенням k вплив β збільшується; зменшення β зменшує абсолютні значення УКІН: при $\beta=1$ вони мінімальні; г) типу навантаження (ОПНН, сила, гвинтова дислокація, силовий та дислокаційний диполі); д) типу задачі (1-5 включень однакового типу; 1-2 включення і тріщина; періодична система 1-5 тріщин чи 1-3 включень; подвійно-періодична система тріщин чи включень у квадратній, прямокутній і трикутній ґратках).

Досліджені декілька варіантів умов взаємодії та способів вибору апіорних виразів для визначення торцевих сталей.

Для зосереджених сил, дислокацій та їхніх диполів побудовані точні аналітичні розв'язки для дефекту у вигляді скінченної чи

півнескінченної тріщини або АЖП. Числовий аналіз показав, що з віддаленням сили чи дислокації від включення в окремих випадках безпосереднє наближення збурюючого чинника до поверхні включення (особливо жорсткішого від матриці) теж дещо знижує концентрацію напружень у порівнянні з деяким максімальним значенням.

Окремо розглянуте застосування інтегральних перетворень Фур'є до задач про включення у шаруватих середовищах, коли на межі пакету з довільної кількості смуг задані напруження або переміщення; між шарами - ідеальний механічний контакт; всередині шарів чи на їх межі - тонкі включення. Розв'язок w_j у смузі S_j подається як сума однорідного w_j^{0j} , породженого зовнішнім навантаженням за відсутності включень, та збуреного $\hat{w}^j$ розв'язків

$$w_j^j(z) = w_j^{0j}(z) + \hat{w}^j(z), \quad \hat{w}^j(z) = \hat{w}^{0j}(z) + \hat{w}^{1j}(z) \quad (z \in S_j). \quad (5.10)$$

У свою чергу $\hat{w}^j$ є сумою основного збуреного розв'язку $\hat{w}^{0j}$ для безмежної площини з такими ж механічними властивостями і такими ж включеннями, які належать S_j (якщо у S_j включення немає, то $\hat{w}^{0j} = 0$), й збуреного коригувального $\hat{w}^{1j}$, який повинен враховувати скінченність висоти, вплив сусідніх смуг і не породжувати стрибків напружень і переміщень. Подавши Фур'є-трансформанту збуреного коригувального поля у вигляді

$$\hat{w}^{1j}(x, y) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_1^j(\xi) e^{-|\xi|y} + A_2^j(\xi) e^{|\xi|y} \right] \xi e^{-i\xi x} d\xi; \quad (5.11)$$

та використавши крайові умови і функції стрибка на включеннях, для визначення шуканих функцій $A_q^j(\xi)$ матимемо СЛАР.

Побудови деталізовані для включення всередині смуги. Обчислення здійснені для півпростору з включенням. Показано, що зміна типу граничної умови на поверхні тіла змінює знак виразу для коригувального збуреного поля напружень.

Аналогічні результати отримані у випадку лінійної анізотропії матеріалів двох півплощин з тонким міжфазним включенням. Побудовані залежності напружень від функцій стрибка, асимптотичні вирази, аналітичні розв'язки для ОПНН, сил, дислокацій біля тріщини та АЖП тощо. Виявлений кількісний і якісний вплив міри анізотропії на розподіл напружень і їх концентрацію.

Досліджені умови моделювання в теорії пружності анізотропних матеріалів ОПНН рядами зосереджених сил, прикладених на достатній відстані від досліджуваного концентратора.

Показана можливість використання розв'язків МТС до визначення

ефективних (зведених) сталих неоднорідного середовища зі стрічковими включеннями. Якщо композит є анізотропним матеріалом

$$\left\langle \frac{\partial w}{\partial y} \right\rangle = a_{44}^e \langle \sigma_{yz} \rangle + a_{45}^e \langle \sigma_{xz} \rangle, \quad \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle = a_{45}^e \langle \sigma_{yz} \rangle + a_{55}^e \langle \sigma_{xz} \rangle, \quad (5.12)$$

зі сталими a_{44}^e , a_{45}^e , a_{55}^e , то усереднюючи розв'язки відповідної задачі теорії пружності при двох варіантах навантаження

$$\text{I. } \sigma_{yz}^{\infty} = \tau, \sigma_{xz}^{\infty} = 0; \quad \text{II. } \sigma_{yz}^{\infty} = 0, \sigma_{xz}^{\infty} = \tau_1 \quad (5.13)$$

отримують вирази для ефективних характеристик

$$a_{44}^e = \frac{\left\langle \frac{\partial w}{\partial y} \right\rangle \text{I}}{\langle \sigma_{yz} \rangle \text{I}}, \quad a_{55}^e = \frac{\left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle \text{I}}{\langle \sigma_{xz} \rangle \text{I}}, \quad a_{44}^e = \frac{\left\langle \frac{\partial w}{\partial y} \right\rangle \text{II}}{\langle \sigma_{xz} \rangle \text{II}} = \frac{\left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle \text{I}}{\langle \sigma_{yz} \rangle \text{I}} \quad (5.14)$$

Цей підхід з урахуванням аналогії Г.С.Кіта дозволяє вивчити ефективну теплопровідність стрічкових композитів.

Якщо велика віддаль між включеннями дозволяє знехтувати їхньою взаємодією, поле напружень σ_{yz} , σ_{xz} і переміщень w можна обчислити за розв'язком для поодинокого включення в однорідній матриці, зокрема замкнутим розв'язком для включення еліптичного профілю. Якщо до того ж діє лише ОПНН, то функції стрибка визначаються виразом (5.8) і за цим замкнутим розв'язком можна розвивати теорію масових дефектів та визначати ефективні характеристики композиту з регулярним чи стохастичним укладанням стрічок.

Для включення нееліптичного профілю (5.12) слід використати сумісно з (2.3), визначивши коефіцієнти A_n^e за допомогою МК або з певною мірою точності заступити його еквівалентним еліптичним, і у полі однорідного зсуву взяти для нього замкнутий розв'язок (5.8).

