НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ДУДКІН Микола Євгенович

Комутативні властивості сингулярно збурених операторів

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

КИЇВ — 1995

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Інституті математики НАН України

Науковий керівник:

професор, доктор фізико-математичних наук

КОШМАНЕНКО В. Д.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук

СКРИПНИК М. Л.,

кандидат фізико-математичних наук

КАШПІРОВСЬКИЙ О. І.

Провідна організація:

Інститут теоретичної фізики НАН України
м. Київ

Захист відбудеться 26 грудня 1995 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 01.66.01 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601 Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту

Автореферат розіслано 1995 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
доктор фізико-математичних наук ГУСАК Д. В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

<u>**Актуальність теми.**</u> Дана робота належить до одного з актуальних напрямків сучасного функціонального аналізу — теорії збурень. Перші результати в цій області були одержані на початку нашого століття такими видатними дослідниками як Релей Л., Шредінгер Е. Трохи пізніше в цій області працювали Рел-ліх Ф., Фрідріхс К.О. В даний час теорія збурень є важливою складовою частиною квантової фізики. Значний внесок в теорію збурень зробили Крейн М.Г., Хілле Е., Філіпс Р.С. Протягом шістдесятих та сімдесятих років багато результатів в теорії збурень одержано в рамках квантової теорії поля. Зокрема в теорії збурень працювали такі математики як Като Т., Рід М., Саймон Б., Фаріс В., Альбеверіо С.

Дана робота відноситься до області, що носить назву теорії сингулярних збурень. У широкому сенсі під цим розуміється деяка теорія, що вивчає потенціали, які неможливо розглядати як оператори. Найбільш відомим прикладом такої ситуації є оператор Лапласа $-\Delta$ із потенціалом, заданим набором δ-функцій Дірака, зосереджених в точках y_j множини Y:

$$-\Delta_{\alpha,Y} := -\Delta + \sum_j \alpha_j \delta_{y_j},$$

де α_j — коефіцієнти зв'язку. Такого сорту збурення називаються сингулярними (Точне означення сингулярно збуреного оператора наведено нижче.) Спочатку цей розділ теорії збурень розвивався в рамках теорії апроксимації, тобто будувались збіжні в певному сенсі послідовності самоспряжених операторів, які дозволяли після виконання процедури перенормування враховувати сингулярні збурення.

Вихідною точкою сучасного підходу теорії сингулярних збурень стали роботи шістдесятих років (Березіна Ф.А., Фадеєва Л.Д., Мінлоса Р.А.), які грунтуються на методі самоспряжених розширень симетричних операторів. Після цих робіт з'явилась велика кількість робіт, присвячених цій тематиці. До числа математиків, що займалися цими питаннями, належать також Адамян В.М., Демков Ю.Н., Гестезі Ф., Загребнов В.А., Карвовський В., Карпешина Ю.Е., Кочубей А.Н., Куперин Ю.А., Найдхард Х., Павлов Б.С., Пастур Л.А., Хьоег-Крон Р., Хольден Х., Черемшанцев С.Е., Чуєшов І. та багато інших. Побудова сингулярно збурених операторів за допомогою методу самоспряжених розширень симетричних операторів в найзагальнішому вигляді розвинена і детально досліджена в роботах Кошманенка В.Д.

Мета роботи. Основною метою роботи є знаходження умов комутативності сингулярно збуреного оператора із заданим оператором в припущенні, що останній вже комутує з незбуреним оператором. При цьому можливі різні випадки, а саме, коли заданий оператор є унітарним, самоспряженим (обмеженим або необмеженим), або, навіть, коли він також сингулярно збурюється. На основі дослідження умов комутативності потрібно параметризувати множину усіх сингулярно збурених операторів, які припускають перестановку з фіксованим заданим оператором. Природно цю параметризацію задавати в термінах сингулярних збурень. Результати абстрактних досліджень слід використати для з'ясування умов, коли оператор Лапласа з сингулярним δ-потенціалом комутує з оператором симетризації в просторі функцій від декількох змінних, або із зображеннями у цьому просторі ізометричного перетворення площини.

Методика досліджень. У роботі використовуються методи теорії лінійних операторів гільбертового простору, теорії узагальнених функцій, теорії самоспряжених розширень симетричних операторів та інші методи функціонального аналізу.

Наукова новизна роботи. У роботі отримано:

- необхідні й достатні умови S-інваріантності щільної в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ підмножини $\mathfrak{D}$, яка є замкненим підпростором в деякому позитивному просторі $\mathcal{H}_+$, за умови $\dim(\mathcal{H}_+ \ominus \mathfrak{D}) \neq 0$;
- необхідні й достатні умови комутування сингулярно збуреного оператора $\tilde{A}$ з деяким унітарним оператором U за умови, що U і незбурений оператор комутують;
- необхідні й достатні умови комутування сингулярно збуреного оператора $\tilde{A}$ з деяким самоспряженим оператором S в припущенні, що S і незбурений оператор A комутують;
- необхідні й достатні умови комутування двох сингулярно збурених операторів $\tilde{A}$ і $\tilde{S}$ в припущенні, що до збурення A і S комутують і дефектні підпростори симетричних операторів $\dot{A}$ і $\dot{S}$, спільних для пар A і $\tilde{A}$ та S і $\tilde{S}$, є одновимірними;
- параметризація множини сингулярно збурених операторів $\{\tilde{A}\}$, комутуючих з фіксованим самоспряженим оператором S, в термінах цілком узагальненого спектра оператора S;
- критерій S-інваріантності і симетричності звужень необмеженого самоспряженого оператора A в просторі $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$;
- необхідні й достатні умови комутування сингулярно збуреного δ-потенціалами оператора Лапласа з оператором симетризації у просторі $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$, $n = 2, 3$;

- необхідні й достатні умови комутування сингулярно збуреного δ-потенціалами оператора Лапласа з зображеннями у просторі $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$ довільного ізометричного перетворення $\mathbb{R}^n$, $n \leq 3$;
- необхідні й достатні умови щільності лінійної підмножини гільбертового простору мовою носія цієї підмножини відносно спектральної міри самоспряженого оператора;
- необхідні й достатні умови замикальності білінійної форми в $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$ мовою ємності множини;

Практична цінність. Одержані результати можна використати для подальшого розвитку теорії сингулярно збурених операторів, зокрема у квантовій теорії поля.

Апробація роботи. Основні результати дисертації доповідались на:

— семінарах "*Оператори математичної фізики*" відділу функціонального аналізу Інституту математики НАН України (керівник семінару — академік Ю. М. Березанський);

— міжнародній математичній школі "*Алґебраїчні і геометричні методи в математичній фізиці*" (Україна, Республіка Крим, Кацивелі, вересень 1993 р.);

— міжнародній математичній школі (КРОМШ-V) "*Кримська осіння школа-симпозіум по спектральних і еволюційних задачах* (Україна, Республіка Крим, Ласпі, вересень 1994 р.);

Публікації. По темі дисертації опубліковано 5 робіт, список яких наведено нижче.

