Національна академія наук України
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

На правах рукопису

УДК 519.7

ШУБЕНКОВА Ірина Анатоліївна

АЛГОРИТМ МОДИФІКОВАНОГО ОРТОГОНАЛЬНОГО СПУСКУ І МОДЕЛЮВАННЯ ВАНТАЖОЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ТРУБОПРОВОДІВ

01.05.01 — теоретичні основи інформатики та кібернетики
(математична кібернетика)

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ 1995

Робота виконана в Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України.

Науковий керівник: академік НАН України
ПШЕНИЧНИЙ Борис Миколайович.

Офіційні опоненти: член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук
ШОР Н. З.,

кандидат фізико-математичних наук
ГАСАНЕНКО В. О.

Провідна організація: Київський університет імені
Тараса Шевченка.

Захист відбудеться «12» січня 1996 р. о 11⁰⁰ год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.39.02 при Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України за адресою:
252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитися в науково-технічному архіві інституту.

Автореферат розісланий «12» грудня 1995 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради СИНЯВСЬКИЙ В. Ф.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність проблеми. На даний час в галузі негладкої оптимізації з'явились нові напрямки. У цей же час існує ще велика група важливих задач економічного планування, проектування, керування технічними та економічними об'єктами, які важко піддаються розв'язанню відомими алгоритмами. В основному це задачі лінійного та нелінійного программування великої розмірності, погано обумовлені задачі, які містять недиференційовні функції. Однак дуже часто погана обумовленість або недиференційовність функцій виникає також внаслідок різного виду математичних перетворень, пов'язаних з необхідністю зведення задачі до певного вигляду для застосування того чи іншого методу оптимізації.

Одним з основних для розв'язання задач недиференційовної оптимізації став субградієнтний метод. Для пошуку точки, в якій опукла, необов'язково диференційовна функція $\varphi(x)$, $x \in R^n$, набуває заданого значення $\varphi^* \geq \min \varphi(x)$, алгоритм має такий вигляд:

$$x_{k+1} = x_k + v_k \, , \qquad (1)$$

$$v_k = - \partial\varphi(x_k) \left[\varphi(x_k) - \varphi^* \right] / \| \partial\varphi(x_k) \|^2 \, , \qquad (2)$$

де $\partial\varphi(x_k)$ - субградієнт для недиференційовної функції в точці x_k. Він належить до процесів фейєрівського типу, що мають властивості:

$$\|x^* - x_{k+1}\| < \|x^* - x_k\| \, , \quad \lim_{k\to\infty} \|x^* - x_k\| = 0 \, . \qquad (3)$$

Простота обчислень напрямку та величини кроку, відсутність мінімізації за напрямком дозволяють застосувати алгоритм як щодо диференційовних, так і недиференційовних функцій. Однак практичне його застосування до задач погано обумовлених чи великої розмірності дає повільну збіжність. Ці обставини призвели до розробки достатньо в практичному розумінні ефективного методу, який має властивості (3).

Мета роботи. Для складних задач математичного програмування одержати на основі методу ортогонального спуску, розробленого М.Б. Щепакіним, його модифікацію, яка ефективно дозволила б розв'язувати задачі великої розмірності та погано обумовлені (до таких задач належать задачі економіко-математичного моделювання в складних природно-кліматичних умовах, розв'язання яких дає значний економічний ефект); сформулювати загальну задачу транспортного забезпечення для районів із складними природно-кліматичними умовами; Одержати загальну транспортну схему постачання вантажів в обраний період часу з врахуванням обмежень різних типів, розглянути питання про існування її розв'язку; провести аналіз вибору оптимальних маршрутів перевезення вантажів.

Методи досліджень. Основу досліджень склали методи математичного програмування, функціонального аналізу, економіко-математичного моделювання.

Наукова новизна роботи. Розроблена модифікація методу ортогонального спуску, яка дозволяє ефективно розв'язувати задачі опуклого програмування великої розмірності та погано обумовлені задачі. Вивчено питання швидкості збіжності, одержано оцінку обчислювальної складності алгоритму. Розв'язання задач пропонованою модифікацією не потребує зведення задачі до спеціального вигляду. Як приклад застосування розглянуто задачу економіко-математичного моделювання доставки вантажів в районах із складними природно-кліматичними умовами. Отриманий розв'язок загальної транспортної схеми доставки вантажів як задачі лінійного програмування. Проведений аналіз вибору оптимальних маршрутів перевезень вантажів.

Теоретична і практична цінність роботи полягає в побудові ефективного алгоритму опуклого програмування, який можна застосовувати для розв'язання різних класів оптимізаційних задач. Він не потребує диференційовності функцій цілі та обмежень. Існує можливість його практичного застосування для різного виду погано обумовлених задач або задач великої розмірності. Використання його для розв'язання задачі доставки вантажів у райони з складними природно-кліматичними умовами та вибір оптимальних маршрутів перевезень дає значний економічний ефект.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на семінарах у відділі обчислювальних методів Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, присвячених питанням математичного програмування:

І. І2-й Всесоюзний семінар "Системи програмного забезпечення розв'язання економічних задач", Естонія, м. Нарва-Йыэсуу, І992р.

2. 2-й міжнародний семінар "Негладкі і розривні задачі керування і оптимізації", Росія, м.Челябінськ, І993р.

Публікації. За темою дисертаційної роботи опубліковано 9 робіт, список яких наводиться в кінці автореферату.