Якщо густина заповнення велика і взаємодією включень нехтувати не можна, то ефективні властивості регулярного композиту обчислюються за розв'язком відповідної подвійноперіодичної задачі. Одержано, що: 1) раціональним вибором параметрів ґратки можна підвищити ефект армування не збільшуючи об'ємну частку арматури; 2) потоншування стрічок зі збереженням їхньої об'ємної частки є ефективним засобом підвищення зведеного модуля зсуву композиту, засвідчуючи доцільність армування композиту дуже тонкими стрічками.

Використання замкнутого розв'язку (5.8) для тонкого шару еліптичного профілю дозволяє побудувати наближену теорію визначення ефективних властивостей композиту при рідкому стохастичному армуванні, вважаючи півдовжину a і кут орієнтації включень випадковою величиною.

Силу, що діє на дислокацію (СДД) з вектором Бюргерса b

визначають формулою

$$F_x(z_*) = b\sigma_{yz}^{*0}(z_*), \quad F_y(z_*) = -b\sigma_{xz}^{*0}(z_*), \quad (5.15)$$

де індексом ^{*0} відзначене поле напружень у точці z_* без урахування власного поля напружень від дислокації у цій точці. Побудовані аналітичні вирази для визначення СДД в ізотропному і анізотропному тілі біля тріщини та АЖП.

Отримано, що радіальна складова СДД в околі півнескінченної АЖП дорівнює нулю, а трансверсальна - відповідній силі біля тріщини протилежного напрямку: маючи змогу вільного переміщення, дислокація рухатиметься колом з центром у вершині включення до стану стійкої рівноваги на продовженні площини АЖП. Від поверхні включення дислокації відштовхуються, сприяючи емісії дислокацій з межі АЖВ та сприяючи зменшенню КІН у вістрі тріщини та збільшенню критичне навантаження. Теоретичне дослідження емісії здійснюється двома способами: 1) з використанням граничного переходу у задачі про СДД; 2) модифікуванням умов взаємодії включення з довкіллям. Останній дозволяє ставити і розв'язувати задачі про тонкі включення з зоною гладкого проковзування (розтріскування) або контактом з тертям чи пластичним шаром.

Результати лінійної теорії переносяться на випадок масиву з неогуківського матеріалу зі стрічковим включенням малої товщини. Якісна відмінність полягає у тому, що як і у випадку тріщини для АЖП нормальні напруження σ_{zz} мають в околі торця прошарку особливості порядку r^{-1} . За допомогою фундаментального розв'язку

$$\omega^*(z) = \omega_0^*(z) = i f_3^* / [2\pi(z_* - z)] \quad (5.16)$$

отримані результати легко поширити на системи плоских та скривлених включень, врахувати дію сил, дислокацій, відповідних диполів.

Лінеаризовані рівняння нелінійної задачі позовжнього зсуву зводяться до одержаних у §24 співвідношень теорії анізотропних матеріалів, якщо зробити заміну

$$a_{45} = 0, \quad a_{55} \sim 1/\tilde{\chi}_{1331}, \quad a_{44} \sim 1/\tilde{\chi}_{2332}, \quad (5.17)$$

причому для потенціалу Трелоара $\tilde{\chi}_{k33k} = 2c_{10}\lambda_k^2$, для потенціалу Бартенєва-Хазановича $\tilde{\chi}_{k33k} = 2G\lambda_k^2/(\lambda_k + \lambda_3)$, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ ($k=1,2$).

На основі розв'язку (5.8) та критеріальної функції локального руйнування біля включення

$$W = \frac{1}{2G}(\sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2) \quad (5.18)$$

визначені ймовірнісні характеристики граничного навантаження для ізотропного середовища з рідким заповненням тонкими включеннями профілю близького до еліптичного, коли їх довжина і кут орієнтації

є випадковими величинами.

У шостому розділі вивчена плоска задача теорії пружності для тіл з тонкими неоднорідностями. На початку розглядається пружна рівновага двох півплощин S_k з пружними сталими E_k , ν_k ($k=1, 2$) з N включеннями (E_B, ν_B) малої товщини $2h(x)$ на частині $L^* = \bigcup_{n=1}^N L_n^*$ лінії поділу матеріалів. На поверхнях контакту матеріалів є ідеальний механічний контакт. Складена площина навантажена ОПНН, силами, моментами, крайовими дислокаціями, диполями сил і дислокацій. За МФС включення вилучають з розгляду і їх дію заступають стрибками на L^* векторів напружень і переміщень

$$\begin{aligned} (\sigma_{yy1} - i\sigma_{xy1}) - (\sigma_{yy2} - i\sigma_{xy2}) &= f_1(x) - if_2(x) = f_1^*(x), \\ (u_{x1}^* + iu_{y1}^*) - (u_{x2}^* + iu_{y2}^*) &= f_4(x) + if_5(x) = f_4^*(x) \quad (x \in L). \end{aligned} \quad (6.1)$$

З урахуванням подання напружень і переміщень через комплексні потенціали Колоосова-Мусхелішвілі умови (6.1) зводяться до задачі Рімана-Гільберта і її розв'язок дозволяє отримати

$$\begin{aligned} \sigma_{yyk}(z) - i\sigma_{xyk}(z) &= i \left\{ \frac{G_k}{2c_{k\ell}} [t_1^*(z) + 2G_\ell t_4^*(z) - (z - \bar{z})(t_1^*(z) + 2G_\ell t_4^*(z))] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{G_k}{2c_{k\ell}} [x_\ell t_1^*(\bar{z}) - 2G_\ell t_4^*(\bar{z})] \right\} + \sigma_{yy}^0(z) - i\sigma_{xy}^0(z), \\ u_{xk}^*(z) + iu_{yk}^*(z) &= \frac{i}{4} \left\{ \frac{x_k}{c_{k\ell}} [t_1^*(z) + 2G_\ell t_4^*(z)] + \frac{z - \bar{z}}{c_{k\ell}} [t_1^*(z) + 2G_\ell t_4^*(z)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c_{k\ell}} [x_\ell t_1^*(\bar{z}) - 2G_\ell t_4^*(\bar{z})] \right\} + u_{xk}^0(z) + iu_{yk}^0(z). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Грунтуючись на поданні (6.2), можна отримати аналогічно