Структура та обсяг роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, списку деяких стандартних позначень та списку літератури, що містить 45 найменувань.

Кожний розділ починається параграфом, в якому містяться попередні відомості: означення та відомі твердження, необхідні для подальшого розгляду матеріалу. У кожному розділі міститься параграф з прикладами, що ілюструють доведені протягом розділу твердження. Другий розділ, за винятком останнього параграфа, утворює єдине ціле, і тому його можна розглядати незалежно від першого. Третій розділ, окрім нових означень і тверджень, містить підсумки двох попередніх у вигляді загальних тверджень.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність і важливість питань, що розглядаються в дисертації, проведено стислий огляд близьких за напрямком робіт, сформульована мета досліджень та їх новизна, викладено зміст за розділами.

Опишемо коротко зміст роботи. Нехай у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ задано необмежений самоспряжений оператор $A = A^*$ з областю визначення $\mathfrak{D}(A)$.

Утворимо за оператором A оснащення постору $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}_- \supseteq \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H} \supseteq \mathcal{H}_+, \tag{1}$$

де $\mathcal{H}_+ = \mathfrak{D}(A)$ зі скалярним добутком $(u, v)_+ = (Au, Av)$ і нормою $\|u\|_+ := \sqrt{(u,u)_+}$, $\forall u, v \in \mathfrak{D}(A)$, а $\mathcal{H}_-$ — поповнення $\mathcal{H}$ за нормою $\|\cdot\|_- := \|A^{-1}\cdot\|$. Позначимо $<\omega, \varphi>_{\mathcal{H}}$ спарення в оснащенні (1), $\omega \in \mathcal{H}_-, \varphi \in \mathcal{H}_+$. Скалярний добуток в $\mathcal{H}$ та спарення в оснащенні (1) пов'язані співвідношенням $<\omega, \varphi>_{\mathcal{H}} = (I_{0,-}\omega, I_{0,+}\varphi)$.

де $I_{0,-}$ ($I_{0,+}$) — канонічний ізометричний ізоморфізм простору $\mathcal{H}_-$ ($\mathcal{H}_+$ відповідно) у простір $\mathcal{H}$.

Розглянемо в $\mathcal{H}$ нормальний оператор S і припустимо, що існує інше оснащення простору:

$$\mathfrak{H}_- \supseteq \mathcal{H} \supseteq \mathfrak{H}_+ \supset D, \qquad (2)$$

де D — лінійна сепарабельна топологічна підмножина $\mathcal{H}$, яка щільно і неперервно вкладена в гільбертів простір $\mathfrak{H}_+$ так, що $D \subseteq \mathfrak{D}(S)$ і звуження S на $D : S \upharpoonright D$ діє неперервно з D в $\mathfrak{H}_+$, та вкладення $\mathfrak{H}_+$ в $\mathcal{H}$ є оператором Гільберта-Шмідта.

Оператор S, який має описані вище властивості в оснащенні (2), називається стандартно пов'язаним з оснащенням (2).

Ненульовий вектор $\omega_\lambda \in \mathfrak{H}_-$ називається узагальненим власним вектором оператора S з відповідним узагальненим власним значенням $\lambda \in \mathbb{C}$ в стандартно пов'язаному оснащенні (2), якщо

$$< \omega_\lambda, Sf >_{\mathfrak{H}} = \lambda < \omega_\lambda, f >_{\mathfrak{H}}, \quad \forall f \in D,$$

де $< \cdot, \cdot >_{\mathfrak{H}}$ позначення спарення в оснащенні (2). Узагальнений власний вектор визначається із точністю до сталого множника.

Сукупність $\vartheta(S)$ усіх узагальнених власних значень λ називається узагальненим спектром оператора S в оснащенні (2).

Означення 1 *[3]. Підмножина*

$$\dot{\vartheta}(S) := \{\lambda \in \vartheta(S) \mid \omega_\lambda \in \mathfrak{H}_- \setminus \mathcal{H}\}$$

називається цілком узагальненим спектром оператора S, пов'язаним з оснащенням (2).

Довільна множина $\mathfrak{D} \subset \mathcal{H}$ називається S-інваріантною, тобто інваріантною відносно дії оператора S, якщо $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}(S)$ і $S\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}$.

Означення 2 *[3]. Множина $F \in \mathfrak{H}_-$ називається узагальнено S-інваріантною, якщо виконується умова:*

$$\{\forall \varphi \in F, \exists \psi \in \mathfrak{H}_- \mid < \varphi, Sf >_{\mathfrak{H}} = < \psi, f >_{\mathfrak{H}},\ \forall f \in D \subset \mathfrak{H}_+\} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \psi \in F.$$

За додаткових умов поняття узагальненого власного вектора, узагальненого власного значення, узагальненого і цілком узагальненого спектра оператора S та S-інваріантності і узагальненої S інваріантності можна переформулювати в термінах оснащення типу (1). З цією метою введемо таке означення.

Означення 3 . *Довільна множина $\mathfrak{D} \subset \mathcal{H}$ називається частково S-інваріантною, якщо $S(\mathfrak{D}(S) \cap \mathfrak{D}) \subseteq \mathfrak{D}$.*

Припустимо, що простір $\mathcal{H}_+$ є частково S-інваріантним і перетин областей визначення операторів A і S є областю істотної самоспряженості оператора A, тобто:

$$S(\mathfrak{D}(S) \cap \mathcal{H}_+) \subseteq \mathcal{H}_+,\ \ \overline{\mathfrak{D}(S) \cap \mathcal{H}_+}^{(+)} = \mathcal{H}_+, \tag{3}$$

де риска із знаком $(+)$ позначає замикання за нормою $\mathcal{H}_+$.

Означення 4 . *За умов (3) ненульовий вектор $\omega_\lambda \in \mathcal{H}_-$ називається узагальненим власним вектором оператора S з відповідним узагальненим власним значенням $\lambda \in \mathbb{C}$, якщо:*

$$< \omega_\lambda, Sf >_{\mathcal{H}} = \lambda < \omega_\lambda, f >_{\mathcal{H}},\ \ \forall f \in \mathfrak{D}(S) \cap \mathcal{H}_+.$$

Узагальнений власний вектор визначається із точністю до сталого множника.

