МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ

ЗАПОРОЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ

УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЗАЯЦ ВАЛЕРИЙ ИВАНОВИЧ

ПРИМЕНЕНИЕ УЛЬТРАСФЕРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ В ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКЕ

Специальность 05.02.07 - "Механика деформируемого твердого тела "

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук

ЗАПОРОЖЬЕ - 1995

Диссертацией является рукопись .

Работа выполнена на кафедре програмного обеспечения и математического моделирования Запорожской государственной инженерной академии .

Научный руководитель - доктор физ.- мат. наук ,
профессор Пожуев В.И.

Научный консультант - доктор технических наук ,
профессор Колесник И.А.

Официальные оппоненты - доктор технических наук ,
профессор Тамуров Н.Г.
- доктор физ.- мат. наук ,
Кузьменко В.И.

Ведущая организация - Харьковский государственный политехнический университет .

Защита состоится " 19 " января 1996 г. в 14^00 час. на заседании специализированного ученого совета К 08.02.03 при Запорожском государственном техническом университете по адресу : 330063 ,г. Запорожье ,ГСП -39 , ул.Жуковского ,64

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке технического университета

Автореферат разослан " 19 " декабря 1995г.

Ученый секретарь специализированного ученого совета
д.т.н. , профессор И.П.Волчок

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы . Нелинейные задачи механики деформируемого твердого тела в силу своей практической и теоретической значимости всегда были объектом исследований , интерес к которым никогда не ослабевал . В первую очередь это связано с тем , что модели , построенные с учетом нелинейных эффектов более близки к реальным процессам и объектам , чем их линейные аналоги . Кроме того , в ходе решения нелинейных задач разрабатываются новые методы и подходы , позволяющие расширить круг решаемых задач и повысить точность результатов .

Особый интерес представляет класс физически нелинейных задач , в частности задач деформирования за пределами упругости , поскольку этот вопрос непосредственно связан с определением несущей способности элементов конструкций . В силу нелинейности уравнений состояния теорий пластичности при решении практических задач обычно применяются различные варианты линеаризации исходной проблемы , предложенные в работах И.А. Биргера , А.А. Ильюшина .

Существующие в теории пластичности методы линеаризации можно разделить на две большие группы . В первой группе проводится формальная процедура линеаризации , аналогичная методу Ньютона при решении нелинейных алгебраических уравнений . Вычислительная схема задачи в этом случае связана с необходимостью переопределения на каждой итерации матрицы коэффициентов системы уравнений .

Ко второй группе относятся методы , в которых переход от нелинейных операторов к линейным осуществляется на основе физического анализа задачи . В зависимости от интерпретации нелинейных составляющих , матрица системы алгебраических уравнений на итерациях каждого шага нагружения может оставаться неизменной (метод упругих решений , метод начальных напряжений , метод начальных деформаций) , так и уточняться от шага к шагу , как в методах первой группы (метод переменных параметров упругости) .

Среди подходов к решению физически нелинейных задач , не использующих идею линеаризации , самыми известными являются метод локальныч вариаций Ф.Л. Черноусько и Н.Б. Баничука , метод В.В. Абрамова, основанный на представлении условия совместности деформаций в форме гипотетического сечения ,а также разложение нелинейных членов по малому параметру , применяемое в работах Н.Г. Тамурова и И.А. Цурпала.

Несмотря на большое количество численных методов , в той или иной мере ориентированных на решение нелинейных задач ,очевидно, что возможности классических подходов теории упругости далеко не ограничиваются рамками линейно-упругих задач . Так функции напряжений применяются в теории упругости уже более ста лет и являются эффективным инструментом для решения задач различных уровней сложности . Решение задачи в этом случае сводится к построению дифференциальных операторов для представления компонент напряжений (перемещений)через функцию напряжений и последующему определению гармонической или бигармонической функций . Широко известны функция Эри для плоской задачи и функция Лява - для осесимметричной .Большое количество примеров функций напряжений , а также подробный их анализ приведен в монографиях Л. Доннела и Ю. Круткова . В 30-х годах нашего века Ф .П .Папкович и Г. Нейбер доказали , что полное общее решение задач теории упругости может быть представлено при помощи четырех гармонических функций и вопрос о применении функций напряжений получил строгое обоснование и законченность .

На основании проведенного анализа литературы можно сделать следующие выводы, определяющие выбор темы диссертационной работы:

I. Если методика получения функций напряжений в настоящее время разработана достаточно полно , то сами функции , за исключением гармонических , исследованы менее подробно .