Структура і обсяг роботи. Робота складається з вступу, двох розділів, поділених на 6 параграфів, висновку та списку літератури з 99 найменувань. Загальний обсяг роботи становить І04 сторінки.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовується актуальність тематики досліджень, зроблений огляд отриманих на даний час результатів у цій галузі і коротко викладено зміст дисертаційної роботи.

Перший розділ присвячений алгоритму модифікованого ортогонального спуску (МОС) для розв'язання задач безумовної оптимізації.

В § I.I побудовано алгоритм МОС для пошуку точки, в якій опукла функція набуває заданого значення.

Нехай в R^n задана опукла функція $f(x)$ і потрібно знайти точку, для якої

$$f(x) - N = 0, \qquad (4)$$

де N - деяка стала. Позначимо M множину розв'язків цієї задачі.

В основі алгоритму модифікованого ортогонального спуску лежить алгоритм типу (1)-(2), який має такі властивості.

I) Вектор v_k завжди спрямований під гострим кутом до будь-якої точки з множини M:

$$(x^* - x_k , x_{k+1} - x_k) > 0, \quad \forall x^* \in M; \qquad (5)$$

2) точка x_{k+1} і вектор v_k задають напівпростір, в якому знаходиться множина M:

$$(x^* - x_{k+1} , x_{k+1} - x_k) \geq 0, \quad \forall x^* \in M; \qquad (6)$$

3) точка $x_k + x^* \in M$:

$$\| x^* - x_{k+1} \| \leq \| x^* - x_k \|, \quad \forall x^* \in M.$$

Розглянемо k-у ітерацію алгоритму МОС. Для спрощення викладання припустимо, не обмежуючи загальності задачі, що $N = 0$.

Позначимо $\bar{f}$ рекордне значення функції $f(x)$ (найбільш близьке до нуля функції), яке було одержано після $(k-1)$-ї ітерації. Нехай також було одержано точку x_k, лінійно-незалежні одиничні вектори e_i, $i = 1,2,\ldots,r$; $(e_i , e_j) < 0$, $i \neq j$, які породжують разом з точкою x_k конус $\varkappa_{e,k}$, і взаємно ортогональні одиничні вектори g_i, $i = 1,2,\ldots,r$, які породжують разом з точкою x_k ортогональний конус $\varkappa_{g,k}$, причому $M \subset \varkappa_{e,k} \subset \varkappa_{g,h}$. Нехай ρ_k - радіус кулі з центром в точці x_k, яка містить хоча б одну точку з множини M.

1) Обчислюємо значення $f(x_k)$. Якщо виявиться, що $f(x_k) = 0$, то задача (4) розв'язана. Якщо $f(x_k) > 0$, то знаходимо вектор

$$v_k = - \partial f(x_k) f(x_k) \, / \, \| \partial f(x_k) \|^2 .$$

Обчислюємо скалярні добутки:

$$p_i = (v_k , e_i), \quad i = 1,2,\ldots,r .$$

Якщо серед чисел p_i , $i = 1,2,\dots,r$, знайдеться хоча б одне, таке, що $p = - \| v_k \|$, то задача (4) не мае розв'язку. Візьмемо точку $y = x_k + v_k$. Якщо $p_i \ge 0$, то точка y належить i-му напівпростору $(x - x_k , e_i) \ge 0$. Якщо $p_i < 0$, то в цьому випадку точка y лежить зовні конуса $\varkappa_{e,k}$, одержаного на $(k-1)$-й ітерації. Виходячи з сказаного необхідно з векторів e_i , $i = 1,2,\dots,r$, виключити ті вектори, для яких $p_i > 0$. Аналогічно чинимо і з векторами g_i , $i = 1,2,\dots,r$, виключаючи відповідні вектори g_i . Для векторів, що залишились e_j , g_j вводимо нові номери $j = 1,2,\dots,l$ $(l \le r)$. Якщо $l = 0$, то вважаемо $e_r := v_k / \| v_k \|$, $g_r := v_k / \| v_k \|$, і обчислюемо точку x_{k+1} за формулою

$$x_{k+1} = x_k + v_k$$

і переходимо до 2). Якщо $l \ge 1$, тоді вважаемо $e_r := v_k / \| v_k \|$. Обчислюемо проекцію вектора v_k на відповідний підпростір:

$$s_k = \sum_{j=1}^{l} g_j \, (v_k , g_j) .$$

Якщо $\| v_k - s_k \| = 0$, то множина розв,язків $M = \emptyset$.
Якщо $\| v_k - s_k \| > 0$, то вважаемо $g_r = (v_k - s_k) / \| v_k - s_k \|$ і обчислюемо точку

$$x_{k+1} = x_k + g_r \| v_k \| / \cos \varphi_k , \qquad (7)$$

де φ_k - кут між векторами v_k и g_r ,

$\cos \varphi_k = (g_r , v_k) / \| v_k \| > 0.$

2) Якщо $\rho_k^2 < \| x_{k+1} - x_k \|^2$, то розв'язку задачі (4) в кулі радіусом ρ_0 з центром в точці x_0 не існує.

В протилежному випадку вважаемо

$$\rho_{k+1}^2 = \rho_k^2 - \| x_{k+1} - x_k \|^2 .$$

$k := k + 1$. Якщо $f(x_k) > \bar{f}$, то переходимо до 1). Інакше надаемо $\bar{f}$ значення $f(x_k)$, вважаемо

$$\rho_{k+1}^2 = \max \left[\rho_{k+1}^2 , \| v_k \|^2 / \cos^2 \alpha \right]$$

і переходимо до 1).

