КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені Тараса ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису
УДК 517.929.4

ДАВИДОВ Володимир Федорович

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ТА ПОБУДОВА ЯКІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ З КВАДРАТИЧНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Київ — 1995

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Київському університеті імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук,
професор Хусаінов Деніс
Яхьєвич

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук,
професор Коренівський Данило
Григорович

кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Журбенко Микола Григорович

Провідна організація — Сімферопольський Державний університет,
Міністерство Освіти, м. Сімферополь

Захист відбудеться "22" лютого 1996 р. о 14 год. 00 хв. в ауд. 40 на засіданні спеціалізованої ради Д 01.01.20 при Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою:

252127, м.Київ, проспект академіка Глушкова, 6,
факультет кібернетики.

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці Київського університету за адресою:

252033, м.Київ, вул.Володимирська, 58.

Автореферат розісланий "19" січня 1996 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
канд. фіз.- мат. наук Зінько П.М.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Серед багатьох різнобічних проблем, що виникають при моделюванні та дослідженні технічних, фізичних, екологічних, медичних та інших систем, важливе місце займають питання дослідження динаміки процесів. Особливу увагу слід приділити проблемі ефективного аналізу стійкості системи, що вивчається.

Достатньо конструктивним та ефективним методом якісних досліджень є другий (прямий) метод О.М.Ляпунова, що є гнучким апаратом для розв'язання різноманітних задач стійкості. Він базується на дослідженні траєкторій динамічних систем за допомогою спеціальних допоміжних функцій з наперед заданими властивостями: додатньої визначеності самої функції та від'ємної визначеності її похідної на траєкторіях системи. Вміння побудувати оригінальну функцію Ляпунова вимагає від дослідника достатньої математичної підготовки та добре развинутої інтуїції, що й до нашого часу залишається більш мистецтвом, ніж наукою. Незважаючи на трудноші у використанні методу, що були породжені недостатньо повною розробкою підходів для побудови функцій Ляпунова, він безумовно є одним з найбільш ефективних методів теорії динамічних систем.

Другий метод О.М.Ляпунова при створенні був орієнтован на дослідження систем, що описуються звичайними диференціальними рівняннями. Основні результати були одержані в наукових роботах М.Г.Четаєва, К.П.Персидського, І.Г.Малкіна. В подальшому він використовувався при дослідженні систем з розподіленими параметрами (Т.К.Сиразетдинов), систем з запізненням (А.Д.Мишкіс, М.М.Красовський, Б.С.Разуміхін, Дж.Хейл, В.Б.Колмановський), стохастичних систем (І.Я.Кац, Є.Ф.Царьков, В.К.Ясинський, Д.Г.Коренівський). Багатовимірні системи досліджувалися за допомогою цього методу в роботах В.М.Матросова, А.А.Мартинюка, Б.Бейлі, В.Лакшмікантама.

Виникнення сучасних швидкодіючих обчислювальних засобів, що дозволяють перевіряти теоретичні припущення, стимулювало нові аспекти його розвитку. Більш актуальним став алгоритмічний підхід, що дозволяє чисельно розв'язувати проблеми побудови функцій Ляпунова для конкретних груп систем. Конструктивні алгоритми побудови функцій Ляпунова були одержані в роботах Є.А.Барбашина, В.І.Зубова, В.М.Кунцевича, Б.М.Бублика, М.Ф.Кириченка, Ф.Г.Гаращенка та інших авторів.

Показниками функціонування складних систем, крім їх стійкості (нестійкості), є різні якісні характеристики, такі як час перехідного процесу, інтегральний критерій якості, оцінка області асимптотичної стійкості, величина перерегулювання та інші. Другий метод О.М.Ляпунова теоретично дає можливість визначення точних кількісних значень характеристик. Однак на практиці з-за відсутності загального конструктивного підходу до побудови функцій Ляпунова, а також складного вигляду досліджуваних систем (зокрема, нелінійні системи, що описуються квадратичними диференціальними рівняннями із відхиленням аргументу) знаходити точні значення характеристик важко, а іноді й неможливо.