2. Круг методов решения нелинейных задач ,в которых не используется линеаризации является ограниченным .

3. Недостаточно полно используется класс ортогональных полиномов , обладающих хорошими аппроксимирующими свойствами и удобными для построения численных алгоритмов .

Цель диссертационной работы формулируется следующим образом :

- разработать метод , который объединил бы достоинства решений в форме функций напряжений и проективных методов ;

- распространить предложенный метод для решения физически нелинейных задач ;

- реализовать разработанный подход в виде вычислительных схем и пакетов прикладных программ для решения упругопластических контактных задач и задач механики разрушения.

Научная новизна работы состоит в следующем :

- получены представления функций напряжений для осесимметричной и плоской задач теории упругости через ультрасферические многочлены в виде рекуррентных соотношений ;

- доказана теорема о самоуравновешенной системе внутренних сил для случая точного выполнения условий на свободной поверхности ;

- разработан алгоритм охватывающей поверхности , позволяющий использовать свойство ортогональности базиса в случае когда область интегрирования не совпадает с областью ортогональности базисных функций ;

- предложен метод компенсирующих функций решения задач теории пластичности , минуя этап линеаризации ;

- путем численной реализации доказана практическая возможность решения в функциях напряжений физически нелинейных задач механики деформируемого твердого тела .

Достоверность основных научных результатов и выводов диссертации обеспечивается строгостью постановки задач и корректностью математических методов , применяемых для анализа ; сравнением результатов тестовых задач с известными в литературе точными решениями , а также устойчивостью вычислительных экспериментов на ЭВМ .

Научная и практическая ценность работы заключается в создании эффективных методов расчета напряженно-деформированного состояния элементов конструкций , работающих в упругой и упругопластической областях . Разработанные методы и алгоритмы их реализации на ЭВМ могут быть использованы в НИИ и КБ при конструировании и расчете деталей машин и элементов строительных конструкций , путем определения их напряженно- деформированного состояния при контактном взаимодействии , а также для определения их несущей способности при наличии трещин .

Апробация работы .Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на :

- II Всесоюзной конференции " Смешанные задачи механики деформируемого тела "(г. Днепропетровск 1981 г.) ;

- Всесоюзном симпозиуме " Ползучесть в конструкциях " (г.Днепропетровск 1982 г.) ;

Республиканской научно - технической конференции " Проблемы снижения материалоемкости и эффективности машин для животноводства и кормопроизводства "(г.Киев 1982 г.) ;

- Всесоюзной конференции " Расчеты и испытания на контактную усталость материалов и деталей машин "(г. Москва 1984 г.) ;

- научных семинарах кафедры программного обеспечения и математического моделирования Запорожской государственной инженерной академии (1990-1995 гг.);

- межкафедральном тематическом семинаре по специальности 05.02.07 - "Механика деформируемого твердого тела " Запорожского государственного технического университета (1995г.)

Публикации .По материалам диссертации опубликовано 5 работ.

Структура и объем диссертации . Работа состоит из введения , трех глав , заключения и списка литературы , содержит 101 страницу машинописного текста , 21 рисунок , список использованной литературы из 65 наименований .

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность проблемы , составившей предмет исследования , выполнен анализ современного состояния вопроса , дан краткий обзор работ , посвященных методам линеаризации задач теории пластичности , упругопластическим контактным задачам , решению задач теории упругости в функциях напряжений . Анализ состояния вопроса позволил поставить цели и задачи исследования , которые приведены во введении. Здесь же изложено содержание диссертации по главам , формулируются основные научные положения , которые выносятся на защиту .

В первой главе диссертационной работы исходя из функции напряжений для осесимметричных задач теории упругости в форме А.Тимпе

$$U=\frac{1+\mu}{E}\left[4(1-\mu)\frac{\varphi}{r}-\frac{\partial}{\partial r}(\varphi+\eta)\right],$$
$$W=-\frac{1+\mu}{E}\frac{\partial}{\partial z}(\varphi+\eta), \tag{1}$$

где

$$\nabla^2\eta=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\eta=0, \tag{2}$$

$$D\varphi=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi=0, \quad (\nabla^4\varphi=0) \tag{3}$$

найдено , что решение задачи о действии сосредоточенной силы P на упругое полупространство имеет вид

$$\eta=\frac{P}{2\pi}\left[2\ln r-(3-2\mu)\ln(z+R)\right], \tag{4}$$

$$\varphi=\frac{P}{2\pi}\frac{z}{R}, \quad \text{где} \quad R=\sqrt{r^2+z^2} \tag{5}$$