Теорема I.I. Точка x_{k+1} належить конусу $\varkappa_{e,k}$, одержаному на $(k-1)$-й ітерації. Точка x_{k+1} е проекцією точок x_k та $y = x_k + v_k$ на конус , утворений в результаті перетину напівпросторів:

$$(x - x_k, e_j) \geq 0, \quad j = 1,2,\dots,l, \quad (x - y, v_k) \geq 0.$$

Якщо $M \neq \emptyset$, то точка x_{k+1} і вектори e_i, $i = 1,2,\dots,r$, задаватимуть конус $\mathcal{K}_{e,k+1}$, який містить множину розв'язків M. Для послідовності точок $\{x_k\}$, генерованої алгоритмом, виконуються співвідношення (5)-(6), окрім того,

$$\| x_{k+1} - x_k \| \geq \| v_k \|, \quad k = 1,2,\dots ;$$

$$(x_{k+1} - x_k , x_k - x_{k-1}) > 0, \quad k = 1,2,\dots ;$$

$$\frac{(x^* - x_k , x_{k+1} - x_k)}{\| x^* - x_k \| \, \| x_{k+1} - x_k \|} \geq \frac{(x^* - x_k , v_k)}{\| x^* - x_k \| \, \| v_k \|} . \blacksquare$$

Позначимо $M_\varepsilon = \left\{ x : f(x) \leq \varepsilon, \ \varepsilon > 0 \right\}$ опуклу множину. Для компактної множини M_{ε_1}, $\varepsilon_1 > \varepsilon$, $\| \partial f(x) \| < \gamma < \infty$. Тоді на множині $M_{\varepsilon_1} \setminus M_\varepsilon$

$$\| v_k \| > C ,$$

де C - додатна стала, яка залежить від $f(x)$ і ε.

Теорема I.2. Нехай $M \neq \emptyset$ і x^* - фіксована точка з M. Тоді на множині $M_{\varepsilon_1} \setminus M_\varepsilon$ виконується нерівність

$$\| x^* - x_{k+1} \|^2 < \| x^* - x_k \|^2 \left[1 - \| v_k \| / \left[\| x^* - x_k \|^2 \cos^2 \varphi_k \right] \right],$$

де $\cos \varphi_k = 1$, якщо крок виконується за формулою (2), і $0 < \cos \varphi_k \leq 1$, якщо крок виконується за формулою (7).$\blacksquare$

Теорема I.3. Для опуклої функції, що має гострий мінімум, послідовність $\{x_k\}$ збігається до $x^* \in M$ із швидкістю геометричної прогресії з знаменником меншим 1. $\blacksquare$

В § I.2 розв'язується задача мінімізації опуклої функції алгоритмом МОС; для процесів фейєрівського типу сформульовано умову нерозв'язності задачі пошуку точки, в якій $f(x) = 0$.

Будемо розглядати процеси типу (1)-(2), які до того ж мають властивість (6). Умова, яка дозволяє за допомогою алгоритму МОС визначити нерозв'язність задачі, аналогічна умові, одержаній М.Б.Щепакіним для алгоритму ортогонального спуску. Зауважимо, що МОС, як і ортогональный спуск, може перевестись в процес (1)-(2), тобто коли послідовність $\{ x_k \}$ обчислюється тільки за формулою (1). Тому природно розглядати умову зупину для процесу (1)-(2).

Лема. Нехай $M \neq \emptyset$ і $x^* \in M$ - фіксована точка. Тоді

$$\| x^* - x_{k+1} \|^2 \leq \| x^* - x_k \|^2 - \| x_{k+1} - x_k \|^2.$$

Позначимо $h_k = \| x_{k+1} - x_k \|$.

Теорема 2.1. Нехай послідовність $\{ x_k \}$ належить компакту M_{ε_1}, ρ_0 - деяке додатне число. Покладемо

$$\rho^2_{k+1} = \rho^2_k - h^2_k . \qquad (8)$$

Якщо $M = \emptyset$, то для будь-якого скінченного ρ_0 знайдеться номер $k(\rho_0)$, такий, що виконається нерівність

$$\rho_{k(\rho_0)} < h_{k(\rho_0)} . \qquad (9)$$

Якщо $M \neq \emptyset$ і $\rho_0 \geq \rho$, де ρ - відстань від точки x_0 до множини M, то для ρ_k, обчислених за формулою (8), співвідношення (9) ніколи не виконається. ■

Нехай $\varepsilon > 0$, $f(x_0) > \varepsilon$. Задача полягає в знаходженні точки, яка належить множині M_ε. Виберемо деяке число ρ_0, $0 < \rho_0 < \infty$, і будемо обчислювати значення ρ_k за формулою (8).

Наслідок. Якщо на якомусь кроці $k(\rho_0)$ виконується нерівність (9), то:

(А). В кулі радіусом ρ_0 з центром в точці x_0 немає точок, в яких $f(x) \leq \varepsilon$.

(Б). Відстань від точки x_0 до множини $f(x) \leq \varepsilon$ або більша ρ_0, або $\min f(x) > \varepsilon$.

Основна проблема полягає в визначенні ρ_0. Наведемо один з можливих способів його оцінювання.