Природньо, що виникає питання оптимізації отриманих характеристик за рахунок вибору відповідних функцій. Останнім часом з'явилося поняття "оптимальної" (екстремальної, "the best") функції Ляпунова. Це надало можливість розв'язувати ряд цікавих та важливих задач, зокрема, найкращим чином оцінювати деякі якісні характеристики динамічного процесу.

Інтенсивний розвиток методів негладкої оптимізації, поява алгоритмів градієнтного типу із змінною метрикою, що мають досить високу швидкість збіжності (які було запропоновано в роботах Б.Н.Пшеничного, Н.З.Шора, М.Г.Журбенка), надало можливість автоматизовано, програмним шляхом будувати функцію Ляпунова з наперед визначеного класу функцій.

Одним з виглядів систем, що найбільш адекватно описують реальні процеси, є системи з відхиленням аргументу. При створенні загальної теорії рівнянь з післядією багато фундаментальних результатів було перенесено з теорії звичайних диференціальних рівнянь. Але з перенесенням ідеї другого методу О.М.Ляпунова на системи з післядією, виникли значні труднощі в оцінці знаку похідної функції, що береться в силу системи. Тому існують та розвиваються два альтернативних підходи дослідження стійкості систем цього класу другим методом Ляпунова.

Перший, з позицій функціонального аналізу — метод функціоналів Ляпунова-Красовського;

Другий, з позицій класичної теорії, пов'язаний з пошуком функції кінцевої кількості змінних.

Метод функционалів базується на використанні знаковизначеного функціоналу, що заданий на відрізках інтегральних кривих, й дослідженні його похідної. Апарат функціоналів Ляпунова-Красовського використовували в своїх дослідженнях В.Б.Колмановський, Є.Ф.Царьков, Д.Г.Коренівський. Особливість другого напрямку полягає у дослідженні повної похідної функції Ляпунова тільки на розв'язках (або на множині кривих, які включають розв'язок), що задовільняють так званій умові Б.С.Разуміхіна. Однак, слід сказати, що функції Ляпунова у ряді випадків мають і свої переваги перед функціоналами. Однією з головних переваг є можливість досить просто отримувати та обчислювати якісні характеристики розв'язків систем.

В запропонованій роботі проведені теоретичні дослідження стійкості квадратичних систем диференціальних рівнянь з одним відхиленням аргументу із запізненням та без нього. Запропонована компактна матрична форма запису систем цього класу. Робота містить огляд головних напрямків та результатів якісних досліджень квадратичних диференціальних систем. Головним методом досліджень стійкості обран другий метод О.М.Ляпунова з функціями квадратичного та спеціального дробово-раціонального вигляду. Отримані конструктивні достатні умови асимптотичної стійкості стану рівноваги квадратичних систем без запізнення, рівномірні по запізненню, а також для деякого малого запізнення, значення якого залежить від параметрів системи, що досліджується. Крім встановлення факту стійкості, обчислені оцінки ряду важливих характеристик розв'язків: ступінь монотонності прямування до положення рівноваги, гарантована область асимптотичної стійкості. Усі отримані залежності представлені у коефіцієнтному вигляді і можуть бути легко обчислені для квадратичних систем досить великої розмірності.

Метою дісертаційної роботи є розвиток якісної теорії стійкості динамічних систем, що представлені класом систем диференціальних рівнянь з квадратичними правими частинами, а також з відхиленням аргументу із запізненням та без нього; отримання умов асимптотичної стійкості, обчислення гарантованої області асимптотичної стійкості та мажорантних оцінок розв'язків на основі другого методу Ляпунова з функціями квадратичного й спеціального видів; розв'язок ряду проблем в області побудови і оптимізації показників якості функціонування динамічних систем, класу, що розглядається.