Все функции полученные из (4) и (5) дифференцированием или интегрированием по z удовлетворяют условиям (2) и (3).Так последовательное дифференцирование дает

$$\eta_k=\frac{\partial\eta_{k-1}}{\partial z}=R^{-k-1}F_k(x), \tag{6}$$

$$\varphi_k=\frac{\partial\varphi_{k-1}}{\partial z}=R^{-k+1}Q_k(x) \tag{7}$$

$$\Phi_k=\frac{\partial\Phi_{k-1}}{\partial z}=\varphi_{k-2}=(1-x^2)R^{-k-1}V_k, \quad x=z/R, \tag{8}$$

Показано , что функции $F_k(x)$,$Q_k(x)$,$V_k(x)$ являются решениями дифференциального уравнения для многочленов Якоби

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\frac{dy}{dx}+n(n+\alpha+\beta+1)y=0 , \quad (9)$$

а именно ,ультрасферическими многочленами , которым соответствуют значения параметров $\alpha = \beta$ или $\lambda = \alpha + 1/2$. При $\lambda = 1/2$ функции $Y = F_k(x)$ являются полиномами Лежандра $P_k(x)$. Полиномам Чебышева первого и второго рода сооответсвуют значения $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$. Что касается случая многочленов Q_k ($\lambda = -1/2$) и V_k ($\lambda = 3/2$), то они , повидимому , впервые применяются для решения задач механики. Используя свойства ультрасферических многочленов показано , что для выполнения рекуррентных соотношений (6)-(8) необходимо чтобы функции напряжений были представлены в виде

$$\eta_n^- = (-1)^n\, n!\, R^{-(n+1)}\, P_n(x)$$

$$\psi_n^- = (-1)^n \frac{1}{2}\, n!(n+2)r^2 R^{-(n+3)}\, V_n(x) \quad (10)$$

Доказывается , что для производных по координате r справедливы соотношения

$$\frac{\partial\psi_n^-}{\partial r} = r\,\eta_{n+2}^- , \qquad \frac{\partial\eta_n^-}{\partial r} = -\frac{\psi_n^-}{r} . \quad (11)$$

Показано , что функции

$$\eta_n^+ = \frac{1}{n!}P_n(x)R^n , \quad \phi_n^+ = r^2\frac{1}{2(n-1)!}V_{n-2}(x)R^{n-2} \quad (12)$$

также будут удовлетворять соотношениям (2) и (3) и рекуррентным соотношениям типа (6), (11) .

Переходя в (1) от перемещений к напряжениям при помощи соотношений Коши и закона Гука с учетом (6) и (12) получаем следующие выражения для компонент напряженно-деформированного состояния в безразмерных напряжениях

$$W(\eta_n^-) = -\eta_{n+1}^-, \qquad U(\eta_n^-) = \frac{\varphi_n^-}{r},$$

$$U(\varphi_n^-) = (2\lambda \frac{\varphi_n}{r} - r\,\eta_{n+2}^-), \qquad W(\varphi_n^-) = -\varphi_{n+1}^-,$$

$$\sigma_{zz}(\eta_n^-) = -\eta_{n+2}^-, \qquad \tau_{rz}(\eta_n^-) = -\frac{\varphi_{n+1}^-}{r}, \qquad (13)$$

$$\sigma_{zz}(\varphi_n^-) = -\varphi_{n+2}^- + 2\mu\,\eta_{n+2}^-, \quad \tau_{rz}(\varphi_n^-) = \lambda\frac{\varphi_{n+1}^-}{r} - r\,\eta_{n+3},$$

$$\lambda = 2(1-\mu), \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{ij}.$$

Аналогичные выражения через функции η^+ и φ^+ получаются из (13) заменой знака плюс в индексах на минус.