Нехай $f(x_0) > 0$, позначимо $x_1 = x_0 + v_0$,

$$\| x^*_0 - x_0 \| = \min_{x^* \in M} \| x^* - x_0 \| .$$

β_0 - кут між векторами $x^*_0 - x_0$ та $x_1 - x_0$. Нехай вектор $z - x_0$, такий що $\| z - x_0 \| = \| x_1 - x_0 \|$ і направлений так, що для точки $x^*_0 \in M$ виконується рівність $(x^*_0 - z , z - x_0) = 0$. Позначимо α кут між векторами $x^*_0 - x_0$ та $z - x_0$. Ясно, що $\alpha \geq \beta > 0$ і, отже, можна покласти

$$\rho^2_0 = \| v_0 \|^2 / \cos^2\alpha .$$

Відносно значення кута α відомо тільки, що $0 < \alpha < \pi/2$. Чим ближче α до $\pi/2$, тим більшим буде ρ_0. Якщо $M \neq \emptyset$ і $\rho_0 \gg \| x^*_0 - x_0 \|$, то це ніяк не вплине на кількість ітерацій, необхідних для розв'язання задачі. При $M = \emptyset$ α необхідно вибирати так, щоб зупинка процесу відбулась за припустимий час. Для процесу (1)-(2), де ρ_k очислюється за формулою (8), як тільки буде отримано точку x_k , в якій $f(x_k) < f(x_0)$, коректуемо ρ_{k+1} , поклавши

$$\rho^2_{k+1} = \max \{ \rho^2_{k+1} , \| v_k \|^2 / \cos^2\alpha \} .$$

Подібна коректировка здійснюється в усіх точках, де одержано $\bar{f}$ - "рекордне" значення $f(x)$.

Розглянемо тепер задачу

$$\min f(x), \quad x \in R^n$$

де $f(x)$ - опукла функція.
Ця ж задача може бути записана у вигляді

$$\min \qquad (10)$$

при обмеженні

$$f(x) - t \le 0, \qquad (11)$$

де t - одномірний параметр.

Алгоритм залежить від параметра t:
I) якщо $t \ge \min f(x)$, то алгоритм МОС гарантує находження точки $\bar{x}$, в якій $f(\bar{x}) \le t + \varepsilon$, для $\varepsilon > 0$;
2) якщо $t + \varepsilon \le \min f(x)$, то алгоритм визначить, що обмеження (11) не може бути виконано.
Ясно, що в першому випадку необхідно зменшити значення t; а у другому - збільшити і розв'язувати задачу для нового значення t, повторюючи цю процедуру. Більш раціонально зменшувати значення t в тих точках процесу, в яких будуть досягатися найменші значення $\bar{f}$ порівняно з попередніми "рекордними" значеннями; запам'ятовувати останнє з цих $\bar{f}$ і точку, в якій його одержано, і діяти таким чином до тих пір, доки не буде одержано значення t, при якому спрацює умова, яка визначає нерозв'язність задачі. Після цього необхідно повернутись в точку останнього з одержаних значень $\bar{f}$, збільшити значення t і аналогічним чином продовжити МОС до одержання розв'язку задачі (10)-(11). Однак при такій побудові процесу ми можемо одержувати точки, для яких значення $f(x)$ буде мінімальним, а значення $t < \min f(x)$. Дійсно, в цій ситуації після виконання кроку МОС не можна гарантувати виконання нерівності

$$(x^* - x_{k+1} , x_{k+1} - x_k) \ge 0,$$

хоча точка x_{k+1} може опинитись на лінії рівня з меншим значенням $f(x)$, ніж попереднє "рекордне" значення. Тому в усіх точках, де було отримано "рекордне" значення функції, необхідно оновлювати обчислювальний процес. Оновлення необхідно також проводити і при повторному старті з точки, в якій було одержано останнє "рекордне" значення, після того як спрацює критерій зупину процесу.

Детальний опис алгоритму МОС для розв'язання задачі (10)-(11)

не наводиться в автореферат̆і через значний обсяг.

Теорема 2.2. Якщо куля радіусом ρ_0 з центром в точці x_0 містить хоча б одну точку з M, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ за скінчене число ітерацій алгоритму буде знайдено точку x_k, в якій $f(x_k) \le \min f(x) + \varepsilon$.

Такі самі порядок і правила обчислень при розв'язанні задачі мінімізації функції максимуму опуклих функцій на R^n:

$$\min \max \left\{ f_j(x), \quad j = 1,2,\ldots,m \right\} .$$

Ця задача зводиться до задачі вигляду

$$\min t \qquad (12)$$

при обмеженнях

$$\max \left\{ f_j(x), \quad j = \overline{1,m} \right\} - t \le 0. \qquad (13)$$

Якщо в результаті розв'язання задачі (12)-(13) виявиться, що $\min t > 0$, то система опуклих нерівностей $f_j(x) \le 0$, $j = \overline{1,m}$, несумісна. В знайденій оптимальній точці необхідно обчислити відхили для всіх нерівностей, і ті з нерівностей, які будуть мати додатні відхили, скоректувати, віднімаючи від них відповідний додатний відхил. Скоректована таким чином система нерівностей стане сумісною.

Також до розв'язання задачі (12)-(13) зводяться задачі пошуку чебишевських наближень та багато многокритеріальних задач.

Для усунення в процесі розв'язання задач алгоримом МОС впливу накопичуваних через округлення помилок необхідно періодично оновлювати обчислювальний процес, тобто виключати з розгляду всі накопичувані вектори e_i, g_i, $i = 1,2,\ldots,r$. Ознакою для такого оновлення може бути одержання чергового значення $\bar{f}$ $(\bar{f} = f(x_k))$. Необхідхідно також на початку процесу розв'язання визначити, яка максимально можлива кількість векторів e_i, $i = 1,2,\ldots,r$, може накопичитись і оновлювати обчислювальний процес через відповідне число ітерацій. Мінімальна кількість запам'ятовуваних векторів e_i, $i = 1, 2,\ldots,r$, при якій ще буде спостерігатись ефект від застосування алгоритму, дорівнює двом.