$$\begin{aligned} \sigma_{yyp}^m(z_p) - i\sigma_{xyp}^m(z_p) &= -ei \int_{L_m^*} \left\{ k_{pm}(t, z, x) f_{1m}^*(t) + 2G_{kpm}(t, z, -1) f_{4m}^*(t) + \right. \\ &\quad \left. + L_{pm}(t, z) [f_{1m}^*(t) + 2G_{f4m}^*(t)] \right\} dt + \sigma_{yyp}^{0m}(z_p) - i\sigma_{xyp}^{0m}(z_p) \end{aligned} \quad (6.3)$$

для системи довільно орієнтованих включень у однорідній площині, потім поширити (6.3) на випадок викривлених включень а також отримати подібні до них вирази для неоднорідностей у півплощині.

Подання функцій стрибка у вигляді (5.9), де $f_1 = P_y$, $f_2 = P_x$, $f_4 = b_x$, $f_5 = b_y$, свідчить, що у плоскій пружності МФС полягає у моделюванні включень розподіленими уздовж їхніх осей силами та крайовими дислокаціями з невідомими наперед густинами.

Якщо визначити з (6.2) чи (6.3) граничні значення напружень і переміщень на лініях стрибка і підставити їх в умови взаємодії, наприклад породжених (3.10), отримаємо конкретну ССІР типу (2.1)

задачі для пружних включень на межі поділу ізотропних півплощин за додаткових умов (2.2). У граничних випадках звідси випливають ССІР для тріщин ($E_B \rightarrow 0$), для АЖП ($E_B \rightarrow \infty$), що допускають замкнутий розв'язок.

Коефіцієнти Q_{mj} додаткових умов (2.2) і функції F_{ip} у правих частинах рівнянь (2.1) залежать від чотирьох торцевих отах. Для їх визначення використовують або апіорні вирази, що дають точні значення лише у граничних випадках, або зв'язують їх з функціями стрибка на основі (6.2). Останній спосіб дає задовільні результати лише для дуже тонких включень.

Розв'язок інтегральних рівнянь міжфазних включень типу (2.1) при $A_{1j}^{mp} \neq 0$ має структуру (4.7) і його шукають у вигляді рядів за поліномами Якобі. Подібними до (4.8) але набагато громіздкішими є асимптотичні вирази. Старші члени розвинень зв'язані з чотирма УКІН, другі члени у випадках тріщини та АЖП визначаються лише однорідним розв'язком задачі. У випадку однорідної матриці ($E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$) $A_{1j}^{mp} = 0$ і

$$\begin{pmatrix} \sigma_{yy} & -\sigma_{yy}^0 \\ \sigma_{xx} & -\sigma_{xx}^0 \\ \sigma_{xy} & -\sigma_{xy}^0 \end{pmatrix} = \frac{K_{1,1}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} 5\cos\theta_1 - \cos\theta_5 \\ 3\cos\theta_1 + \cos\theta_5 \\ -\sin\theta_1 + \sin\theta_5 \end{pmatrix} + \frac{K_{2,1}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} -\sin\theta_1 + \sin\theta_5 \\ -7\sin\theta_1 - \sin\theta_5 \\ 3\cos\theta_1 + \cos\theta_5 \end{pmatrix} + \\ + \frac{x_* K_{1,2}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} (2x-3)\cos\theta_1 + \cos\theta_5 \\ -(2x+5)\cos\theta_1 - \cos\theta_5 \\ -(2x+1)\sin\theta_1 - \sin\theta_5 \end{pmatrix} + \frac{x_* K_{2,2}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} (2x+3)\sin\theta_1 - \sin\theta_5 \\ -(2x-5)\sin\theta_1 + \sin\theta_5 \\ (2x-1)\cos\theta_1 - \cos\theta_5 \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{1+x} \begin{pmatrix} -4Gn_5^{\pm} + n_2^{\pm}(1-x) \\ -4Gn_5^{\pm} + n_2^{\pm}(3+x) \\ -4Gn_4^{\pm} - n_1^{\pm}(1-x) \end{pmatrix} + O(r^{1/2}), \quad (6.4)$$

В граничних випадках тріщини і АЖП побудовані замкнуті розв'язки, зокрема УКІН для всіх видів зовнішнього навантаження. УКІН $K_{1,1}$ відповідають класичним КІН K_I теорії тріщин. Досліджена також некоренева особливість напружень біля вістря АЖВ, перпендикулярного до межі поділу матеріалів.

Застосування МОМ дало для тонкого включення еліптичного профілю замкнутий розв'язок, який у випадку ОПНН має вигляд (5.8).

Числовий аналіз для пружного включення довільного профілю підтвердив усі якісні висновки, зроблені у відповідних задачах антиплоскої деформації.

Зіставлені різні способи апіорного означення торцевих

оталих; використання різних моделей пружного включення, основної, балкової (за рівняннями Кірхгофа), моделі гнучкого включення, моделі вільного незакріпленого включення. Досліджуючи вільне включення перевагу слід надавати моделі Кірхгофа. Вивчена модель рідкого включення для якого стрибок напружень дорівнює нулю. Для прикладу викривленого включення побудована ССІР для тонких пружних включень уздовж дуг кола, яке поділяє два матеріали.

Взаємодія дефектів досліджена на прикладах періодичних систем включень: за їх опіввісного розташування при дії ОПНН чи сил зближення включень збільшує УКІН; за компланарного при ОПНН - зменшує (ефект екранування).