Наукова новизна роботи полягає у наступному. Запропонована компактна матрична форма запису квадратичних систем загального вигляду. Розроблен ефективний метод дослідження стійкості розв'язків квадратичних диференціальних систем з запізненням та без нього. Отримані достатні умови асимптотичної стійкості, які можна легко перевірити, для систем достатньо великої розмірності. Побудовані оцінки гарантованої області асимптотичної стійкості, а також верхні та нижні мажорантні оцінки розв'язків з цієї області.

Розв'язана оптимізаційна задача побудови максимального радіусу кулі, що розташована в області асимптотичної стійкості. Проведені обчислювальні експерименти, що демонструють конструктивність отриманих оцінок та умов, а також ефективність оптимізації якісних характеристик.

Методи дослідження. Дослідження проводилися з використанням другого методу Ляпунова та методів теорії диференціальних рівнянь і матричної алгебри. Використовувались методи та алгоритми теорії оптимізації.

Теоретична та практична цінність роботи полягає у тому, що запропоновані методи дослідження стійкості квадратичних систем диференціальних рівнянь мають конструктивний характер та можуть бути використані у вигляді числових алгоритмів.

Основні результати дисертаційної роботи використовувались при виконанні теми "Моделювання та дослідження стікості нетрадиційних динамічних систем", що розроблялася в лабораторії моделювання та оптимізації складних систем факультету кібернетики Київського университету відповідно до постанови Міністерства освіти України.

Апробація роботи. Основні результати дисертації доповідались і обговорювались на Міжнародному колоквіумі з диференціальних рівнянь (м.Пловдив, Болгарія, 1993), Восьмій Чехословацькій конференції з диференціальних рівнянь та їх застосуванню "EQUADIFF - 8" (м.Братіслава, Словакія, 1993), Другій міжнародній конференції з диференціальних рівнянь та їх застосуванню (м.Веспрем, Угорщина, 1995), Українській конференції "Моделювання та дослідження стійкості систем" (м.Київ, 1992, 1993, 1994, 1995), Кримській математичній школі "Метод функцій Ляпунова та його застосування" (м.Сімферополь, 1993, 1995), Міждержавній науковій конференції "Динамічні системи: стійкість, керування, оптимізація" (м.Мінськ, 1993), Міжнародній математичній конференції, присвяченій пам'яті Ганса Гана (м.Чернівці, 1994), Міжнародній конференції з функціонально-диференціальних рівнянь та їх застосуванню (м.Москва, 1994), а також на семінарі з проблеми "Кібернетика", "Моделювання та оптимізація складних систем" (науковий керівник член-кор. НАН України, проф. Б.М.Бублик, проф. О.Г.Наконечний).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 21 роботі [1 - 21].

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, трьох розділів, висновку, списку використаної літератури з 147 найменувань та додатку з текстами програм та результатами обчислень. Обсяг роботи складає 141 сторінку машинописного тексту, що включає 2 малюнки, 3 таблиці.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі формулюється мета дисертаційної роботи, її новизна та актуальність. Обгрунтовується наукова та практична цінність питань, розглянутих в роботі. Дається невеликий історичний огляд розвитку другого методу О.М.Ляпунова. Стисло викладено зміст дисертації.

У першому розділі розглядаються системи диференціальних рівнянь без запізнення з квадратичними нелінійностями в правих частинах. Для систем цього класу пропонується компактна матрична форма запису:

$$\dot{x} = Ax + XBx. \tag{1}$$

Тут X, B — прямокутні $n \times n^2$ та $n^2 \times n$ матриці блочного вигляду

$$X(t) = \{X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)\}, \qquad B = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \ldots \\ B_n \end{Bmatrix}.$$

$X(t)$ — матриця, у якій на i-му рядку стоїть вектор-рядок $x^T(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, а інші елементи нульові. B — матриця, яка визначає квадратичну складову i-го рядка системи (1), тобто

$$X_i(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} b^i_{11} & b^i_{12} & \ldots & b^i_{1n} \\ b^i_{12} & b^i_{22} & \ldots & b^i_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b^i_{1n} & b^i_{2n} & \ldots & b^i_{nn} \end{pmatrix}.$$