Означення 5 . *За умов (3) сукупність $\vartheta(S)$ узагальнених власних значень λ, породжених оснащенням (1), називається узагальненим спектром оператора S, пов'язаним з оснащенням (1).*

Означення 6 . *За умов (3) підмножина*

$$\mathring{\vartheta}(S) := \{\lambda \in \vartheta(S) \mid \omega_\lambda \mathring{\in} \mathcal{H}_- \setminus \mathcal{H}\}$$

називається цілком узагальненим спектром оператора S в оснащенні (1).

Означення 7 . *За умови (3) множина $F \in \mathcal{H}_-$ називається узагальнено S-інваріантною, якщо:*

$$\{\forall\varphi \in F, \exists\psi \in \mathcal{H}_- | <\varphi, Sf>_{\mathcal{H}} = <\psi, f>_{\mathcal{H}}, \ \forall f \in \mathfrak{D}(S) \cap \mathcal{H}_+\} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \psi \in F.$$

Окремий параграф у роботі (§1.3) присвячено ситуації, коли умови (3) замінені на простішу умову S-інваріантності простору $\mathcal{H}_+$. У цьому випадку оператор S обмежений в $\mathcal{H}_+$. Цей факт полегшує доведення тверджень, аналогічних до тих, які формулюються в загальному випадку. При цьому замість поняття часткової S-інваріантності використовується звичайна S-інваріантність.

Основний результат першого розділу міститься у двох твердженнях, наведених у §§1.2 і 1.4.

Теорема 1 *[3]. Нехай для нормального оператора S в $\mathcal{H}$ існують оснащення (1) і (2), такі що:*

(A.1) *простір $\mathcal{H}_+$ є S-інваріантним;*

(A.2) *$\mathfrak{H}_+ \supseteq \mathcal{H}_+$ в топологічному сенсі і оператор S діє неперервно з $\mathcal{H}_+$ в $\mathfrak{H}_+$;*

(A.3) *якщо для деякого вектора $\omega \in \mathcal{H}_-$ $\exists\lambda \in \mathbb{C}$, таке що $<\omega, Sf>_{\mathcal{H}} = \lambda <\omega, f>_{\mathcal{H}}, \quad \forall f \in D$, то $\omega \in \mathfrak{H}_-$.*

Тоді між зчисленними наборами узагальнених власних векторів $\{\omega_i\}_{i=1}^{k\leq\infty} \subset \mathfrak{H}_- \setminus \mathcal{H}$ оператора S в оснащенні (2) та

S-інваріантними, щільними в $\mathcal{H}$ і замкненими в $\mathcal{H}_+$, підмножинами $\mathfrak{D}$, такими що $\dim(\mathcal{H}_+ \ominus \mathfrak{D}) \neq 0$, існує взаємно однозначна відповідність, де множина $\mathfrak{D}$ визначається за правилом:

$$\mathfrak{D} := \{f \in D \mid \ <\omega_i, f>_{\mathcal{H}} = 0, \quad i = \overline{1, \infty}\}. \tag{4}$$

Теорема 2 . *Нехай для нормального оператора S в $\mathcal{H}$ існує оснащення (1), таке що:*

(C.1) *простір $\mathcal{H}_+$ є частково S-інваріантним;*

(C.2) *цілком узагальнений спектр $\tilde{\vartheta}(S)$ оператора S в оснащенні (1) не порожній;*

(C.3) $\forall G \subset \mathcal{H}_+ \setminus \mathcal{H}_{++} \Longrightarrow \overline{\mathfrak{D}(S) \cap G}^{(+)} = G;$

(C.4) *оператор S має в $\overline{\mathcal{H}_+ \setminus \mathcal{H}_{++}}^{(+)}$ повну систему власних векторів, де $\mathcal{H}_{++}$ — простір з нормою $\|A^2 \cdot\|$.*

Тоді між зчисленними наборами узагальнених власних векторів $\{\omega_i\}_{i=1}^{k \le \infty} \subset \mathcal{H}_- \setminus \mathcal{H}$ оператора S в оснащенні (1) та S-інваріантними, щільними в $\mathcal{H}$ і замкненими в $\mathcal{H}_+$, підмножинами $\mathfrak{D}$, такими що $\dim(\mathcal{H}_+ \ominus \mathfrak{D}) \neq 0$, існує взаємно однозначна відповідність, де множина $\mathfrak{D}$ визначається за правилом:

$$\mathfrak{D} := \{f \in \mathcal{H} \mid \ <\omega, f>_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall \omega \in F\}, \tag{5}$$

де $F :=$ з.л.о.$\{\omega_i\}_{i=1}^{k \le \infty}$ *в* $\mathcal{H}_-$.

Припустимо, що цілком узагальнений спектр $\tilde{\vartheta}(S)$ оператора S в оснащенні (1) (або (2)) простий, тоді теорему 1 (або 2) можна сформулювати мовою спектра.

Наслідок 1 . *За умов (A.1), (A.2) і (A.3) теореми 1 між зчисленними наборами узагальнених власних значень* $\Lambda \subset \tilde{\vartheta}(S)$ *оператора* S *в стандартно пов'язаному оснащенні (2) та* S*-інваріантними, щільними в* $\mathcal{H}$ *і замкненими в* $\mathcal{H}_+$*, підмножинами* $\mathfrak{D}$*, такими що* $\dim(\mathcal{H}_+ \ominus \mathfrak{D}) \neq 0$*, існує взаємно однозначна відповідність.*

Наслідок 2 . *За умов (C.1), (C.2), (C.3) і (C.4) теореми 2 між зчисленними наборами узагальнених власних значень* $\Lambda \subset \tilde{\vartheta}(S)$ *оператора* S *в стандартно пов'язаному оснащенні (1) та* S*-інваріантними, щільними в* $\mathcal{H}$ *і замкненими в* $\mathcal{H}_+$*, підмножинами* $\mathfrak{D}$*, такими що* $\dim(\mathcal{H}_+ \ominus \mathfrak{D}) \neq 0$*, існує взаємно однозначна відповідність.*

Теореми 1, 2 модифіковані на випадок, коли множина $\mathfrak{D}$ в (4) (відповідно (5)) побудована не за узагальненими власними векторами, а за узагальнено S-інваріантними множинами. У даному випадку множина $\mathfrak{D}$ може бути і не щільною в $\mathcal{H}$.

Другий розділ присвячений питанням комутативності.

У §2.1 наведено означення сингулярно збуреного оператора та означення пари комутуючих операторів, а також наведено побудову і опис сингулярно збурених операторів та їх зв'язок з білінійними формами.

Самоспряжений оператор $\tilde{A}$ називається сингулярно збуреним відносно оператора A, якщо лінійна множина

$$D := \{f \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(\tilde{A}) \mid \tilde{A}f = Af\}$$

щільна в $\mathcal{H}$ і звуження $\dot{A} := A \restriction D \equiv \tilde{A} \restriction D$ — симетричний оператор у просторі $\mathcal{H}$ з областю визначення $D \equiv \mathfrak{D}(\dot{A})$.