Потреба обґрунтування застосовності МФС до розв'язування задач теорії тонких включень викликана тим, що він породжує нереальну сингулярність напружень і деформацій біля краю неоднородності. З одного боку, перевірка адекватності МФС у задачах тонких включень здійснена за допомогою МСЕ. З другого боку, використання встановленого іншими авторами зв'язку між коефіцієнтами концентрації напружень (ККН) та КІН чи УКІН дозволило зіставити обчислені за різними теоріями та моделями значення УКІН з відомими ККН для тонкого включення еліптичного профілю та зробити висновки про переваги МФС та обраної моделі тонкого включення; можливість використовувати сингулярні розв'язки для опису механічних полів біля тонких дефектів; ефективність вінклерової моделі у вивченні податлих прошарків.

Розглянутий також пакет K однорідних ізотропних смуг S_j з тонкими включеннями. Як і за поздовжнього зсуву, розв'язок є сумою однорідного та збуреного, який задовольняє одну з чотирьох однорідних крайових умов на межі пакету

$$1. \hat{\sigma}_{yy}^j = \hat{\sigma}_{xy}^j = 0; 2. \hat{u}_x^j = \hat{u}_y^j = 0; 3. \hat{\sigma}_{yy}^j = \hat{u}_x^j = 0; 4. \hat{\sigma}_{xy}^j = \hat{u}_y^j = 0, \quad j = \begin{cases} L; y = y_{0,L+1}, \\ -M; y = y_{0,-M}, \end{cases} \quad (6.5)$$

умови ідеального механічного контакту на лініях поділу матеріалів

$$\hat{\sigma}_{qy}^j = \hat{\sigma}_{qy}^{j-1}, \quad \hat{u}_q^j = \hat{u}_q^{j-1} \quad (q=x, y; y = y_{0j}, -\infty < x < \infty; j = -M+1, \dots, L) \quad (6.6)$$

та породжує стрибки напружень і похідних переміщень на L_j . Збурений розв'язок $\hat{\phi}^j(z)$ є сумою однорідного збуреного $\hat{\phi}_0^j(z)$ та коригувального збуреного $\hat{\phi}^{1j}(z)$ розв'язків. Застосувавши до умов (6.5), (6.6) інтегральне перетворення Фур'є, використавши інтегральне подання трансформанти функції напружень Ейрі

$$\hat{\Phi}^{1jF}(\varepsilon, y_j) = [A_1^j(\varepsilon) + \varepsilon y A_3^j(\varepsilon)] e^{-i\varepsilon |y_j|} + [A_2^j(\varepsilon) + \varepsilon y A_4^j(\varepsilon)] e^{i\varepsilon |y_j|}, \quad (6.7)$$

отримують СЛАР порядку $4K$ відносно функцій $A_q^j(\varepsilon)$.

Обчислення здійснені для смуги з включенням за рівномірного розтягу, згину, зсуву та дії сил. Для півплощини всі результати тотожні отриманим методами ТФКЗ.

Поєднанням методів інтегральних перетворень Фур'є і ТФКЗ розв'язана задача щодо тріщин на лінії злуки смуг, підкріплених півплощинами, коли відомий стрибок напружень $f_1^*(x)$. Пружні потенціали подаються у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi_k(z) &= \Gamma_k^* + S_{kk}(z) + A_{0k}(z) + B_{0k}(z) + \Phi_{0k}(z), \quad (z \in S_k, \quad k=1 \dots 4), \\ \{A_{0k}(z), B_{0k}(z)\} &= \int_0^\infty \{A_k(\varepsilon) e^{-i\varepsilon z}, B_k(\varepsilon) e^{i\varepsilon z}\} d\varepsilon, \end{aligned} \quad (6.8)$$

де Γ_k^* , $S_{kk}(z)$ - відомі, $\Phi_{0k}(z)$ - шукані голоморфні в S_k функції; $A_k(z)$, $B_k(z)$ ($k=1, 2$) - функції впливу.

Врахування умов на границі пакету і контакту між півплощинами та смугами, крайових умов породжує СЛАР для визначення функцій впливу. Умови на лінії $y=0$ дають ССІР щодо $f_4^*(x)$. Досліджені граничні випадки геометрії пакету та пружних властивостей складових. Досліджений періодичний аналог відповідної задачі.

Числові результати отримані у випадку пружної та геометричної симетрії задачі за дії ОПНН та сил всередині смуг і півплощин. Для прикладених всередині смуги сил у випадку $K=E_3/E_1 > 1$ зі зменшенням ширини смуги помітне опершу збільшення КІН а потім різке зменшення. Зменшення і навіть зміна знаку КІН за достатньої жорсткості підкріплювальних півплощин дозволяє вказати зону прикладання сил, коли руйнування тіла не буде пов'язане з просуванням даної тріщини.

Використання МФС і апарату ТФКЗ дозволило розв'язати відповідні задачі про тонкі включення на межі поділу двох анізотропних півплощин, навантажених ОПНН, силами, моментами, дислокаціями та їх диполями. Побудована залежність напружень і переміщень від функцій стрибка, одночленні асимптотичні вирази для включення в однорідній матриці. Внаслідок граничного переходу отримані вирази для ізотропного матеріалу. Побудована ССІР в граничних випадках збігається з класичною для тріщин та дає ССІР для АЖВ.

Подібно до антиплоского випадку розглянута СДД біля тонкого пружного включення. Побудовані аналітичні залежності СДД біля

тріщини та АЖВ скінченної та півнескінченної довжини причому показано, що

$$\{F_x(x_*), F_y(x_*)\}^{AJB} = - \frac{(1-\nu)^2}{4\pi} \{F_x(x_*), F_y(x_*)\}^{TP} \quad (|x_*| > a). \quad (6.9)$$

Якщо дислокація притягується до вістря тріщини з тим більшою силою, чим менша стисливість матеріалу, то від вістря півнескінченної АЖП вона відштовхується тим сильніше, чим вона більша: для нестисливого матеріалу $F_r=0$.