Перший параграф містить огляд якісних досліджень диференціальних систем з квадратичними правими частинами. Достатньо детально квадратичні системи були досліджені лише на площині. В силу росту розмірності простору коефіцієнтів запропоновані дослідження досить складно узагальнити на системи більш високої розмірності. Наводяться різноманітні приклади, які ілюструють широке застосування квадратичних систем при моделюванні різних процесів, що вивчаються у біології, фізиці, хімії, медицині.

Другий параграф присвячується дослідженню стійкості стану рівноваги $x(t) \equiv 0$ системи (1) та одержанню мажорантних оцінок типу Важевського збіжності розв'язків, що знаходяться в області стійкості стану рівноваги. Дослідження проводиться з використанням функції Ляпунова у вигляді квадратичної форми $v(x) = x^T Hx$. Припускається, що матриця A асимптотично стійка. Тоді для довільної додатно визначеної матриці C рівняння

$$A^T H + HA = -C \tag{2}$$

має єдиним розв'язком додатно визначену матрицю H.

Т е о р е м а 1. Нехай матриця A асимптотично стійка. Тоді розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (1) також асимптотично стійкий. Область асимптотичної стійкості містить кулю радиусу

$$R = \frac{\lambda_{min}(C)}{2|B|\lambda_{max}(H)\varphi(H)}, \qquad \varphi(H) = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(H)}{\lambda_{min}(H)}}, \tag{3}$$

та для розв'язків $x(t)$ з цієї кулі виконується двобічна оцінка

$$\frac{\widetilde{R}\varphi^{-1}(H)|x(0)|\,exp\{-\gamma_2 t/2\}}{\widetilde{R} + |x(0)|[1 - exp\{-\gamma_2 t/2\}]} \le |x(t)| \le \tag{4}$$
$$\le \frac{R\varphi(H)|x(0)|\,exp\{-\gamma_1 t/2\}}{R - |x(0)|[1 - exp\{-\gamma_1 t/2\}]},$$

де

$$\widetilde{R} = \frac{\lambda_{max}(C)}{2|B|\lambda_{max}(H)\varphi(H)}, \quad \gamma_1 = \frac{\lambda_{min}(C)}{\lambda_{max}(H)}, \quad \gamma_2 = \frac{\lambda_{max}(C)}{\lambda_{min}(H)},$$

$\lambda_{max}(\cdot)$, $\lambda_{min}(\cdot)$ — максимальне та мінімальне власні числа відповідних матриць.

У третьому параграфі дослідження стійкості проводиться за допомогою функції Ляпунова дробово-раціонального вигляду:

$$v(x,t) = e^{\gamma t} x^T Hx\left[1 - \xi\sqrt{x^T Hx}\right]^{-2}, \tag{5}$$

Тут γ і ξ — сталі, H — симетрична додатно визначена матриця, розв'язок рівняння Ляпунова (2).

Позначимо через ∂v_t^α поверхню рівня $v(x,t) = \alpha$ функції Ляпунова $v(x,t)$, а v_t^α — область, яку вона містить, тобто

$$\partial v_t^\alpha = \{(x,t) : v(x,t) = \alpha\}, \qquad v_t^\alpha = \{(x,t) : v(x,t) < \alpha\}.$$

Доводяться наступні твердження.