У §2.2 доведено допоміжне твердження, що будь-який підпростір $\mathfrak{N} \subset \mathcal{H} \setminus \mathfrak{D}(A)$ (де $\mathfrak{D}(A)$ — область визначення самоспряженого оператора) може бути дефектним підпростором симетричного звуження $\dot{A}$ оператора A з довільним $z \in r(A)$, тобто $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}_z$, де $r(A)$ — резольвентна множина оператоа A.

У §3.3 наведено деякі негативні результати, тобто випадки в яких комутативність взагалі не можлива. Зокрема показано, що на множині $\mathcal{A}_k(A)$, $k < \infty$, сингулярно збурених рангу k відносно A операторів немає жодної комутуючої пари (індексом k позначено розмірність дефектного підпростору, спільного з A і $\tilde{A} \in \mathcal{A}_k(A)$ симетричного оператора) [1].

У §3.4 наведено критерії комутативності операторів із $\mathcal{A}_k(A)$, $k \leq \infty$, з деяким унітарним оператором U мовою білінійних форм, якщо $[U, A] = 0$ [4, 5].

У §3.5 наведено критерій комутативності операторів з $\mathcal{A}_k(A)$, $k \leq \infty$, з деяким самоспряженим оператором S, якщо $[S, A] = 0$ [4, 5].

Маючи симетричний оператор $\dot{A}$ з дефектними підпросторами $\mathfrak{N}_z, \mathfrak{N}_{\bar{z}}$ та одне із самоспряжених розширень A симетричного оператора $\dot{A}$, всі інші самоспряжені розширення $\tilde{A}$ оператора $\dot{A}$ визначаються за формулою М.Г.Крейна :

$$(\tilde{A} - z)^{-1} f = (A - z)^{-1} f + \sum_{i,j=1}^{\infty} \lambda_{i,j}(z)(f, n_i)\bar{n}_j, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \qquad (6)$$

де $\forall z \in r(A) \cap r(\tilde{A})$, $\lambda_{i,j}(z) \in \mathbb{C}$, а $n_i, i = \overline{1, \infty}$. та $\bar{n}_j, j = \overline{1, \infty}$ — базиси у підпросторах $\mathfrak{N}_z$, та $\mathfrak{N}_{\bar{z}}$ відповідно. Позначимо $B_{\bar{z}}^{-1} := [\lambda_{i,j}(z)]_{i,j=1}^{\infty}$ — самоспряжений оператор у просторі $\mathfrak{N}_{\bar{z}}$.

Теорема 3 . *Нехай оператори A і S комутують в сенсі резольвент. Для того щоб сингулярно збурений рангу k відносно A оператор $\tilde{A} \in \mathcal{A}_k(A)$ також комутував з S в сенсі резольвент, необхідно й достатньо, щоб для деяких $z_0 \in$*

$r(A)$ і $z' \in r(S)$:

$$(S - z')^{-1}\mathfrak{N}_{z_0} \subseteq \mathfrak{N}_{z_0}$$

$$[B_{\bar{z}_0}^{-1}, (S - z')^{-1}] = 0 \ \ \textit{в} \ \ \mathfrak{N}_{z_0},$$

де $r(\cdot)$ — резольвентна множина відповідного оператора; $\mathfrak{N}_{z_0}$ — дефектний підпростір спільного з A і $\tilde{A}$ симетричного оператора.

У §§2.6, 2.7, 2.8 теорема 3 застосовується для перевірки комутативності сингулярно збуреного δ-функціями оператора Лапласа $-\Delta_{\alpha,Y}$ з зображеннями в $L_2(\mathbb{R}^q, d\mathrm{x})$ ізометричних перетворень простору $\mathbb{R}^q$, $q \leq 3$.

Твердження 1 . *Нехай у просторі $L_2(\mathbb{R}^q, d\mathrm{x})$, $q \leq 3$ оператор Лапласа $-\Delta$ комутує з зображеннями W_q в $L_2(\mathbb{R}^q, d\mathrm{x})$ ізометричного перетворення g в $\mathbb{R}^q$. Сингулярно збурений δ-функціями оператор Лапласа $-\Delta_{\alpha,Y}$ на множині $Y = \{\mathrm{y}_j\}_{j=1}^{k<\infty}$, $\mathrm{y}_j \in \mathbb{R}^q$, $\alpha_j \in \mathbb{R}^1$, $q \leq 3$, комутує з оператором W_q тоді й тільки тоді, коли:*

(a.3) *множина Y інваріантна відносоо дії g,*

(b.3) *для точок, що задовольняють співвідношення $\mathrm{g}y_l = y_j$, відповідні коефіцієнти рівні між собою $\alpha_l = \alpha_j$.*

Два наступні твердження є наслідками твердження 1. У роботі вони доведені окремо.

Твердження 2 . *Сингулярно збурений оператор Лапласа $-\Delta_{\alpha,Y}$ на множині $Y = \{\mathrm{y}_j\}_{j=1}^{k<\infty}$, $\mathrm{y}_j \in \mathbb{R}^2$, у просторі $\mathcal{H} := L_2(\mathbb{R}^2, d\mathrm{x})$ комутує з оператором симетризації P_s тоді й тільки тоді, коли:*

(a.1) *множина Y симетрична відносно осі $x_1 = x_2$;*

(b.1) ***коефіцієнти α_j, що відповідають парам симетричних точок з Y, рівні між собою.***

І аналогічне твердження має місце у випадку $\mathcal{H} := L_2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{x})$.

Твердження 3 . *Сингулярно збурений оператор Лапласа $-\Delta_{\alpha,Y}$ на множині $Y = \{\mathbf{y}_j\}_{j=1}^{k\leq\infty}$, $\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^3$, у просторі $\mathcal{H} := L_2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{x})$ комутує з оператором симетризації P_s тоді і тільки тоді, коли:*

(a.2) ***множина Y симетрична відносно кожної з трьох площин $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$, $x_3 = x_1$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;***

(b.2) ***коефіцієнти α_j, що відповідають симетричним точкам з Y, рівні між собою (симетричні точки утворюють групи по 1,3 або 6 у групі).***

У §2.9 наведено критерій комутативності двох сингулярно збурених рангу $k = 1$ операторів $\tilde{A}_1$ і $\tilde{A}_2$, який сформульовано у двох теоремах [4, 5].