Доказывается, что компоненты вектора перемещений $U(\eta)$, $W(\eta)$ и тензора напряжений $\sigma_{zz}(\eta)$, $\tau_{zz}(\eta)$ ортогональны на сферической поверхности с центром в начале координат. Так для $U(\eta)$ имеем

$$\int\limits_S u_n(r,z)u_k(r,z)dS = -\frac{1}{4}\frac{\rho^{n+k+2}}{(n-1)!(k-1)!}\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)V_n(x)V_k(x)dx$$

Для плоской задачи теории упругости показано, что если решение уравнения Лапласа представить в форме

$$f_n^- = (-1)^{n-1}(n-1)!\, r^{-n}\, T_n(t)$$

$$f_n^+ = \frac{1}{n!} r^n T_n(t), \quad r = \left[x^2 + y^2\right]^{1/2}, \quad t = \frac{y}{r},$$

где - $T_n(t)$ многочлены Чебышева первого рода , то справедливы соотношения типа (6) . Вводятся функции

$$\varphi_n^- = (-1)^n \, n! \, r^{-n-2} \, U_n(t) \, , \quad \varphi_n^+ = \frac{1}{(n+1)!} \, r^n \, U_n(t) \, ,$$

где - $U_n(t)$ многочлены Чебышева второго рода, и доказывается справедливость соотношений

$$\frac{\partial f_n^+}{\partial x} = -x \, \varphi_{n-2}^+ \, , \qquad \frac{\partial f_n^-}{\partial x} = x \, \varphi_n^- \, .$$

Полученные результаты позволяют для функции напряжений

$$U_x = \frac{\partial f_n}{\partial x} \, , \qquad U_y = \frac{\partial f_n}{\partial y} \, ,$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} \, , \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} \, , \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y}$$

в терминах f^-, f^+ получить следующее представление

$$\begin{aligned}
&U_x(f_n^+) = -x \, \varphi_{n-2}^+ \, , && U_y(f_n^+) = f_{n-1}^+ \\
&\sigma_{yy}(f_n^+) = -\sigma_{xx}(f_n^+) = f_{n-2}^+ && \tau_{xy}(f_n^+) = -x \, \varphi_{n-3}^+ \\
&U_x(f_n^-) = x \, \varphi_{n-1}^- \, , && U_y(f_n^-) = f_n^- \\
&\sigma_{yy}(f_n^-) = -\sigma_{xx}(f_n^-) = f_{n+1}^- && \tau_{xy}(f_n^-) = x \, \varphi_n^-
\end{aligned} \tag{14}$$

Вводится бигармоническая функция $\Phi_n^- = y \, f_n^- + n \, f_{n-1}^-$,

при использовании которой в решении Эри получаются компоненты напряженно-деформированного состояния , также удовлетворяющие рекуррентным условиям типа (6)- (8). При этом получаются следующие формулы для напряжений

$$\sigma_{yy}(\Phi_n) = y \, f_{n+2}^- + n \, f_{n+1}^-$$

$$\sigma_{xx}(\Phi_n^-) = -y f_{n+2}^- - (n+2) f_{n+1}^- \tag{15}$$

$$\tau_{xy}(\Phi_n^-) = x \left[y \varphi_{n+1}^- + (n+1) \varphi_n^- \right] .$$

и перемещений в случае плоской деформации

$$U_y = \frac{\partial}{\partial y} \left[\Phi_n^- - 2(1-\mu) f_n^- \right] , \; U_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[\Phi_n^- + 2(1-\mu) f_n^- \right] . \tag{16}$$

Соответствующее "+"- представление получается введением функции

$$\Phi_n^+ = y f_{n-1}^+ - (n-1) f_n^+ .$$

Также как и в осесимметричном случае для гармонической функции напряжений показано , что все компоненты вектора перемещений и тензора напряжений , заданные соотношениями (14) ортогональны на окружности с центром в начале координат .

Полученные представления для функций напряжений обладают рекуррентными свойствами , удобны для вычислений , напряженно-деформированное состояние , определенное посредством этих функций задается в очень компактной форме . Поэтому (13) - (15) могут быть применены в качестве базисных функций для построения численных решений осесимметричных и плоских задач теории упругости .

<u>Вторая глава</u> посвящена вопросам практической реализации решений в функциях напряжений , представленных через ультрасферические многочлены . Показано , что если свободная от напряжений поверхность представляет собой плоскость z=0 то граничные условия $\sigma_\nu = 0$, $\sigma_\tau = 0$ могут быть удовлетворены точно . Полагая , что решение осесимметричной задачи ищется в виде

$$\eta^- = \sum_{n=0}^{N} a_n \eta_n^- , \quad \psi^- = \sum_{n=0}^{N} b_n \psi_n^- , \tag{17}$$