На основі критеріальної функції, зв'язаної з границею інтенсивності об'ємної деформації

$$\Phi_3 = \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{r}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})] \quad (6.10)$$

досліджений критерій зародження руйнування біля вершини тонкого включення, що визначається умовою $\Phi_{3max}=K_0$. На основі асимптотичних виразів (6.4) кут α_* площини розтріскування матриці

$$\alpha_* = \begin{cases} 2 \arctg[(K_{2,1} x_* K_{2,2}) / (x_* K_{1,2} - K_{1,1})], & (K_{1,1} x_* K_{1,2}) \\ \pm \pi & (K_{1,1} = x_* K_{1,2}) \end{cases} \quad (6.11)$$

Використання замкнутого розв'язку (5.8) для тонкого включення еліптичного профілю за навантаження ОПНН визначає найнебезпечнішу орієнтацію α_* включення і граничне навантаження. При розтягу найнебезпечніша орієнтація АЖВ - уздовж напрямку дії зусиль.

Побудовані також вирази для визначення ймовірнісних характеристик міцності для пластини з віддаленими пружними тонкими еліптичними включеннями за двовісного розтягу. Їх геометричні параметри - випадкові величини з відомою густиною $f(\alpha, a)$ розподілу в діапазоні допустимих значень.

У сьомому розділі на основі результатів розділів 4 і 6 вивчається плоский термонапружений стан кусково-однорідного середовища з системою тонких включень.

За відсутності тепловіддачі з бічних поверхонь пластин на механічні, теплофізичні характеристики і навантаження на нескінченності накладаються обмеження $(\alpha_0 \Gamma_1 - \bar{\Gamma}_1 - \bar{\Gamma}_1^* + \beta_{T1} \Phi_T^{\infty}) G_2 = (\alpha_2 \Gamma_2 - \bar{\Gamma}_2 - \bar{\Gamma}_2^* + \beta_{T2} \Phi_T^{\infty}) G_1$; $q_{kk}^{\infty} = 0$; $\alpha_{T2}/\lambda_2 = \alpha_{T1}/\lambda_1$; $q_y^{\infty} = 0$; $\alpha_{T2} = \alpha_{T1}$.

Побудовані ССІР, досліджені граничні випадки міжфазних АЖВ, АЖП, щілини; вивчені абсолютна теплопровідність і теплоізоляція дефектів. Для прикладу досліджена концентрація напружень біля тонкого теплопасивного включення у однорідній матриці під впливом рівномірного нагрівання пластини, теплового потоку на нескінченності і джерела тепла.

За узагальненого плоского температурного поля (тепловіддача з

бічних поверхонь) задачу можна розв'язати з використанням інтегральних перетворень за методикою §34. Однак зручніше звести її до розв'язування відповідної задачі термопружності в умовах плоского температурного поля.

Оскільки функція Ейрі у кожній з півплощин задовольняє рівняння сумісності $\Delta\Delta\delta_k(x,y) + \alpha_{Tk}E_k\Delta T(x,y) = 0$, то можна подати її як суму бігармонійної складової та частинного розв'язку цього рівняння

$$\delta_k = \delta_k^b + \delta_k^T, \quad \Delta\Delta\delta_k^b = 0, \quad \Delta\Delta\delta_k^T = -\alpha_{Tk}E_k\Delta T(x,y). \quad (7.1)$$

За відомим розв'язком δ_k^T вводяться у розгляд величини

$$\sigma_{xxk}^b = \sigma_{xxk} - \frac{\partial^2 \delta_k^T}{\partial y^2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\alpha_{Tk} \lambda_k \delta}{\alpha_k} \left[\frac{\partial^2 \delta_k^T}{\partial y^2} - \nu_k \frac{\partial^2 \delta_k^T}{\partial x^2} \right] - \alpha_{Tk} T, \quad \dots \quad (7.2)$$

Величини, відзначені індексом "б" задовольняють у S_k однорідні рівняння рівноваги, закон Гука та рівняння сумісності деформацій $\Delta(\sigma_{xxk}^b + \sigma_{yyk}^b) = 0$. Тому з математичного погляду визначення "бігармонійних" напружень і переміщень еквівалентне задачі термопружності при плоскому температурному полі.

Для частинного розв'язку δ_k^T отриманий вираз

$$\delta_k^T(x,y) = -\frac{\alpha_{Tk} E_k \lambda_k \delta}{\alpha_k} [T(x,y) - T_c] + \frac{\alpha_{Tk} E_k}{2\alpha_k} w_k(x,y), \quad (7.3)$$

де у випадку дії джерел тепла та теплових диполів у точці z_{*k}

$$w_k(x,y) = -\frac{q_k}{2\pi} \ln r_{*k} + \frac{q_{kk}}{2\pi} \frac{(x-x_{*k}) \cos \theta_k + (y-y_{*k}) \sin \theta_k}{r_{*k}^2}, \quad r_{*k}^2 = (x-x_{*k})^2 + (y-y_{*k})^2. \quad (7.4)$$

Загальна методика застосована до прикладу однорідної пластинки з включеннями і оскільки з погляду теплопровідності включення є лінійно розподілених джерел та диполів тепла, на основі (7.4)

$$\begin{aligned} \delta_k^T(x,y) = & -\frac{\alpha_{Tk} E}{\omega^2} \left\{ \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^2 \frac{q_k}{\lambda \delta} [K_0(\omega r_{*k}) + \ln r_{*k}] + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^2 \frac{q_{kk}}{\lambda \delta} [(x-x_{*k}) \cos \theta_k + \right. \\ & \left. + (y-y_{*k}) \sin \theta_k] \left[\frac{\omega K_1(\omega r_{*k})}{r_{*k}} - \frac{1}{r_{*k}^2} \right] - \frac{1}{2\pi} \int_{L^+} \tilde{f}_3(\xi) \left[\frac{\omega K_1(\omega r)}{r} - \frac{1}{r^2} \right] d\xi + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\pi \lambda} \int_{L^+} f_6(\xi) [K_0(\omega r) + \ln r] d\xi \right\}, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}. \quad (7.5) \end{aligned}$$

Ця функція повністю враховує вплив температури на напруження й переміщення і подальше визначення величин (7.2) є вже суто силовою задачею. Побудовані відповідні ОСІР та досліджені граничні випадки АЖВ, щілини і бездефектної матриці. Методика визначення торцевих сталей з використанням фізично обґрунтованих в околі торця

включення допущень повністю замикає ССІР на функції стрибка.