Нехай у просторі $\mathcal{H}$ дана пара $\dot{A}_i$, $i = 1, 2$, симетричних операторів з індексами дефекту (1,1). Розглянемо для кожного $\dot{A}_i$ пару різних взаємно простих самоспряжених розширень A_i, $\tilde{A}_i$. Згідно з теорією розширень резольвенти операторів A_i і $\tilde{A}_i$ пов'язані співвідношенням М.Крейна (6):

$$(\tilde{A}_i - z_i)^{-1} f = (A_i - z_i)^{-1} f + \theta(z_i)(f, n_{z_i}) n_{\bar{z}_i}, \qquad (7)$$

$$\forall f \in \mathcal{H}, \ \forall z_i \in r(A_i) \cap r(\tilde{A}_i), \quad i = 1, 2,$$

де $n_{z_i} \in \mathfrak{N}_{z_i} := \ker(\dot{A}_i - z_i)^*$, $\|n_{z_i}\| = 1$, а $\theta(z_i) \in \mathbb{C}$ — параметр, що розрізняє A_i і $\tilde{A}_i$, $i = 1, 2$.

Припустимо, що для деяких z_1 і z_2, $\mathfrak{N}_{z_1} \cap \mathfrak{N}_{z_2} \neq 0$ і $\mathfrak{N}_{\bar{z}_1} \cap \mathfrak{N}_{\bar{z}_2} \neq 0$. Тоді можна вибрати:

$$n := n_{z_1} = n_{z_2} \quad \text{і} \quad \bar{n} := n_{\bar{z}_1} = n_{\bar{z}_2}.$$

Має місце така теорема.

Теорема 4 . *Нехай оператори A_1 і A_2 комутують у сильному резольвентному сенсі. Тоді оператори $\tilde{A}_1$ і $\tilde{A}_2$ також комутують в тому самому сенсі тоді й тільки тоді, коли для деяких $z_i \in r(A_i)$, таких що $n := n_{z_1} = n_{z_2}$ і $\bar{n} := n_{\bar{z}_1} = n_{\bar{z}_2}$, виконується співвідношення:*

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{Im(z_2)}{Im(z_1)},$$

де $\theta_i \equiv \theta(z_i)$ — параметри розширень $\tilde{A}_i$ $i = 1, 2$ (див.(7)).

Нехай далі $Im(z_i) = 0$. Тоді $n_{z_i} = n_{\bar{z}_i} \equiv n_i$, $i = 1, 2$. Припустимо додатково, що n_1 і n_2 — лінійно незалежні. Зафіксуємо довільну пару таких векторів для дійсних $z_i \in r(A_1) \cap r(A_2)$, припускаючи, що $r(A_1) \cap r(A_2) \cap \mathbf{R}^1 \neq \emptyset$.

Теорема 5 . *Нехай оператори A_1 і A_2 комутують в сильному резольвентному сенсі. Тоді $\tilde{A}_1$ і $\tilde{A}_2$ також комутують у сенсі резольвент тоді й тільки тоді, коли для деяких дійсних $z_i \in r(A_i)$ і деяких чисел $\alpha_{11}, \alpha_{22} \in \mathbf{R}$ і $\alpha_{12}, \alpha_{21} \in \mathbf{C}$ виконуються співвідношення:*

$$\begin{cases} (A_2 - z_2)^{-1} n_1 = \alpha_{11} n_1 + \alpha_{12} n_2 \\ (A_1 - z_1)^{-1} n_2 = \alpha_{21} n_1 + \alpha_{22} n_2 \end{cases}$$

$$\frac{\alpha_{21}}{\theta_1} + \frac{\bar{\alpha}_{12}}{\theta_2} + \Big(n_2, n_1\Big) = 0,$$

де $\theta_i \equiv \theta(z_i)$ — параметри розширень $\tilde{A}_i$ $i = 1, 2$ (див.(7)), а n_1 і n_2 — дефектні вектори спільних з A_i та $\tilde{A}_i$, $i = 1, 2$ симетричних операторів; n_1 і n_2 лінійно незалежні.

У §2.10 наведено приклади, які ілюструють теореми 4 та 5. Зокрема запропоновано метод врахування сингулярних збурень нормального оператора.

В останньому параграфі другого розділу наведено параметризацію множини $\mathcal{A}_k^S(A)$ сингулярно збурених операторів, комутуючих з деяким самоспряженим оператором S. Параметризацію встановлено за допомогою критерію (Теорема 3) та основних тверджень першого розділу 1 і 2.

Наступні дві теореми складають основні твердження другого розділу.

Теорема 6 . *Нехай у просторі $\mathcal{H}$ необмежений самоспряжений оператор A комутує у сенсі резольвент з обмеженим самоспряженим оператором S. Припустимо, що існують оснащення:*

$$\mathfrak{H}_- \supseteq \mathcal{H} \supseteq \mathfrak{H}_+ \supset D, \tag{8}$$

стандартно пов'язане з оператором S (див. (2)), та

$$\mathcal{H}_- \supseteq \mathcal{H} \supseteq \mathcal{H}_+,$$

побудоване за оператором A (див. (1)), які задовольняють наступні умови:

(A.1) *простір $\mathcal{H}_+$ є S-інваріантним;*

(A.2) *$\mathfrak{H}_+ \supseteq \mathcal{H}_+$ в топологічному сенсі і оператор S діє неперервно із $\mathcal{H}_+$ в $\mathfrak{H}_+$;*

(A.3) *якщо для деякого вектора $\omega \in \mathcal{H}_-$, $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, таке що $< \omega, Sf >_{\mathcal{H}} = \lambda < \omega, f >_{\mathcal{H}}$, $\forall f \in D$, то $\omega \in \mathfrak{H}_-$.*

Тоді множина $\mathcal{A}_k^S(A)$, $k \leq \infty$, параметризується множиною пар $\{\mathfrak{N}, B\}$, де $\mathfrak{N}$ замкнена лінійна оболонка образів в $\mathcal{H}$ узагальнених власних векторів ω_{λ_i}, $i = \overline{1, \infty}$, оператора S в оснащенні (8): $\mathfrak{N} :=$ з.л.о. $\{I_{0,-}\omega_{\lambda_i}\}$; B — самоспряжений оператор, що діє в просторі $\mathfrak{N}$, і комутує з оператором S.