В § І.3 наведені результати обчислювальних експериментів розв'язання тестових задач для методів безумовної мінімізації негладких функцій, які широко відомі і часто застосовуються для порівняння алгоритмів оптимізації. Обчислення проводились на ПЕОМ типу PC AT 286 з подвійною точністю. Порівнявши результати з результатами, одержаними в ЦЕМІ РАН В.А.Скоковим при використанні алгоритму ортогонального спуску, можна зробити висновок, що алгоритм МОС більш успішно справляєтся з погано обумовленими задачами.

Другий розділ є продовженням першого в плані застосування МОС для розв'язання прикладних задач і присвячений питанню економіко-математичного моделювання транспортного забезпечення спорудження трубопроводів у складних природно-кліматичних умовах.

В § 2.I розглядається питання про ефективність застосування на практиці методів субградієнтного типу, до яких належить і модифікований ортогональний спуск, для розв'язання задач виробничо-транспортного планування. Сформульовано динамічну транспортну задачу, до якої можна віднести розглянуті в наступних параграфах задачі, що мають ряд особливостей, зумовлених складними природно-кліматичними умовами регіону будівництва.

В § 2.2 розглядається задача транспортного забезпечення будівництва трубопроводів, яка поділена на розв'язання двох задач: зовнішню та внутрішню. Моделюється доставка вантажів різними видами транспорту з врахуванням обмежень різних типів; дане математичне формулювання зовнішньої задачі.

Зовнішня задача полягає у визначенні транспортної схеми (ТС) доставки вантажів від постачальників через місця розвантаження до кінцевих пунктів перевалки та складів, починаючи від яких розвезення вантажів вздовж траси відбувається в рамках "внутрішньої" задачі. Доставка вантажів на будівництво трубопроводу здійснюється залізничним, морським, річковим видами транспорту, а також автомобільним на заключному етапі.

Внутрішня задача передбачає вибір ТС доставки вантажів від місць розвантаження до трубозварювальних баз або проміжних складів і далі до місць проведення робіт, де транспортне забезпечення доставки вантажів відбувается автомобілями чи тракторами. Для внутрішньої задачі питання про вибір оптимальної ТС постачання в роботі не досліджуеться.

Декомпозицію задачі транспортного забезпечення регіону на "внутрішню" та "зовнішню" розглянуто на прикладі підготовки будівництва об'єктів нафтової та газової промисловості при освоєнні півострову Ямал, де особливості умов будівництва виявляються в специфічній системі розташування портів, автомобільних і залізничних маршрутів, постачальників. Передбачається умовний розподіл процесу доставки вантажів від постачальників до об'єктів спорудження на декілька етапів: I) від постачальників до морських портів перевалки на "Великій землі"; 2) морським транспортом від пунктів перевалки до портів на півострові Ямал; 3) автомобільним транспортом від останніх до умовних центрів споживання ресурсів; 4) автомобільним транспортом від умовних центрів споживання до місць виконання робіт (траса газопроводу).

Розглянемо зовнішню задачу. Будемо розглядати як пункти розташування постачальників тільки порти Мурманськ, Лабитнанги і залізничну станцію Обська, що значно скорочує кількість постачальників і спрощує схему доставки вантажів, зберігаючи при цьому всіх дійсних постачальників. Схема перевезень повинна враховувати і нарощування залізниці від ст.Обська в напрямку на Північ і скорочення довжини автоперевезень від її кінцевого пункту до ст.Бованенкево, Байдарацька. ТС перевезень вантажів змінюється у часі. Фактор часу враховується відповідним йому обсягом перевезень x в t-й період часу (місяць) з пункту "j" до пункту "k" (тобто за маршрутом "jk").

Для складання загальної ТС руху потоків вантажів занумеруємо пункти відправлення, перевалки та доставки вантажів: NI - морський порт Мурманськ; N2 - річковий порт Лабитнанги; N3 - зал.станція Обська; N4 - зал.станція Пэюта (або кінцевий від неї пункт залізниці, який збудовано); N5 - п.Байдарацька; N6 - п.Сеяха; N7 - п.Сабеттаяха; N8 - п.Харасавей; N9 - п.Мордияха; NIO - п.Бованенково.

Розглянемо доставку вантажів кожним з видів транспорту окремо.

Обмеження "сезонності" для морських і річкових перевезень мають вигляд

$$x^t_{jk} = 0, \quad t \overline{\in} \left[t_1,\ t_2\right], \quad j = 1,2; \quad k = \overline{5,9}, \qquad (14)$$

де $t_1 \le t \le t_2$ - період навігації.

Обмеженнями сумарної "пропускної здатності" (тоннажу) флота є слідуючі нерівності

$$\sum_{k=5}^{9} x^t_{1k} \le b_1\ , \qquad \sum_{k=5}^{9} x^t_{2k} \le b_2\ , \quad t \in \left[t_1\ ,\ t_2\right]\ , \qquad (15)$$

b_1 и b_2 - максимально припустимі обсяги перевезень морськими суднами та суднами типу "ріка-море" в період навігації.