Л е м а 1. Нехай існують $\alpha > 0$, $\gamma \ge 0$, $\xi > 0$ такі, що для кривої $x(t)$ виконується $(x(t),t) \in v_t^\alpha$, $t \ge 0$ та $1 - \xi\sqrt{x^T(t)Hx(t)} > 0$. Тоді вірна нерівність

$$|x(t)| < \frac{\sqrt{\alpha}\, exp\{-\gamma t/2\}}{\sqrt{\lambda_{min}(H)}\,[1+\xi\sqrt{\alpha}\, exp\{-\gamma t/2\}]}. \qquad (6)$$

Л е м а 2. Нехай існують $\alpha > 0$, $\gamma \geq 0$, $\xi < 0$ такі, що для кривої $x(t)$ виконується $(x(t), t)\overline{\in} v_t^{\alpha}$, $t \geq 0$ та $1 + \xi\sqrt{\alpha} > 0$. Тоді виконується така нерівність:

$$|x(t)| > \frac{\sqrt{\alpha}\, exp\{-\gamma t/2\}}{\sqrt{\lambda_{max}(H)}\,[1+\xi\sqrt{\alpha}\, exp\{-\gamma t/2\}]}. \qquad (7)$$

З допомогою функції Ляпунова дробово-раціонального вигляду (5) також одержані двобічні оцінки (4) збіжності розв'язків системи (1) та обчислен радіус R гарантованої області асимптотичної стійкості розв'язку $x(t) \equiv 0$.

У четвертому параграфі розглядається система диференціальних рівнянь типу Лотки-Вольтера з квадратичною правою частиною. На цій системі проведено розрахунки, що демонструють ефективність одержаних вище результатів.

У другому розділі розглядаються системи дифференціальних рівнянь з квадратичною правою частиною з запізненням

$$\dot{x}(t) = A_1x(t)+A_2x(t-\tau)+X(t)B_1x(t)+X(t-\tau)B_2x(t)+X(t-\tau)B_3x(t-\tau). \qquad (8)$$

У першому параграфі даються загальні визначення стійкості розв'язку $x(t) \equiv 0$ систем з запізненням, наводяться основні положення другого методу Ляпунова для систем з відхиленням аргументу. *У другому параграфі* одержані умови асимптотичної стійкості розв'язку $x(t) \equiv 0$ системи (6), рівномірні за запізненням $\tau > 0$. За "модельну " систему вибирається диференціальна система без запізнення

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad A = A_1 + \beta A_2,$$

де $0 \leq \beta \leq 1$ — параметр, що обчислюється з умови максимальні стійкості матриці A.

Т е о р е м а 2. Нехай існують параметр β і матриця H, що є розв'язком рівняння (2), при якіх виконується нерівність

$$\lambda_{min}(C) - 2|HA_2|(\beta + \varphi(H)) > 0. \qquad (9)$$

Тоді розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (8) асимптотично стійкий при довільному $\tau > 0$. Куля U_R області асимптотичної стійкості має радіус

$$R = \frac{\lambda_{min}(C) - 2|HA_2|(\beta + \varphi(H))}{2\lambda_{max}(H)\sum_{i=1}^{3}|B_i|\varphi^i(H)}. \tag{10}$$

Для довільного розв'язку $x(t)$ з цієї кулі виконується $|x(t)| < \varepsilon$, $t > 0$, як тільки $\|x(0)\|_\tau < \delta(\varepsilon)$, де

$$\delta(\varepsilon) = \min\{R,\ \varepsilon/\varphi(H)\}.$$

Під матричною нормою розуміється спектральна, а під векторними

$$|x(t)| = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)\right\}^{1/2}, \qquad \|x(t)\|_\tau = \max_{-\tau\le s\le 0}\{|x(s+t)|\}.$$

Умови (9) накладають сильні обмеження на параметри системи. У ряді випадків вони не виконуються. Тоді розв'язок $x(t) \equiv 0$ буде асимптотично стійким при деякому малому значенні запізнення τ, величина якого залежить від параметрів системи. У цьому випадку будемо вважати, що $\beta = 1$, тобто $A = A_1 + A_2$.