Теорема 7 . *Нехай у просторі $\mathcal{H}$ задано пару необмежених комутуючих в сенсі резольвент самоспряжених операторів A і S. Припустимо, що існує оснащення*

$$\mathcal{H}_- \supseteq \mathcal{H} \supseteq \mathcal{H}_+, \tag{9}$$

побудоване за оператором A (див. (1)), що задовольняє наступні умови:

(C.1) *простір $\mathcal{H}_+$ є частково S-інваріантним;*

(C.2) *цілком узагальнений спектр $\vartheta(S)$ оператора S, пов'язаний з оснащенням (9) не порожній;*

(C.3) $\forall G \subset \mathcal{H}_+ \setminus \mathcal{H}_{++} \Longrightarrow \overline{\mathfrak{D}(S) \cap G}^{(+)} = G$;

(C.4) *оператор S має в $\overline{\mathcal{H}_+ \setminus \mathcal{H}_{++}}^{(+)}$ повну систему власних векторів, де $\mathcal{H}_{++}$ — простір з нормою $\|A^2 \cdot\|$.*

Тоді множина $\mathcal{A}_k^S(A)$, $k \leq \infty$, параметризується множиною пар $\{\mathfrak{N}, B\}$, де $\mathfrak{N}$ замкнена лінійна оболонка образів в $\mathcal{H}$ узагальнених власних векторів ω_{λ_i}, $i = \overline{1, \infty}$, оператора S, в оснащенні (9): $\mathfrak{N} :=$ з.л.о. $\{I_{0,-}\omega_{\lambda_i}\}$; B — самоспряжений оператор, що діє в просторі $\mathfrak{N}$ і комутує з оператором S.

У третьому розділі сформульовано і доведено критерії S-інваріантності і симетричності звужень самоспряжених операторів. З цією метою використовується поняття ємності та вводиться поняття носія вектора та підмножини векторів сепарабельного гільбертового простору.

Використовуючи стандартно пов'язане оснащення (2), оператор S можна розкласти за узагальненими власними векторами, тобто існує операторнозначна функція $P(\lambda)$, слабо вимірна і визначена майже для кожного λ із $\vartheta(S)$ (в сенсі спектральної міри ρ).

значення якої — невід'ємні оператори з $\mathfrak{H}_+$ в $\mathfrak{H}_-$ і $|||P(\lambda)||| \leq Tr(P(\lambda)) = 1$, що дає таке зображення оператора S:

$$Su = \left(\int\limits_{\vartheta(S)} \lambda P(\lambda) d\rho(\lambda) \right) u, \quad \forall u \in \mathfrak{D}(S) \cap \mathfrak{H}_+,$$

де $|||\cdot|||$ позначає норму Гільберта - Шмідта, а $Tr(\cdot)$ - слід відповідного оператора. Область значень $\mathfrak{R}(P(\lambda)) \subseteq \mathfrak{H}_-$ складається з узагальнених власних векторів ω_λ, яким відповідають узагальнені власні значення $\lambda \in \vartheta(S)$ оператора S. Зазначимо, що supp $(\rho) = \vartheta(S)$. Доведення цих фактів можна знайти, наприклад, в роботах Ю.М. Березанського. Припустимо, що узагальнений спектр $\vartheta(S)$ оператора S простий.

Відповідне до оператора S, пов'язаного із оснащенням (2), *узагальнене перетворення Фур'є* має вигляд

$$\mathfrak{H}_+ \ni f \longrightarrow \hat{f}(\lambda) = < \omega_\lambda, f >_{\mathfrak{H}}, \ \lambda \in \vartheta(S).$$

Використовуючи це узагальнене перетворення Фур'є, можна записати *рівність Парсеваля*:

$$(f,g) = \int\limits_{\vartheta(S)} \hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda) d\rho(\lambda), \quad \forall f,g \in \mathfrak{H}_+. \tag{10}$$

За неперервністю рівність (10) можна розширити до $\forall f, g \in \mathcal{H}$.

У третьому розділі використані поняття узагальненого перетворення Фур'є і рівності Парсеваля за умови, що узагальнений спектр $\vartheta(S)$ оператора S співпадає з цілком узагальненим спектром $\tilde{\vartheta}(S)$, тобто $\tilde{\vartheta}(S) = \vartheta(S)$.

Використовуючи спектр $\tilde{\vartheta}(S)$, введемо для довільного вектора $f \in \mathcal{H}$ поняття його носія, запропоноване Кошманенком В.Д.

Означення 8 . *Носієм вектора $f \in \mathcal{H}$ називається множина:*

$$\text{supp}\,(f) := \{ \quad \lambda \in \mathbb{C} \ \mid \ \forall O_{\lambda,\varepsilon}, \quad \exists \psi \in C_0(\mathbb{C}) \cap L_2(\mathbb{C}, d\rho(\lambda)) \ :$$

$$\text{supp}\,(\psi) \subset O_{\lambda,\varepsilon} \;\; i \;\; \int_{\vartheta(S)} \hat{f}(\lambda)\psi(\lambda)d\rho(\lambda) \neq 0 \quad \},$$

де $O_{\lambda,\varepsilon}$ — ε-окіл точки λ.

Зрозуміло, що $\text{supp}\,(f) \subseteq \vartheta(S)$. Зауважимо, що носій вектора — множина замкнена. Якщо, наприклад, $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}, dx)$ і $\hat{f}$ — звичайне перетворення Фур'є вектора f, то наведене вище поняття носія збігається з поняттям носія для $\hat{f}$ в сенсі узагальнених функцій.

Введемо носій довільної лінійної підмножини векторів $F \subset \mathcal{H}$:

$$\text{supp}\,(F) := \bigcup_{f \in F} \text{supp}\,(f).$$

Зрозуміло, що $\text{supp}\,(F) \subseteq \vartheta(S)$.

Введемо поняття множини нулів для довільного вектора $f \in \mathcal{H}$, використовуючи спектр $\vartheta(S)$:

$$\ker(f) := \{ \;\; \lambda \in \vartheta(S) \;\mid\; \exists O_{\lambda,\varepsilon}, \;\; \forall \psi \in C_0(\mathbb{C}) \cap L_2(\mathbb{C}, d\rho(\lambda)) \;: \\ \text{supp}\,(\psi) \subset O_{\lambda,\varepsilon} \;\; i \;\; \int_{\vartheta(S)} \hat{f}(\lambda)\psi(\lambda)d\rho(\lambda) = 0 \quad \}.$$

Введемо множину нулів довільної лінійної підмножини векторів $F \subset \mathcal{H}$:

$$\ker(F) := \bigcap_{f \in F} \ker(f).$$

Очевидно, що $\ker(f) \equiv \vartheta(S) \backslash \text{supp}\,(f)$ і $\ker(F) \equiv \vartheta(S) \backslash \text{supp}\,(F)$.

Розглянемо конкретну реалізацію сепарабельного гільбертового простору $\mathcal{H}$, а саме, покладемо $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^n, dx)$. Нехай $A = A^*$ — необмежений самоспряжений оператор в $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$ з областю визначення $\mathfrak{D}(A)$.