Залізничні перевезення відоуваються цілорічно. Обмеження для них записуються таким чином:

$$\begin{aligned} & x^t_{32} + x^t_{34} \le b\ , \quad t = \overline{1,12}\ , \\ & x^t_{32} + x^t_{34} \le x^t_3\ , \quad t = \overline{1,12}\ , \end{aligned} \qquad (16)$$

b_3 - обмеження на "пропускну здатність" залізниці, x^t_3 - обсяг вантажів для доставки залізницею. Друге з обмежень (16) може бути відсутнім, якщо значення x^t_3 невідомо.

Серед автомобільних перевезень можна виділити перевезення за маршрутами змінної (за часом) довжини, які починаються від кінцевого пункту залізниці, та за маршрутами, які починаються в пп. N5-9.

Сформулюємо обмеження для цього типу перевезень.

Перша група обмежень аналогічна обмеженням "сезонності" для морських і річкових перевезень:

$$x^t_{45} = 0, \quad x^t_{j10} = 0, \quad t \bar{\in} \left[t_3, t_4\right], \quad j = \overline{4,9},$$

$$x^t_{45} + \sum_{j=4}^{9} x^t_{j10} \le b_4, \quad t \in \left[t_3, t_4\right], \tag{17}$$

$t_3 \le t \le t_4$ - період часу, коли автоперевезення можливо здійснювати, b_4 - обмеження на загальну кількість вантажів, які перевозяться автотранспортом за один місяць.

Друга група обмежень відноситься до планованої на кінець року кількості вантажів, необхідних для постачання в пп.5, 10. Позначимо ці обсяги вантажів T_5, T_{10}, маємо

$$\sum_{t=1}^{12} \left[x^t_{15} + x^t_{25} + x^t_{45}\right] = T_5,$$

$$\sum_{t=1}^{12} \sum_{j=4}^{9} x^t_{j10} = T_{10}. \tag{18}$$

Третя група обмежень випливає з характеристик пунктів 4-9, які є перевалочними. "Вхідні" та "вихідні" з них обсяги вантажів x^t_{jk} пов'язані залежностями

$$0 \le \Pi^t_k \le G_k, \quad k = \overline{4,9}, \quad t = \overline{1,12}. \tag{19}$$

Величини Π^t_k є обсягами вантажів, які зберігаються в t-й місяць на k-му пункті перевалки; G_k, $k = \overline{4,9}$, - розміри складських приміщень в k-му пункті зберігання. Зокрема, для пункту N5 випливає, що

$$T_5 \le G_5.$$

Аналогічно можна врахувати обсяги зберігання вантажів в t-й місяць на інших пунктах перевалки, які можуть виникнути в процесі деталізації загальної схеми.

ТС зовнішньої задачі може не мати припустимого розв'язку або мати нескінченну множину розв'язків. В першому випадку задача несумісна, бо плановані обсяги (T_5, T_{10}) доставки вантажів у кінцеві пункти не відповідають потужностям постачальників; недостатня пропускна здатність b_l, $l = \overline{1,4}$, не вистачає складських приміщень (G_k) і т.д. У другому випадку з множини припустимих розв'язків x^t_{jk}

потрібно вибрати оптимальне. За функцію мети узята вартість транспортних витрат по доставці заданого обсягу вантажів на трасу будівництва у вказаний термін. Врахування специфіки вантажів дозволяє у зовнішній задачі розглядати загальну вартість доставки всіх видів вантажів як суму транспортних витрат окремо по кожному виду: I) труби; 2) привантаження; 3) сипучі матеріали. Оптимальні розв'язки кожної з вказаних зовнішніх задач визначають оптимальні обсяги поставок відповідних видів вантажів і мінімальну вартість їх доставки.

Спишемо цільовий функціонал зовнішньої задачі.

Нехай $E(x)$ - цільовий функціонал (собівартість всіх транспортних витрат зовнішньої задачі), де x - вектор з компонентами x^i_{jk}. Згідно з зазначеним, маємо

$$E(x) = E_м(x) + E_р(x) + E_{ж/д}(x) + E_{авт}(x) + E_{хр}(x), \qquad (20)$$

де $E_м(x)$, $E_р(x)$, $E_{ж/д}(x)$, $E_{авт}(x)$ - вартість доставки вантажів морським, річковим, залізничним і автомобільним видами транспорту відповідно, $E_{хр}(x)$ - витрати на зберігання вантажів.

Математичне формулювання зовнішньої задачі транспортного забезпечення будівництва формалізується до вигляду задачі математичного програмування вигляду

$$\min_x E(x) \qquad (21)$$

при обмеженнях (14)-(19); $E(x)$ описується виразом (20).

Задача (21) є задачею великої розмірності, її максимальний "розмір" дорівнює 226×764. Врахування специфіки задачі при зведенні до вигляду задачі лінійного програмування дозволяє достатньо ефективно її розв'язати методом, запропонованим у першому розділі.

В § 2.3 розглянуто вибір раціональних маршрутів доставки вантажів.

Ця задача охоплює проблему доставки вантажів безпосередньо від виробників до ділянок трубопроводу, який будується. Вона повинна враховувати наявність вже існуючої транспортної мережі як на "материку", так і в районах освоєння газових родовищ, особливості використання різних видів транспорту (§ 2.2), умови перевезень, розвиток місцевої транспортної мережі і т.і.