где коэффициенты a_n b_n связаны соотношением

$$a_n^- = (A_n + 2\mu)b_n^- , \tag{18}$$

используя представления (13) и значения многочленов Лежандра и V- полиномов в ноле получено, что коэффициенты A_n, обеспечивающие выполнение граничных условий на свободной поверхности вычисляются по формулам

$$A_n = -(2k+3) = -n-3 \quad \text{для } n = 2k;$$
$$A_n = -(2k+5) = -n-4 \quad \text{для } n = 2k+1; \quad k = 1,2,... \tag{19}$$

Аналогично для плоской задачи потребовав , чтобы коэффициенты в разложении по базису

$$f^- = \sum_{n=0}^{N} a_n^- f_n^- , \qquad \Phi^- = \sum_{n=0}^{N} b_n^- \Phi_n^- \tag{20}$$

были связаны соотношениями

$$a_n^- = A_n b_n^- \tag{21}$$

и учитывая значения многочлены Чебышева в нуле ,получено

$$A_n = -n-1 , \; n = 2k ;$$
$$A_n = -n , \; n = 2k+1 . \tag{22}$$

Доказана следующая <u>теорема</u> : Если коэффициенты в решении (17) связаны формулами (18) , а коэффициенты в разложении (20) связаны соотношениями (21) , то напряженное состояние , соответствуещее этим решениям представляет собой самоуравновешенную систему внутренних сил .

При построении решений в функциях напряжений основной проблемой является удовлетворение граничным условиям , т.е. решения задач вида

$$I(a) = \int_{\Gamma} \left\{ \sum_{i=0}^{N} a_n \varphi_n - F \right\}^2 d\Gamma \longrightarrow \min \qquad (23)$$

где F-заданное перемещение (напряжение), а φ- соответствующая базисная функция . Как правило граница Г не совпадает с областью ортогональности S базисных функций φ_n , и в этом случае задача сводится к решению систем линейных уравнений с симметричными положительно определенными матрицами общего вида .

Предложен алгоритм охватывающей поверхности , позволяющий получить в этом случае диагональную матрицу и тем самым намного сократить объем вычислений . Для этого интегрирование в (23) по границе Г заменяется интегрированием по области S , формально полагая , что в области S\Г тождественно выполняется условие

$$\sum_{i=0}^{N} a_n \varphi_n = F$$

и тогда подинтегральное выражение в (23) будет отличным от ноля только на границе Г . В результате получается система линейных алгебраических уравнений , в которой правая часть вычислена с некоторой погрешностью . Эта задача принадлежит к классу некорректных задач , и может быть решена при помощи регуляризации по Тихонову . Если для решения (23) применить метод Ньютона , то более эффективным подходом является учет погрешности в правой части при решении задаче одномерной минимизации определения шага по ньютоновскому направлению .

Для распространения решения в функциях напряжений на класс упругопластических задач предложен метод компенсирующих функций .

Если напряжения представлены посредством функций напряжений то независимо от физического смысла параметров , входящих в эти выражения , и характера деформирования среды (упругого , пластического и т.п.), уравнения равновесия будут выполняться автоматически . Пусть компоненты вектора перемещений и тензора напряжений определяются соотношениями

$$U_i = L_i(\varphi) \ , \ \sigma_{ij} = \Pi_{ij}(\varphi) \ ,$$

где переход от перемещений к напряжениям осуществлен при помощи соотношений Коши и закона Гука . Вводится функция

$$\varphi^u = c_n^u \varphi_n \tag{24}$$

такая , что $U_i(\varphi^u) = L_i(\varphi^u)$. При переходе некоторых элементов деформированной среды в пластическое состояние из уравнений соответствующей теории пластичности можно определить компоненты тензора пластических деформаций $\varepsilon^p_{ij} = \varepsilon^p_{ij}(\sigma_{ij}(\varphi))$. Если определять коэффициенты c_n^u в (26) из условия

$$I(c^u) = \iint \left[\varepsilon_{ij}(\varphi^u) - \varepsilon^p_{ij}(\sigma_{ij}(\varphi))\right]^2 d\Omega \longrightarrow \min$$

то будут выполняться и уравнения равновесия , и соотношения между напряжениями и деформациями. Очевидно , что в случае линейной упругости $\varphi^u = \varphi$. Т.к. функция φ^u устраняет невязку между деформациями вычисленными при помощи функций напряжений и определенным из уравнений состояния , назовем φ^u компенсирующей функцией . Используя обще принятое предположение об упругом изменение объема доказывается , что для случая осевой симметрии достаточно одной компенсирующей функции η^u . Аналогично доказывается , что для плоского напряженного состояния и плоской деформации роль компенсирующей функции играет f^u .