Побудуємо за оператором A білінійну форму:

$$\gamma_A(f, g) := (Af, Ag), \;\; f, g \in \mathfrak{D}(\gamma_A) \equiv \mathfrak{D}(A).$$

Форма γ_A — замкнена додатна і симетрична в $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$. Для деякої вимірної множини $N \subset \mathbb{R}^n$ та ϑ-скінченної міри $k(x)$, $\operatorname{supp}(k) \subseteq N$, можна визначити форми:

$$\gamma(f,g) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dk(x), \ \ \forall f,g \in \mathfrak{D}(\gamma) := C_0(\mathbb{R}^n),$$

та

$$\tilde{\gamma}_A(f,g) := \gamma_A(f,g) + \gamma(f,g), \ \ \forall f,g \in \mathfrak{D}(\tilde{\gamma}_A),$$

де $\mathfrak{D}(\tilde{\gamma}_A) := \mathfrak{D}(\gamma_A) \cap \mathfrak{D}(\gamma)$.

Позначатимемо $\gamma_A[f] := \gamma_A(f,f)$ і аналогічно $\gamma[f] := \gamma(f,f)$. У випадку $\operatorname{supp}(k) = \mathbb{R}^n$ і $k(x) \equiv 1$ позначатимемо $\gamma_{A+1}[f] := \gamma_A[f] + \gamma[f]$.

Припустимо, що в $\mathfrak{D}(\gamma_A)$ існує лінійна підмножина Φ, така що:

(1) множина Φ є ядром форми γ_A, тобто $\overline{\gamma_A \upharpoonright \Phi} = \gamma_A$;

(2) $\forall f_1, f_2 \in \Phi$ маємо $f_1 \cdot f_2 \in \Phi$, тобто підмножина Φ замкнена відносно операції множення;

(3) для будь якої обмеженої множини $T \subset \mathbb{R}^n$ знайдеться вектор $f \in \Phi$, такий що $f(x) = 1$ м. в. (майже всюди за мірою dx) на T;

(4) $\forall f \in \Phi$ $\operatorname{supp}(f)$ є обмеженим (носій $f \in \mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^n, dx)$ розуміється в сенсі узагальнених функцій).

Означення 9 . *Ємністю множини $N \subset \mathbb{R}$, якщо N - компакт, називається величина*

$$\operatorname{Cap}(N) := \inf\{\gamma_{A+1}[f] \mid f \in \Phi, \ f(x) = 1 \ \text{м.в. на} \ \ N\},$$

і для довільної множини N:

$$\operatorname{Cap}(N) := \sup\{\operatorname{Cap}(G) \mid \forall G \subset N, G - \text{компакт}\}.$$

Можна використовувати інше означення ємності.

Означення 10 . *Ємністю множини $N \subset \mathbb{R}$, якщо N – компакт, називається величина*

$$\mathrm{cap}(N) := \inf\{\gamma_{A+1}[f] \mid f \in \Phi,\ f(x) \geq 1 \text{ м. в. на } N\},$$

і для довільної множини N:

$$\mathrm{cap}(N) := \sup\{\mathrm{cap}(G) \mid \forall G \subset N, G - \text{компакт}\}.$$

Припустимо, що в просторі $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$ існує оператор S, який задовольняє умови:

(5) простір $\mathcal{H}_+$ — S-інваріантний (нагадаємо, $\mathcal{H}_+$ — простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_+ := (Af, Ag)$, $\forall f, g \in \mathfrak{D}(A)$;

(6) стандартно пов'язане з оператором S оснащення (2) таке, що:

a) $\mathfrak{H}_+ \supseteq \mathcal{H}_+$ в топологічному сенсі і оператор S діє неперервно з $\mathcal{H}_+$ в $\mathfrak{H}_+$;

b) узагальнений спектр $\vartheta(S)$ оператора S, породжений оснащенням (2), простий і збігається з цілком узагальненим: $\vartheta(S) = \dot{\vartheta}(S)$.

Розглянемо звуження оператора A на підмножини:

$$\Phi(N_0^c) := \{f \in \Phi \mid f(x) = 0 \text{ м. в. } x \in N\},$$

де N — замкнена в $\mathbb{R}^n$ підмножина та:

$$\Phi(N^c) := \{f \in \Phi \mid \mathrm{supp}\,(f) \cap N = \emptyset\},$$

де N — відкрита в $\mathbb{R}^n$ підмножина.

Наступний критерій містить в собі один з основних результатів дисертації.

Теорема 8 . *Нехай в $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$ задано необмежений самоспряжений оператор A, підмножину $\Phi \subset \mathfrak{D}(A)$, яка задовольняє умови (1), (2), (3) і (4) та самоспряжений оператор S, що задовольняє умови (5) і (6). Нехай N — замкнена (відкрита) підмножина $\mathbb{R}^n$*

Оператор $\dot{A} := A \upharpoonright \Phi(N_0^c)$ $(\dot{A} := A \upharpoonright \Phi(N^c))$ є симетричним оператором з ненульовими індексами дефекту і S-інваріантною областю визначення тоді й тільки тоді, коли:

$$\mathrm{Cap}(N) \neq 0,$$

$$\rho(\Lambda) = 0,$$

де Λ — підмножина цілком узагальненого спектра $\tilde{\vartheta}(S)$ оператора S, яка відповідає звуженню $\dot{A}$ оператора A:

$$\mathfrak{D}_\Lambda \equiv \mathfrak{D}(\dot{A}) := \{f \in \mathcal{H}_+ \mid <\omega_\lambda, f>_{\mathcal{H}} = 0,\ \forall\lambda \in \Lambda \subset \vartheta(S)\}. \quad (11)$$

Множини N і Λ знаходяться у взаємо однозначній відповідності.

Другий параграф третього розділу присвячений доведенню теореми 8. Доведення цієї теореми складається із самостійних тверджень, деякі з яких наведені в більш загальному вигляді а ніж це потрібно для доведення теореми.

Твердження 4 *[2]. Нехай N замкнена підмножина в $\mathbb{R}^n$. Множина*

$$\Phi(N_0^c) := \{f \in \Phi \mid f(x) = 0 \ \text{ м. в. } x \in N\}$$

є ядром форми γ_A тоді й тільки тоді, коли $\mathrm{Cap}(N) = 0$. При цьому форма $\tilde{\gamma}_A$ не є замикальною, якщо $\Phi \subset \mathfrak{D}(\gamma)$ і $k(x) \neq 0$, $\mathrm{supp}\,(k) \subseteq N$.

Аналогічно до твердження 4 можна довести твердження для відкритої підмножини $N \subset \mathbb{R}^n$.