Т е о р е м а 3. Нехай A асимптотично стійка матриця. Тоді при $\tau < \tau_0$, де

$$\tau_0 = \frac{\lambda_{min}(C)}{2|HA_2|(|A_1| + |A_2|)\varphi(H)}, \tag{11}$$

система (8) буде мати асимптотично стійкий нульовий розв'язок. Куля U_R області асимптотичної стійкості має радіус $R = \delta(\overline{R}, \tau)$, де

$$\overline{R} = \frac{\lambda_{min}(C)(1 - \tau/\tau_0)}{2\sum_{i=1}^{3}[|HA_2||B_i|\varphi^3(H)\tau + \lambda_{max}(H)|B_i|\varphi^i(H)]}, \tag{12}$$

та для довільного розв'язку $x(t)$ при $t > 0$ буде виконуватися $|x(t)| < \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \overline{R}\varphi(H)$, як тільки $\|x(0)\|_\tau < \delta(\varepsilon, \tau)$, де

$$\delta(\varepsilon,\tau) = \begin{cases} N(\varepsilon,\tau)[1 + |A_2|\tau]^{-1}, & \text{якщо } |B_3| = 0, \\ 2N(\varepsilon,\tau)[\sqrt{(1+|A_2|\tau)^2 + 4N(\varepsilon,\tau)|B_3|\tau} - \\ \qquad -(1+|A_2|\tau)]^{-1}, & \text{якщо } |B_3| \ne 0, \end{cases} \tag{13}$$

та

$$N(\varepsilon,\tau) = \frac{(|A_1| + |B_2|\tau)\varepsilon/\varphi(H)}{(|A_1| + |B_2|\tau + |B_1|\varepsilon\varphi(H))\,exp\{|A_1| + |B_2|\tau\} - |B_1|\varepsilon/\varphi(H)}.$$

У третьому та четвертому параграфах обчислюються мажорантні оцінки згасання розв'язків квадратичної системи з запізненням (8), що розташовані у кулі області асимптотичної стійкості. Знайдені коефіцієнти асимптотичного згасання розв'язків.

Для стійкості, рівномірній за запізненням, одержана наступна оцінка.

Т е о р е м а 4. Нехай існують параметр $0 \le \beta \le 1$ та додатно визначена матриця H такі, що виконується (9). Тоді для розв'язку $x(t)$ з кулі радіусу R (10) виконується оцінка зверху

$$|x(t)| \le \frac{R\varphi(H)\|x(0)\|_\tau \, exp\{-\gamma t/2\}}{R - \|x(0)\|_\tau [1 - exp\{-\gamma t/2\}]}, \tag{14}$$

де

$$\gamma = \frac{\lambda_{min}(C) - 2|HA_2|(\beta + \varphi(H))}{\lambda_{max}(H)}.$$

Для стійкості систем з запізненням, що залежить від параметрів системи, покладемо $\beta = 1$, тобто $A = A_1 + A_2$, а оцінка має такий вигляд.

Т е о р е м а 5. Нехай A асимптотично стійка матриця. Тоді при $\tau < \tau_0$, де τ_0 визначено в (11), для розв'язків $x(t)$ з кулі $R = \delta(\overline{R}, \tau)$ (12), вірна оцінка зверху

$$|x(t)| \le \begin{cases} \|x(\tau)\|, & \text{якщо} \quad 0 \le t \le \tau, \\ \dfrac{\overline{\mathrm{R}}\varphi(\mathrm{H})\|\mathrm{x}(\tau)\| \exp\{-\gamma \mathrm{t}/2\}}{\overline{\mathrm{R}} - \|\mathrm{x}(\tau)\|[1 - \exp\{-\gamma \mathrm{t}/2\}]}, & \text{якщо} \quad t \ge \tau, \end{cases} \tag{15}$$

де
$$\|x(\tau)\| = PL\, e^{L\tau} \left[L + P|B_1|(1 - e^{L\tau})\right]^{-1},$$

$$P = \left[1 + (|A_2| + |B_2|\|x(0)\|_\tau\right]\|x(0)\|_\tau, \qquad L = |A_1| + |B_2|\tau.$$

Виведення одержаних тверджень базується на розв'язанні диференціальних нерівностей для функцій Ляпунова та припущенні, що відповідний розв'язок знаходиться всередені області, яка обмежена поверхнею рівня функції Ляпунова.