Загальні витрати на доставку вантажів $E_{общ}$ за конкретним маршрутом визначаються формулою

$$E_{общ} = E_{ж/д} + E_р + E_м + E_{авт} + E_{инфр}, \qquad (22)$$

де $E_{ж/д}$, $E_р$, $E_м$, $E_{авт}$ - витрати на доставку вантажів відповідними видами транспорту; $E_{инфр}$ - витрати на розвиток інфраструктури півострова Ямал.

Згідно з розробленою методикою розрахунку витрат (§ 2.2) вартість перевезень j-го виду вантажів, $j = \overline{1,J}$, від кожного конкретного постачальника i, $i = \overline{1,I}$, обчислюють з врахуванням модулей розрахунку вартості перевезень вантажів окремими видами транспорту, комбінація яких залежить від обраного маршруту доставки вантажів.

Загальні витрати на доставку вантажів для розглядуваного варіанту будівництва визначаються формулою

$$E = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I} E_i^j(k),$$

де $E_i^j(k)$ - вартість доставки вантажів j-го виду від i-го постачальника в k-й рік будівництва.

Позначимо p, $p = \overline{1,P}$, обрані пункти доставки вантажів. Задамо маршрут у вигляді двох індексів "i,p". Такий маршрут вважається одноланковим. При такому завданні маршруту неможливо врахувати транзитні пункти перевалки вантажів з одного виду транспорту на інший, а також використати різні види транспорту при перевезенні вантажів за одною ланкою маршруту.

Для позначення дволанкового маршруту, що проходить через l-й пункт перевалки на "Великій землі", доречно застосувати позначення (i,l,p), наприклад маршрут (1.2.1), і т.д.

Аналогічно можуть бути позначені триланкові маршрути як сполучення чотирьох індексів (i,l,v,p) і т.д. Кількість ланок маршруту може бути довільною.

Проведемо аналіз вибору оптимальних маршрутів перевезень вантажів на прикладі одноланкового маршруту.

Нехай $V^j_{(i,p)}$ - обсяг j-го виду вантажів, що перевозяться з пункту i в пункт p, $i = \overline{1,I}$, $p = \overline{1,P}$. Для спрощення запису індекс j будемо опускати. Оптимальний, в розумінні мінімуму транспортних витрат, варіант перевезень вантажів за маршрутами (i,p) є розв'язком такої задачі математичного програмування:

$$\min_{V} E(V), \tag{23}$$

де

$$E(V) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{p=1}^{P} \left[E^{ж/д}_{(i,p)} + E^{р}_{(i,p)} + E^{м}_{(i,p)} + E^{авт}_{(i,p)} \right] \tag{24}$$

при обмеженнях

$$V = \sum_{i=1}^{I} V_{(i,p)} > 0, \quad \sum_{p=1}^{P} V_{(i,p)} \le b_i , \quad \sum_{i=1}^{I} V_{(i,p)} \le C_p , \qquad (25)$$

V - вектор з компонентами $V_{(i,p)}$ (обсяг перевезеного вантажу); b_i - річна продуктивність заводу-виробника, постачальника j-го виду продукції; C_p - припустимий обсяг зберігання вантажів.

Позначимо E^j_* розв'язок задачі (23)-(25). У формулах (23)-(25) величини $E^{ж/д}_{(i,p)}$, $E^{р}_{(i,p)}$, $E^{м}_{(i,p)}$, $E^{авт}_{(i,p)}$ залежать від $V_{(i,p)}$ лінійно. Отже, (23)-(25) - задача лінійного програмування, яка визначає відповідну вартість транспортних витрат E^j_* по перевезенню j-го виду вантажів. При цьому загальна вартість перевезення вантажів E_* всіх видів вантажів визначається формулою

$$E_{j,0} = E_* = \sum_{j=1}^{J} E^j_* .$$

Аналіз оптимальності багатоланкових маршрутів вкладається в цю ж схему (з введенням потрійної і більшої індексації) з відповідними до маршруту індивідуальними коефіцієнтами.

Декомпозиція процесу вибору оптимальних маршрутів за ланками доречна з ряду причин. З одного боку, число одноланкових маршрутів, які визначають розмірність задачі лінійного програмування (23)-(25), достатньо велике. Загальна розмірність задачі складає 50×25=1250. Крім того, задача (23)-(25) повинна розв'язуватись для кожного виду вантажів j, $j = \overline{1,J}$. Нарешті, при відшуканні строгого розв'язку задачі (23)-(25) для проміжних пунктів маршруту обсяг вантажів, що надійшли за ланками нижнього рівня маршруту повинен дорівнювати обсягу вантажів, відправлених з цього пункту за ланками верхнього рівня з врахуванням тих, що залишилися на зберігання в даному пункті.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

1. Запропонований і обгрунтований алгоритм МОС для розв'язання задач мінімізації опуклих функцій, який використовує многогранні конуси, які містять множину розв'язків задачі. Досліджені його властивості. Доведені теореми про властивості конуса, який містить множину розв'язків. Одержано оцінки швидкості збіжності алгоритму. Запропонована модифікація більш ефективно розв'язує погано обумовлені задачі, ніж метод ортогонального спуску.

2. Для процесів фейєрівського типу сформульовано умову нерозв'язності задачі пошуку точки, в якій функція набуває заданого значення. Розроблена методика практичного застосування цієї умови.

3. Проведено порівняльне дослідження розв'язання негладких задач на наборі тестових прикладів з результатами розв'язання, отриманими іншими відомими методами негладкої оптимізації. Розрахунки показали ефективність і надійність алгоритму МОС при розв'язанні цих задач, що надає можливість його використання для розв'язання прикладних задач, зокрема розглянутих у другому розділі дисертаційної роботи.