Обчислювалися значення УКІН кусково-однорідної матриці для температурного навантажування джерелами і диполями тепла. Отримані замкнуті розв'язки для міжфазного абсолютно податлого включення та абсолютно податлої плівки у випадку їхньої теплоізоляованості чи абсолютно теплопровідності. Збільшення тепловіддачі з бічних поверхонь пластини зменшує абсолютні значення УКІН.

Методом колокацій досліджена зміна УКІН біля включення в однорідній матриці за умов плоского температурного поля та двох способів температурного навантажування джерелами і диполями тепла. Виявилося, що екстремальні значення УКІН досягаються на абсолютно податлому теплоізоляованому включенні, що моделює тріщину та при абсолютно жорсткому теплоізоляованому включенні. Для податлих включень домінують УКІН $K_{m,1}$, для жорстких - $K_{m,2}$.

Визначені граничні теплові потоки q у пластині в випадково розподіленими теплопровідними щілинами. Вважається, що руйнування розпочинається тоді, коли критеріальна функція (6.10) досягає граничного значення, тобто $(K_{1,1})^2 + (K_{2,1})^2 = \frac{\pi \kappa^2}{2\sigma_0}$.

Розв'язування задачі ґрунтується на аналітичному розв'язкові для теплопровідної тріщини в однорідному середовищі. Вважаючи випадковими незалежними величинами розмір та орієнтацію включень, нехтуючи їхньою взаємодією, використовуючи модель "найслабшої ланки", будують функцію розподілу ймовірності того чи іншого значення граничного теплового потоку в елементі пластини з однією щілиною. Коли пластинка містить n дефектів, то отримані вирази можна уточнити, зокрема для великих значень n доцільно скористатися співвідношенням Вейбулла.

У висновках сформульовані основні результати, що впливають із аналізу проведених досліджень.

Додатки містить перелік вжитих у роботі скорочень, показники рисунків і таблиць.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ І ВИСНОВКИ

I. Створені засади теорії тонких неоднорідностей у термопружних ізотропних та анізотропних кусково-однорідних середовищах.

II. Розроблені методики використання формули Сомільяно, апарату теорії функцій комплексної змінної (ТФКЗ) та інтегральних перетворень для розв'язування задач цього класу.

III. Показана ефективність застосування цієї теорії до

визначення полів температури, напружень і переміщень при дії потоку тепла, однорідного поля напружень на нескінченності (ОПНН), джерел тепла, сил, моментів, гвинтової та крайової дислокації, температурного, силового та дислокаційного диполів; для оцінки міцності матеріалів і конструкцій; обчислення ефективних характеристик стрічкових композитів і у теорії дислокацій.

IV. Розв'язані нові конкретні задачі, створене програмне забезпечення для комп'ютерів, проведені розрахунки, проаналізовані виявлені важливі закономірності та нові механічні ефекти.

У рамках цього:

1. Набула подальшого розвитку теорія і практика розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь (СІР): а) доведенням збіжності процесу та оцінкою точності розв'язку обґрунтована можливість застосування до розв'язування характеристичної частини СІР з ядром Коші розкладу у ряд Фур'є за поліномами Якобі з виділеною особливістю розв'язку; б) доведені стійкість та збіжність схеми методу ортогональних многочленів (МОН) у розв'язуванні СІР другого і першого роду; в) побудована методика застосування МОН до СІР з сингулярними ядрами Коші та Гільберта і ядрами Фредгольма типу інтегралів Фур'є; г) доведена збіжність методу колокацій (МК) розв'язування СІР з особливостями Коші і логарифмічною; опрацьована методика його застосування до розв'язування ССІР першого роду та їхніх лінійно-, циклічно- та подвійноперіодичного аналогів; д) показана ефективність екстраполяції за Річардсоном першого та вищих порядків у розв'язуванні СІР методом колокацій.

2. Розроблений метод функцій стрибка (МФС), придатний для розв'язування задач теорії пружності, теплопровідності, термопружності, однорідних та кусково однорідних, ізотропних та анізотропних середовищ з тонкими включеннями. Подана його механічна інтерпретація.

3. Побудовані двочленні асимптотичні подання потоків тепла, температури, напружень і переміщень в околі кінців включення на межі поділу матеріалів та однорідному середовищі. Введені коефіцієнти інтенсивності теплових потоків (КІТП) та узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (УКІН).

4. З використанням формули Сомільяно розроблена методика побудови ССІР задачі для оболонкового включення.

5. Вироблена концепція математичної моделі включення та умов взаємодії (УВ) включення з навколишнім середовищем та побудовані

конкретні УВ, які дозволяють моделювати його присутність з різною точністю у випадках: температурної взаємодії з урахуванням виділення тепла включенням і тепловіддачі з бічних поверхонь; поздовжнього зсуву, плоскої пружності і термопружності з урахуванням анізотропії, викривленості, жорсткої складової повороту включення.

6. Для визначення значень температури, теплових потоків, напружень та відносних переміщень на торцях включень запропоновані а) апіорні вирази, які гарантують точні результати у граничних випадках; б) заснована на МФС загальна методика.

7. З використанням розв'язку задачі Рімана-Гільберта або інтегрального перетворення Фур'є знайдені інтегральні подання температури та теплових потоків у двовимірних задачах теплопровідності для кусково-однорідної площини зі співвісними включеннями з урахуванням і без урахування тепловіддачі через бічні поверхні. Це дозволило побудувати ССІР для визначення функцій стрибка та розв'язати низку конкретних задач з урахуванням дії потоку тепла, теплових джерел та диполів, впливу теплофізичних параметрів матриці і включення, його товщини та профілю.