В случае обратной задачи т.е. когда по заданным перемещениям необходимо найти распределение напряжений , вводится компенсирующая функцией φ^{σ}, определяемая из условия

$$I(\sigma^{\sigma}) \iint\limits_{\Omega} \left[\sigma_{ij}(\varphi^{\sigma}) - \sigma^{p}_{ij}(\varphi)\right]^{2} d\Omega \longrightarrow \min .$$

Получены компактные выражения для нормальных компонент перемещений и напряжений на сфере радиуса ρ, которая используется в качестве поверхности сопряжения решений

В <u>третьей главе</u> разработанный метод применяется для решения конкретных задач. Рассмотрена задача о контакте жесткого штампа с упругопластической полупространством Ω. Область Ω единичной сферой разбивает на две подобласти : Ω_c с границей, содержащей поверхность контакта и Ω_o, содержащей свободную поверхность. Т.к. функции φ^{-} и η^{-} быстро затухают по мере удаления от начала координат, то для построения решения в области Ω_c применяется φ^{+} и η^{+}, после замены переменной $\bar{z} = q - z$ ($q > 0$).

В области Ω_o решение ищется в виде (17), где коэффициенты a_n^{-} и b_n^{-} связаны соотношениями (18). При этом структура функций φ^{-} и η^{-} обеспечивает выполнение граничных условий на бесконечности, а условия на свободной поверхности выполняются точно. Поскольку в этом случае функции (17) определяют самоуравновешенную систему в области Ω_o, то к этому базису добавляется решение Буссинеска.

Применяется линеаризованный вариант условия непроникания. Сопряжение решений на границе раздела областей Ω_c и Ω_o обеспечивается условиями непрерывности компонент вектора перемещений и нормальной компоненты напряжений. Решение проводится на основе адаптированного алгоритма типа Удзавы (Эрроу- Гурвица), при помощи которого строится итерационный процесс уточнения условий на поверхности контакта .

Все построения для решения осесимметричной задачи непосредственно переносятся на случай плоской задачи с соответствующей заменой базисных функций и решения Буссинска на решение Фламана .

Компенсирующая функция для упругопластической задачи находилась из условий состояния , определяемых по теории малых упругопластических деформаций . Для осесимметричной задачи в безразмерных переменных имеем

$$\varepsilon_{ij}(\eta^u) = \frac{\varepsilon_0}{1-2\mu}\left[1-2\mu-(1+\mu)\,\bar\chi\right] + \bar\chi\sigma_{ij} - -\varepsilon_{ij}(\varphi) - \varepsilon_{ij}(F)$$

$$\gamma_{ij}(\eta^u) = 2\bar\chi\tau_{ij} - \gamma_{ij}(\varphi) - \gamma_{ij}(F)\ ,$$

где $\bar\chi = \dfrac{3}{2}\,\dfrac{\Gamma}{T}$, $\quad \sigma_{ij} = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n^{\sigma}\,\varphi_{ij}(\eta) + \sum\limits_{n=0}^{N} b_n \varphi_{ij}(\varphi)$,

$\varepsilon_{ij}(F)$, $\gamma_{ij}(F)$ -компоненты деформаций определяемые решением Буссинеска или φ -функциями .

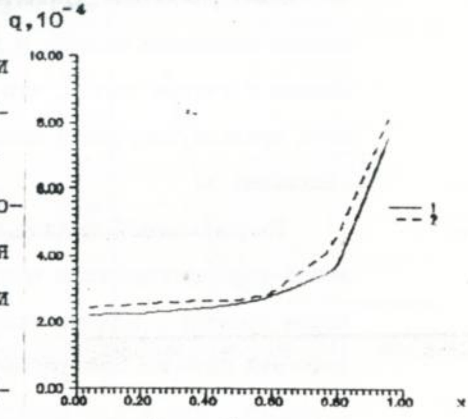

Рис. 1

Все расчеты проводились при значениях физических характеристик деформируемой среды , которые соответсвуют параметрам малоуглеродистой стали . Из сравения результатов аналитического (1) и численного (2) решений плоской задачи о контакте жесткого гладкого штампа с плоским основанием с линейно-упругой средой (рис. 1) можно сделать вывод о надежности предложенного метода . Аналогичное соответствие результатов имеет место и для случая осевой симметрии. Подобный вывод для случая упругопластического деформирования можно сделать сравнивая зависимость контактного усилия от глубины погружения жесткого осесимметричного штампа с плоским основанием (рис.2.), полученную методом компенсирующих функций (1) и методом локальных вариаций Черноусько-Баничука (2).