У п'ятому та шостому параграфах для дослідження стійкості використовується функція Ляпунова дробово-раціонального вигляду (5). За допомогою леми 1 обчислені оцінки збіжності, які дають можливість більш точно визначати деякі характеристики перехідних процесів.

Позначимо

$$\gamma_0 = \frac{\lambda_{min}(C) - 2|HA_2|(\beta + \varphi(H))}{\psi'(0) + \lambda_{max}(H)},$$

$\psi'(0)$ — похідна функції $\psi(\gamma)$, при $\gamma = 0$, де

$$\psi(\gamma) = \lambda_{min}(C) - 2|HA_2|(\beta + \varphi(H)) - \frac{2z(\gamma)\varphi(H)}{1+\zeta z(\gamma)}\Big[|HA_2| +$$

$$+ |H||B_2|R\zeta\varphi(H) + |H||B_3|\varphi^2(H) + \frac{2+(\zeta+1)z(\gamma)}{1+\zeta z(\gamma)}\Big], \tag{16}$$

$$z(\gamma) = exp\{\gamma\tau/2\} - 1.$$

Т е о р е м а 6. Нехай існують параметр $0 \le \beta \le 1$ і додатно визначена матриця H такі, що виконується (9). Тоді для розв'язків $x(t)$ з початковими даними з кулі радиуса $R\zeta$ (10), $0 < \zeta < 1$ вірна оцінка збіжності

$$|x(t)| \le \frac{R\zeta\varphi(H)\|x(0)\|_\tau\, exp\{-\gamma t/2\}}{R\zeta - \|x(0)\|_\tau[1 - exp\{-\gamma t/2\}]}, \tag{17}$$

де $0 \le \gamma \le \gamma_0$.

Введемо такі позначення:

$$\gamma_0 = \frac{\lambda_{min}(C)(1-\tau/\tau_0)}{\widetilde{\psi}'(0) + \lambda_{max}(H)},$$

$\widetilde{\psi}'(0)$ — похідна функції $\widetilde{\psi}(\gamma)$, при $\gamma = 0$, де

$$\widetilde{\psi}(\gamma) = \lambda_{min}(C)(1-\tau/\tau_0) - \frac{2z(\gamma)\varphi(H)}{1+\zeta z(\gamma)}\Big[|HA_2|\Big(|A_1| + |A_2| +$$

$$+ \frac{2+(\zeta+1)z(\gamma)}{1+\zeta z(\gamma)}\sum_{i=1}^{3}|B_i|\overline{R}\zeta\varphi^2(H)\Big)\tau + |H||B_2|\overline{R}\zeta\varphi(H) +$$

$$+ |H||B_3|\overline{R}\zeta\varphi^2(H)\frac{2+(\zeta+1)z(\gamma)}{1+\zeta z(\gamma)}\Big], \quad z(\gamma) = exp\{\gamma\tau\} - 1.$$

Т е о р е м а 7. Нехай матриця $A = A_1 + A_2$ асимптотично стійка. Тоді при $\tau < \tau_0$, де τ_0 визначено в (11), область асимптотичної стійкості містить кулю радиусу $R = \delta(\overline{R}, \tau)$ (12) та для розв'язків $x(t)$ зі значеннями $\|x(\tau)\|$ з кулі радиусу $\overline{R}\zeta$, $0 < \zeta < 1$, вірна оцінка збіжності

$$|x(t)| \le \begin{cases} \|x(\tau)\|, & \text{якщо } 0 \le t \le \tau, \\ \dfrac{\overline{\mathrm{R}}\zeta\varphi(\mathrm{H})\|\mathrm{x}(\tau)\|\,\mathrm{exp}\{-\gamma \mathrm{t}/2\}}{\overline{\mathrm{R}}\zeta - \|\mathrm{x}(\tau)\|[1-\mathrm{exp}\{-\gamma \mathrm{t}/2\}]}, & \text{якщо } t > \tau, \end{cases} \tag{18}$$

де $\|x(\tau)\|$ визначено в (15) та $0 \le \gamma \le \gamma_0$.