8. Методами ТФКЗ досліджена пружна рівновага тонких включень на межі поділу матеріалів двох ізотропних чи анізотропних середовищ в умовах антиплоскої та плоскої задач. Отримані розв'язки узагальнені на довільну систему плоских включень в однорідному безмежному просторі та півпросторі і на випадок викривлених поверхонь неоднорідностей. Стосовно цих двох випадків:

- побудовані ССІР для тонких пружних дефектів, з яких у граничних випадках випливають часткові випадки для міжфазної щільності ($G_B, E_B \rightarrow 0$) та абсолютно жорсткої плівки (АЖП) ($G_B, E_B \rightarrow \infty$) чи абсолютно жорсткого включення (АЖВ), що мають аналітичний розв'язок для всіх видів силового і дислокаційного навантаження; УКІН $K_{1,1}$ відповідають класичним КІН K_I теорії тріщин;

- методом інтегральних перетворень Фур'є досліджені задачі про включення у шаруватих середовищах;

- для одного тонкого включення еліптичного профілю побудований замкнений розв'язок задачі;

- для такого включення в ОПНН точні й обчислені за МФС значення σ_{yz} (антиплоска) та σ_{yy} (плоска задача) уздовж його межі є сталими. У антиплоскій задачі стрибок переміщень на берегах АЖВ нульовий (так само як стала температура на межі з АТПВ) для довільного профілю включення. Це засвідчує високу адекватність УВ та МФС;

-застосування МСЕ до розв'язування плоскої задачі про тонке включення та обчислення за УКІН коефіцієнтів концентрації напружень засвідчили можливість використання сингулярних розв'язків для характеристики механічних полів біля тонких дефектів;

-дослідження різних варіантів умов взаємодії (для антиплоскої задачі - моделей основної та плівкової, для плоскої - основної, балкової, гнучкого а також вільного незакріпленого включення) та способів вибору апріорних виразів для визначення торцевих сталей дозволило вказати найраціональніші;

-досліджена сила, що діє на гвинтову та крайову дислокацію (СДД) в ізотропному тілі біля тріщини, АЖП та пружного включення скінченної на півнескінченної довжини і на гвинтову - біля аналогічних дефектів у анізотропному середовищі;

9. Стосовно поздовжнього зсуву тіл з включеннями додатково:

-досліджені умови моделювання в теорії пружності анізотропних матеріалів ОПНН рядами віддалених від концентратора зосереджених сил;

-показана можливість використання розв'язків МФС до визначення ефективних сталей неоднорідного середовища зі стрічковими включеннями виходячи з розв'язку для поодинокого включення або з подвійноперіодичного розв'язку задачі;

-досліджена емісія гвинтових дислокацій з поверхні стрічкового включення;

-нелінійна задача для неогуківського матеріалу з тонкою стрічкою зведена до аналогічної лінійної задачі для ізотропного матеріалу; лінеаризовані рівняння нелінійної задачі - до відповідних співвідношень для лінійного анізотропного матеріалу;

-побудовані ймовірнісні характеристики граничного навантаження для ізотропного середовища з рідким заповненням тонкими включеннями профілю близького до еліптичного, коли їх ширина і орієнтація є випадковими величинами;

10. Стосовно плоскої задачі тіл з неоднорідностями додатково:

-досліджена некоренева особливість напружень біля вістря АЖВ, що наближається перпендикулярно до межі поділу матеріалів.

-вивчена поведінка рідкого включення;

-побудована ССІР для тонких пружних включень уздовж фрагментів кола, яке поділяє два матеріали;

-поєднанням методів інтегральних перетворень та ТФКЗ розв'язана задача про тріщини на лінії злуки омуг, підкріплених

півплощинами. Числові результати, отримані у випадку пружної та геометричної симетрії задачі для одної чи періодичної системи тріщин при дії ОПНН та зосереджених сил всередині смуг і півплощин.

-на основі критеріальної функції, зв'язаної з границею інтенсивності об'ємної деформації, досліджений критерій зародження руйнування біля вістря тонкого включення, коли локальне руйнування пов'язується з тріщиноутворенням біля прошарку. При розтягу найнебезпечніша орієнтація АЖВ - уздовж напрямку дії зусиль. Побудовані ймовірнісні характеристики граничного навантаження для ізотропного середовища з рідким заповненням тонкими включеннями профілю близького до еліптичного, коли їх довжина і орієнтація є випадковими величинами.

11. Запропонована методика розв'язування плоскої задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з міжфазними включеннями при плоскому температурному полі: побудовані ССІР та досліджені міжфазні АЖВ, АЖП, щілина; вивчена абсолютна теплопровідність і теплоізоляція дефектів, концентрація напружень біля тепlopасивного включення. Аналогічна задача в умовах узагальненого плоского температурного поля зведена до попередньої: для неї теж отримані ССІР та досліджені випадки АЖВ, щілини і бездефектної матриці.

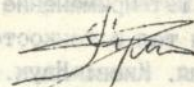
12. Визначені граничні теплові потоки у пластині з випадково розподіленими теплопровідними щілинами.

РОБОТИ, В ЯКИХ ОПУБЛІКОВАНІ ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Сулим Г.Т., Грилицкий Д.В. Напряженное состояние кусочно-однородной плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины // Прикл. механика. 1972. Т.8, № 11. С. 58-65.
2. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями // Прикл. матем. и механика. 1975. Т.39, № 3. С. 520-529.
3. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Упругие напряжения в плоскости с тонкостенным включением // Мат. методы и физ.-мех. поля. Киев: Наук. думка, 1975. Вып.1. С. 41-48.
4. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Периодическая задача для кусочно-однородной плоскости с тонкостенными включениями // Прикл. механика. 1975. Т.11, № 1. С. 74-81.
5. Сулим Г.Т., Грилицкий Д.В. Интегральные уравнения задачи о напряженном состоянии кусочно-однородной плоскости с трещинами //