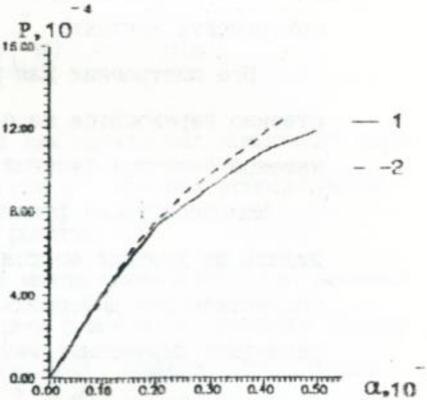

Рис. 2

Решен ряд упругопластических контактных задач как для случая гладкого контакта, так и при наличии трения на поверхностях соприкосновения . Отмечается, что перераспределение контактных давлений по мере погружения штампа в упругопластическое полупространство в случае осевой симметрии и плоской деформации имеет качественно различный характер. Исследована задача о контакте при полном сцеплении штампа с деформируемым упругопластическим основанием с учетом того , что касательное напряжение не может превышать предела текучести материала на сдвиг (закон трения Прандтля -Ильюшина).

Разработанный подход применен также для определения напряженно-деформированного состояния в деформируемом теле , содержащем трещину . Задачи этого класса несомненно представляют практический интерес при расчетах несущей способности элементов конструкций . Как и для контактных задач решение строится в двух подобластях Ω_c и Ω_o , предполагая , что начало координат расположено в центре трещины . Решение в Ω_c , содержащей трещину ,ищется в виде комбинации функций напряжений η^{*} и ϕ^{*} ,связанных соотношениями типа (19) ,что позволяет точно удовлетворить граничным условиям на берегах трещины .В области Ω_o решение представляет собой наложение напряженно-деформированного состояния определенного функцией напряжений

$$\bar{\eta} = \sum_{n=0}^{N} c_n \bar{\eta}_n \ , \qquad (25)$$

на однородное растяжение q в направлении оси z ,которе задано функцией напряжений $\phi = C_{\phi} \dfrac{r^2}{2}$, $\eta = \dfrac{1}{2} C_{\eta}(2z^2 - r^2)$,

$$C_{\phi} = - C_{\eta} = \frac{q}{2(1+\mu)} .$$

В разложении (25) , берутся только четные номера , что обеспечивает выполнение условий симметрии в области Ω_o на плоскости z=0.

Решение плоской задачи проводится по этой же схеме , после соответвующей замены базисных функций . Решение численных примеров проводилось для тех же значений параметров среды , что и для контактных задач . Для достижения сходимости требовалось не более 5 итераций для упругой задачи и 10-12 - для упругопластической . На рис. 3 приведено распределение напряжений в окрестности вершины трещины для плоского деформированного состояния в случае упругой (1) и упругопластической задачи (2) .

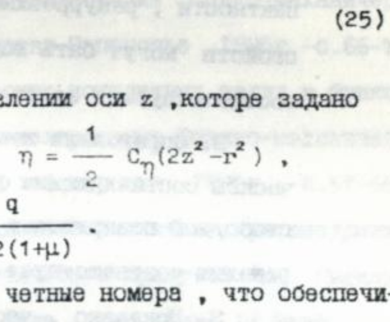

рис. 3

В заключении основные результаты работы сформулированы в виде следующих выводов :

I. Найдено представление функций напряжений для осесимметричной и плоской задач теории упругости через ультрасферические многочлены . Предложенные функции напряжений в силу своей компактности , рекуррентности , а также хороших аппроксимирующих свойств могут быть использованы для построения численных решений соответствующих задач теории упругости .

2. Определена зависимость между гармонической и бигармонической составляющими функции напряжений , при которой условия на свободной поверхности выполняются точно . Доказано , что такому решению соответствует самоуравновешенная система внутренних сил .

3. Показано , что часть компонент вектора перемещений и тензора напряжений обладают свойством ортогональности и на основании этого результата предложен способ , позволяющий использовать свойство ортогональности базиса в случае , когда область интегрирования не совпадает с областью ортогональности базисных функций .

4. Предложен метод распространения решения в форме функций напряжений на случай деформирования за пределами упругости .Для этого вводятся компенсирующие функции , при помощи которых устраняется невязка между напряжениями (деформациями), вычисленными по базисным функциям , и определенными при помощи соотношений состояния соответствующей теории пластичности .