Твердження 5 *[2]. Нехай N – відкрита підмножина в $\mathbb{R}^n$. Множина*

$$\Phi(N^c) := \{f \in \Phi \mid \mathrm{supp}\,(f) \cap N = \emptyset\}$$

є ядром форми γ_A тоді й тільки тоді, коли $\mathrm{Cap}(N) = 0$. *При цьому форма $\tilde{\gamma}_A$ не є замикальною, якщо $\Phi \subset \mathfrak{D}(\gamma)$ і* $k(x) \neq 0$, $\mathrm{supp}\,(k) \subseteq N$.

Наступне твердження дає критерій щільності лінійної підмножини простору $\mathcal{H}$, якщо вона задовольняє деяку умову.

Твердження 6 . *Якщо деяка лінійна підмножина F сепарабельного гільбертового простору $\mathcal{H}$ задовольняє умову:*

$$f \in \mathcal{H}: \quad \mathrm{supp}\,(f) \subset \mathrm{supp}\,(F) \Longrightarrow f \in F,$$

то F щільна в $\mathcal{H}$ тоді й тільки тоді, коли $\mathrm{supp}\,(F)$ *є множиною повної міри ρ.*

Наступне твердження доводить, що якщо множина $\mathfrak{D}_\Lambda$ була побудована за правилом (11), то Λ — множина її нулів.

Твердження 7 . *Нехай $\Lambda \in \tilde{\vartheta}(S)$. Припустимо, $\tilde{\vartheta}(S) = \vartheta(S)$. Тоді множина нулів підмножини $\mathfrak{D}_\Lambda$, що побудована за правилом (11), збігається з множиною Λ:*

$$\ker(\mathfrak{D}_\Lambda) \equiv \Lambda.$$

Таким чином, поєднуючи твердження 6 та 7, дістаємо критерій щільності множини $\mathfrak{D}_\Lambda$, побудованої за правилом (11) за набором Λ узагальнених власних значень $\vartheta(S)$ оператора S.

Теорема 9 . *Підмножина* $\mathfrak{D}_\Lambda \in \mathcal{H}$, *побудована за правилом (11), щільна в* $\mathcal{H}$ *тоді й тільки тоді, коли* $\operatorname{supp}(\mathfrak{D}_\Lambda)$ *є множиною повної міри* ρ.

В останньому параграфі наведено приклади до тверджень 4 і 5, та наслідки теореми 8. Виберемо один з них, який найчастіше в різних варіантах дискутувався в літературі. Візьмемо в ролі оператора A оператор диференціювання $\nabla = i\frac{d}{dx}$.

Наслідок 3 . *Нехай в* $L_2(\mathbb{R}, dx)$ *задано оператор* ∇.

Оператор $\dot{\nabla} := \nabla \restriction C_0^\infty(N^c)$ *є симетричним оператором з ненульовими індексами дефекту і областю визначення, інваріантною відносно оператора множення на незалежну змінну, тоді й тільки тоді, коли:*

$$\operatorname{cap}(N) \neq 0,$$

$$|N| = 0,$$

де $|N|$ — *міра Лебега підмножини* $N \subset \mathbb{R}$, *яка відповідає звуженню* $\dot{\nabla}$ *за правилом (11):*

$$\mathfrak{D}_\Lambda \equiv \mathfrak{D}(\dot{\nabla}) := \{f \in C_0^\infty(N^c) \mid \hat{f}(\lambda) = 0, \ \forall \lambda \in \Lambda \subset \vartheta(S)\},$$

де $\Lambda = N$, $\hat{f}(\lambda)$ — *перетворення Фур'є функції* f.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

[1] Дудкін М.Є. Про комутативні самоспряжені розширення ермітових операторів // в збірнику наукових праць студентів, аспірантів *"Проблеми розвитку психолого-педагогічної науки в науково-технічній творчості молоді"* — Київ: КДПІ ім. Драгоманова, 1992. — С. 139 - 141.

[2] Dudkin N.E., Some unclosable bilinear forms // in the collection of research papers, Methods of functional analysis in problems of mathematical physics, — Kiev: Inst. of Math., Acad. Sci. Ukraine, 1992. — P. 70 - 73

[3] Дудкін М.Є., Ермітові інваріантні звуження самоспряжених операторів. — Київ, 1994. — 20 с. — (Препр. / НАН України. Ін - т математики; 94.31).

[4] Dudkin N., Koshmanenko V., Commutative properties of the singularly perturbed operators. — Kiev, 1993. — 20 p. — (Prepr. / Acad. Sci. Ukr.; Inst. of Mathematics. 93.39).

[5] Дудкин Н.Е., Кошманенко В.Д., Коммутативные свойства сингулярно возмущенных операторов // Теор. и мат физика. — 1995. — 102, N 2. — С. 183 - 197.

Дудкин Н.Е. "Комутативные свойства сингулярно возмущенных операторов".

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. Институт математики НАН Украины, Киев, 1995.

Защищается диссертация, посвящённая построению и изучению сингулярно возмущенных операторов, коммутирующих в смысле резольвент, с заданным унитарным оператором U или самосопряженным оператором S, в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Рассмотрен случай, когда оператор S также сингулярно возмущен. Детально рассматриваются два примера такой конструкции: коммутируемость оператора Лапласа, который возмущен δ-потенциалами, с оператором симметризации в пространстве $L_2(\mathbb{R}^q, dx)$, $q = 2,3$ и с представлениями в $L_2(\mathbb{R}^q, dx)$, $q = 2,3$, изометрических преобразований $\mathbb{R}^q$, $q = 2,3$.

Dudkin N.E. "Commutative properties of the singularly perturbed operators".

Doctor of Philosophy thesis, speciality 01.01.01—mathematical analysis. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, 1995.

The thesis to be defended is devoted to construction and investigation of the singularly perturbed operators comutating in the sence of resolwents with a giwn unitary operators U, or with self-adjoint operators S in the separabel Hilbert space $\mathcal{H}$. There is shown the case where the operator S is singularly perturbed too. The following two examples are of particular attention: the commutativity of the Laplace operator which is singularly perturbed by the set of δ-potentials with the symmetrization operator in $L_2(\mathbb{R}^q, dx)$, $q = 2,3$, and with a representations in $L_2(\mathbb{R}^q, dx)$, $q = 2,3$ of isometrical transphormation of $\mathbb{R}^q$, $q = 2,3$.

Ключові слова: Самоспряжене розширення, симетричне звуження, сингулярно збурений оператор, оснащення простору, узагальнений власний вектор, S-інваріантна множина, ємність, носій вектора.

Підп. до друку 18.10.95. Формат 60x84/16 Папір друк. Офс. друк. Ум. друк. арк. 1,36. Ум. фарбо-відб. 1,36. Обл. вид. арк. 1,0. Тираж 100 пр. Зам. 233 Безкоштовно.

Підготовлено і віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3.