- Физ.-хим. механика материалов. 1975. Т.11, № 5. С. 52-58.
6. Сулим Г.Т., Грилицкий Д.В. Решение сингулярных интегральных уравнений плоской задачи об упругом равновесии составных тел с трещинами // Физ.-хим. механика материалов. 1976. Т.12, № 2. С. 103-108.
7. Грилицкий Д.В., Евтушенко А.А., Сулим Г.Т. Распределение напряжений в полосе с упругим тонким включением // Прикл. матем. и механика. 1979. Т.43, № 3. С. 542-549.
8. Сулим Г.Т. Термопружні умови взаємодії середовища з тонкостінним включенням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1979. Вип.15. С. 85-92.
9. Сулим Г.Т. Влияние формы тонкого включения на распределение температуры в кусочно-однородной плоскости // Инженерно-физический журнал. 1979. Т.37, № 6. С. 1124-1130.
10. Грилицкий Д.В., Евтушенко А.А., Сулим Г.Т. Полуплоскость с произвольно-ориентированным линейным упругим включением // Изв. АН АрмССР. Механика. 1980. Т.33, № 1. С. 12-20.
11. Сулим Г.Т Система лінійних включень в ізотропному середовищі її Доп. АН УРСР, Сер.А. 1980. № 7. С. 62-65.
12. Сулим Г.Т. Антиплоская задача для системы линейных включений в изотропной среде // Прикл. матем. и механика. 1981. Т.45, № 2. С. 308-318.
13. Сулим Г.Т. Влияние формы тонкостенного включения на концентрацию напряжений в пластине // Физ.-хим. механика материалов. 1981. Т.17, № 3. С. 64-68.
14. Сулим Г.Т. Концентрация напряжений возле тонкостенных линейных включений // Прикл. механика. 1981. Т.17, № 11. С. 82-89.
15. Сулим Г.Т. Упругое равновесие полуплоскости с системой линейных включений // Прикл. механика. 1983. Т.19, № 2. С. 96-100.
16. Сулим Г.Т. Применение формулы Соммильяна в задачах теории упругости для тел с тонкостенными включениями // Мат. методы и физ.-мех. поля. Киев: Наук. думка, 1983. Вып.18. С. 48-51.
17. Сулим Г.Т. Взаимодействие дислокаций с тонкостенными прослойками в изотропной среде // Матер. I Всесоюз. конф. "Механика неоднородных структур" (г.Львов, сент. 1983 г.). Киев: Наук. думка, 1986. С. 249 - 254.
18. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Розвиток теорії тонкостінних включень у Львівському державному університеті // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1987. Вип.27. С. 3-9.

19. Попина С.Ю., Сулим Г.Т. Предельная нагрузка для хрупкого тела с тонкостенным упругим включением // Физ.-хим. механика материалов. 1987. Т.23, № 2. С. 115-118.
20. Сулим Г.Т. Продольный сдвиг анизотропной среды с ленточными включениями. Львов, 1987. 47 с. - Ред. журн. "Физ.-хим. механика материалов". Деп. в ВИНТИ 15 янв. 1987 г., № 329-В87.
21. Павлычко В.М., Сулим Г.Т. Плоская задача для линейных включений на границе раздела анизотропных материалов. Львов, 1987. 11 с. - Ред. журн. "Физ.-хим. механика материалов". Деп. в ВИНТИ 15 янв. 1987 г., № 330-В87.
22. Сулим Г.Т., Писковуб И.З. Распределение градиентов температуры в окрестности тонкого межфазного теплоактивного включения. Минск, 1986. 17 с. - Ред. журн. "Инженерно-Физический журнал". Деп. в ВИНТИ 12 мая 1987 г., № 3396-В87 Деп.
23. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Механіка крихкого руйнування. К.: УМК ВО, 1989. 95 с.
24. Божидарник В.В., Писковуб И.З., Попина С.Ю., Сулим Г.Т. Граничні теплові потоки в пластинах з стохастичними теплопровідними тріщинами // Вісн. Львів. політехн. ін-ту, 1991. С. 9-15.
25. Sulym G.T. Jump function method in fracture mechanics // Fracture mechanics: successes and problems. Collection of Abstracts. Part.1. (ISF-8, Kiev, 8-14.06.1993). Lviv, 1993. P. 100-101.
26. Сулим Г.Т. Концентрация напряжений и сила, действующая на дислокацию в окрестности тонкого упругого включения // Zeszyty Naukowe Politechniki Swietokrzyskiej. Mechanika. 1995. T. 57. S. 205 - 212.
27. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пружності. Львів: Світ, 1994. 560 с.



Abstract. Sulym G.T. The fundamentals of the theory of thermoelastic equilibrium for media with thin inhomogeneities.

The thesis presented for a Doctor's degree (physics and mathematics); speciality: 01.02.04 - mechanics of deformable bodies, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, L'viv, 1995.

The fundamentals of the theory for determining thermoelastic equilibrium of the isotropic and anisotropic piece-homogeneous media with thin inhomogeneities. Some tools of using Somigliano's formulae, complex functions technique and integral transformations are worked out for solutions to the problems above. Two-dimensional problems of elasticity theory, heat conductivity and thermoelasticity are solved for media with thin inclusions.

Аннотация. Сулим Г.Т. Основы математической теории термоупругого равновесия сред с тонкими неоднородностями.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 - механика деформируемого твердого тела. Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С.Подстригача НАН Украины, Львов, 1995.

Созданы основы теории определения термоупругого равновесия изотропных и анизотропных кусочно-однородных сред с тонкими неоднородностями. Разработаны методики использования формулы Соммильяно, аппарата теории функций комплексной переменной и интегральных преобразований для решения задач этого класса. Решены двумерные задачи теории упругости, теплопроводности и термоупругости для сред с тонкими включениями.

Ключові слова: тонке включення, дислокація, анізотропія, теорія, композиційний матеріал, тріщина, міцність, теплопровідність, термопружність, сингулярні інтегральні рівняння.

452618

AB 33.617
AB 33.617

Друк НВФ "Українські технології", тел./факс (0322) 52-03-61.

Тираж 100.