5. Разработанный метод применен для решения ряда осесимметричных и плоских упругопластических контактных задач для штампов с плоскими и выпуклыми основаниями , а также для тел

с трещинами .

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах :

1 . Заяц В.И. О представлении функций напряжений для осесимметричных и двумерных задач теории упругости через ультрасферические многочлены . В сб.:Математическое моделирование физико-механических полей и интенсификация производства.Запорожье .1995г.-с.66-73

2. Заяц В.И. Решение упругопластических контактных задач в функциях напряжений . В сб.:Математическое моделирование физико-механических полей и интенсификация производства . Запорожье .1995г. -с.57-65

3 . Заяц В.И. , Колесник И.А. Напряженное состояние при внедрении сферического индентора в упругопластическую среду .В кн.: Смешанные задачи механики деформируемого тела . Тез. док. II Всес. конф.- Днепропетровск ,1981 г.-с.50-51.

4. Заяц В.И. Об учете трения на поверхности контакта жесткого и упругопластического тел . В кн.: Ползучесть в конструкциях . Тез. док. Всес. симпозиума .- Днепропетровск ,1982 г.-с.153-154.

5. Заяц В.И. , Колесник И.А. О влиянии гистерезиса при многократном контактном нагружении .В кн.:Проблемы снижения материалоемкос-ти и эффективности машин для животноводства и кормопроизводства .Тез. док. Респ. н.-техн. конф. .- Киев 1982 г.-с.16-17.

Личный вклад автора в работах , написанных в соавторстве . Автору принадлежат : в [3]- непосредственное участие в постановке и анализе результатов , разработка вычислительной схемы ; в [5]- разработка вычислительной схемы и пакета прикладных программ ,получение экспериментальных данных для реализации задачи .

АНОТАЦІЯ

Заяц В.І. Застосування ультрасферичних многочленів у фізично нелінійній механіці .

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05. 02. 07.- механіка деформівного твердого тіла, Запорізький державний технічний університет, Запоріжжя, 1995.

Знайдено подання функцій напружень для осесиметричної та плоскої задач теорії пружності через ультрасферичні многочлени . Запропоновані функції, в силу своєї компактності , рекуретних та хороших апроксимуючих якостей можуть бути використані для побудови чисельних рішень відповідних задач . Визначена залежність між функціями напружень , для якої умови на вільній поверхні виконуються точно . Доведено , що такому рішенню відповідає самозрівноважена система внутрішніх сил . Показано , що частина компонент вектора переміщень та тензора напружень ортогональні і запропоновано спосіб , що дозволяє використати властивості ортогональності базису у випадку , коли область інтегрування не збігається з областю ортогональності базисних функцій . Запропоновано метод компенсуючих функцій, що дозволяє поширити рішення у формі функцій напружень на випадок деформування за межами пружності . Розроблений метод використано для рішення ряду осесиметричних та плоских пружньо-пластичних контактних задач , а також для тіл з тріщинами при наявності пластичних деформацій .

Ключові слова : функція напружень , ультрасферичні многочлени , ортогональність , пружньо-пластична контактна задача , пластична деформація , компенсуюча функція , тріщина .

ANNOTATION

Zahjats V.I Ultraspherical polynomials applied to the physically nonlinear mechanics.

The dissertation on scientific degree of candidate of technical sciences on specialties 01.05.07 - mechanics of deformable solid body, Zaporozhsky State technical university, Zaporozhye, 1995.

It is obtained the traction function expression for elastic axis-symmetrical and flat problem through by the ultraspherical polynomials. It would be the obtained traction function by virtue their compactness, recurrence and perfect approximative property to use them to build the numerical solution appropriate problems. The relationship between traction functions determined, for that conditions on the free space are precision ones. It is proved for that solution correspondence the selfequilibrium internal forces system. It was demonstraded that part of the displacement or traction component are perpendicular. It is suggested the method using the perpendicular basis property when the integrating area does not coincide with the basis functions perpendicular area. It is suggested the compensation functions method, used to extend solutions by traction functions mode in case deforming beyond elastic limits. The developed method it was applied for computing of the axis-symmetrical and flat contact problems, for stamps with the flat and convex foundations, as well for bodies with cracks when there is plastics deformations .

Подписано к печати 08.12.95г.

Заказ №592. Тираж 100 экз. Объем 1,0 п.л.

Запорожье, ЗГИА, пр.Ленина, 226.