4. Сформульована загальна задача транспортного забезпечення для районів із складними природно-кліматичними умовами. Запропоновано її декомпозицію на внутрішню та зовнішню задачі. Одержана загальна транспортна схема доставки вантажів у вибраний проміжок часу з врахуванням обмежень різних типів. Сформульована зовнішня задача транспортного забезпечення. При розв'язанні ТС задачі за цільовий функціонал обрана собівартість всіх транспортних витрат зовнішньої задачі.

5. Вивчено питання вибору оптимальних маршрутів постачання вантажів на трасу будівництва трубопроводу. Як приклад розглянуто постачання вантажів на спорудження газопроводу на півострові Ямал. Проведений аналіз вибору оптимальних маршрутів перевезень. Один з можливих способів розв'язання задачі полягає в зведенні її до задачі лінійного програмування великої розмірності, для розв'язання якої доречно скористатись алгоритмом МОС.

Основний зміст дисертації викладений в таких роботах:

1. Данилин Ю.М., С.Г. Ненахова, Панин В.М., Шубенкова И.А. Транспортное обеспечение трубопроводного строительства на примере п-ва Ямал // Передовой производственный опыт, рекомендуемый для внедрения в строительстве предприятий нефтяной и газовой промышленности. - М.: I990. - №9. - С. 23-26.

2. Ненахова С.Г., Шубенкова И.А. Экономико-математическое моделирование внешних перевозок для строительства объектов нефтяной и газовой промышленности (на примере полуострова Ямал).- Киев, I990. - I8 с. (Препр. / АН УССР. И-т кибернетики им. В.М.Глушкова; 90-22).

3. Пшеничный Б.Н., Шубенкова И.А., Шепакин М.Б. Применение модифицированного ортогонального спуска для решения задач безусловной оптимизации выпуклых функций // Теория и вычислительные проблемы оптимизации. - Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН Украины, I993. - С. 40-44.

4. Шубенкова И.А. О решении задачи минимизации затрат на строительство линейной части магистральных трубопроводов (ЛЧМТ) // Методы решения задач нелинейного и дискретного программирования.

- Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН УССР, I99I. - С. 25-32.

5. Шубенкова И.А. О выборе оптимальных маршрутов доставки грузов на трассу строительства трубопроводов в районах со сложными природно-климатическими условиями // Процессоры и системы обработки сигналов. - Киев: Ин-т кибернетики им.В.М.Глушкова АН Украины, I99I. - С. 45-5I.

6. Щепакин М.Б., Шубенкова И.А. О модифицированном методе ортогонального спуска // Теория оптимальных решений. - Киев: Ин-т кибернетики им.В.М.Глушкова АН Украины, I992. - С. 49-54.

7. Щепакин М.Б., Шубенкова И.А. Метод ортогонального спуска и его модификации // Системы программного обеспечения решения экономических задач (Тез. докл. XII конф. г. Нарва-Йыэссуу, I6-20 апр. I992 г.). - М., - С. 3I-32.

8. Щепакин М.Б., Шубенкова И.А. алгоритмы ортогонального спуска для решения задач выпуклого программирования // Негладкие и разрывные задачи управления и оптимизации: Тез. докл. 2-го междунар. семинара. - Челябинск, I993. - С. I55-I56

9. Щепакин М.Б., Шубенкова И.А. Исследование модифицированного алгоритма ортогонального спуска для поиска нуля выпуклой функции // Кибернетика и системный анализ. - I993. №4. - С.63-72.

Шубенкова И. А. Алгоритм модифицированного ортогонального спуска и моделирование грузообеспечения трубопроводов.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.01 — «Теоретические основы информатики и кибернетики». Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины, Киев, 1995.

Для решения задач выпуклого программирования предложен алгоритм модифицированного ортогонального спуска, использующий многогранные конусы, содержащие множество решений задачи. Получены оценки скорости сходимости алгоритма. Для процессов фейеровского типа сформулировано условие неразрешимости задачи поиска точки, в которой функция принимает заданное значение. Разработана методика практического использования этого условия. В качестве примера применения алгоритма для решения прикладных задач рассмотрены общая задача транспортного обеспечения районов со сложными природно-климатическими условиями и выбор оптимальных маршрутов доставки грузов на трассу строительства.

Shoubenkova I. A. Algorithm of modified orthogonal descent and loads provision of pipelines modeling.

Candidate of Phys. & Math. Sci. thesis, speciality 01.05 01 — theoretical fundamentals of informatics and cybernetics. V. M. Glushkov Institute of Cybernetics NAS Ukraine, Kiev, 1995.

The algorithm of modified orthogonal descent has been proposed for solving the convex programming problems. It uses the polyhedral cones containing decision set. For Fejer type processes it is formulated a condition of unsolvability for the problem of finding the point, where the goal function takes a given value. The procedures has been developed to practical use this condition. As an example put into practice of the algorithm was considered global problem of the transport ensuring for regions with complicated nature-climatic conditions and as well as a choice of the optimal routes in loads provision on the constraction route.

Ключові слова: недиференційовна оптимізація, ортогональний спуск, фейєрівський процес, опукле програмування.

Підп. до друку 30.11.95. Формат 60×84/16. Папір для розмнож. апар. Офс. друк. Ум. друк. арк. 0,98. Ум. фарбо-відб. 1,06. Обл.-вид. арк. 1,0. Зам. 867. Тир. 100 прим.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40