У третьому розділі розглядаються задачі оптимального вибору параметрів стійкості систем з квадратичною правою частиною. Найбільш істотною характеристикою стійкості нелінійних систем є оцінка радіусу кулі області асимптотичної стійкості.

При використанні функцій Ляпунова, до яких входить симетрична додатно визначена матриця H, задача побудови найкращих оцінок характеристик систем, зокрема, одержання функцій Ляпунова, що дають гарантовану відповідь конструктивності умов стійкості, які було отримано в першому та другому розділах, зводиться до розв'язання оптимізаційних задач вигляду

$$H_0 = arg \inf_{H \in \overline{G}(H)} \Big\{ \varphi_0 \big[\lambda_{min}(C[H]), \lambda_{max}(C[H]) \big] \Big\}, \tag{19}$$
$$\varphi_i \big[\lambda_{min}(C[H]), \lambda_{max}(C[H]) \big] \leq 0, \quad i = \overline{1, m},$$

де $C[H]$ — лінійний матричний оператор, що представляє ліву частину рівняння Ляпунова, $\varphi_i[\cdot, \cdot]$ — функції, неперервні по обом змінним, $\overline{G}(H)$ — замкнута множина додатно напіввизначених матриць, які задовільняють додатковим обмеженням.

У першому параграфі розглядаються оптимізаційні задачі, до розв'язання яких приводять процеси побудови найбільш точних характеристик якості систем, що досліджуються. Детально описується коло питань, які необхідно розв'язати при дослідженні задач оптимізації (19). Дається короткий огляд основних напрямків розвитку методів негладкої оптимізації. Виділяються та детально розглядаються різні узагальнення і модифікації градієнтних методів. Оскільки екстремальні власні числа симетричних додатно визначених матриць є кусково неперервно-диференційованими функціями, то задача (19) уявляє собою задачу недиференційованої оптимизації. Для побудови оптимізаційної процедури градієнтного типу знайдені узагальнені градієнти функцій, що залежать від $\lambda_{min}(C[H])$ і $\lambda_{max}(C[H])$.

У другому параграфі розглядається оптимізація радіусу кулі, що лежить в області асимптотичної стійкості. Задача має вигляд

$$H_0 = arg \inf_{H \in \overline{G}(H)} \varphi_0(H), \quad \varphi_0(H) = -\frac{\lambda_{min}(-A^T H - HA)}{\lambda_{max}(H)} \sqrt{\frac{\lambda_{min}(H)}{\lambda_{max}(H)}}. \tag{20}$$

Тут $\overline{G}(H)$ — множина додатно напіввизначених матриць H, для яких $C = -A^T H - HA$ також додатно напіввизначені.

Доведено існування розв'язку задачи (20). Для її розв'язку виконує ться заміна функції мети $\varphi_0(H)$ на функцію

$$\Psi(H) = \lambda_{min}(-A^T H - HA)\sqrt{\lambda_{min}(H)} \rightarrow \sup_{H \in \overline{G}_1(H)} . \tag{21}$$

де

$$\overline{G}_1(H) = \{H: \ \lambda_{min}(-A^T H - HA) \geq 0, \ \ \lambda_{max}(H) \leq 1\},$$

та доводиться, що розв'язки задач (20) і (21) співпадають з точністю до множника.

Остаточно оптимізаційна задача (20) зводиться до опуклої задачі із обмеженнями

$$f_0(H) \rightarrow \min_H, \qquad\qquad f_1(H) \leq 0, \ \ f_2(H) \leq 0. \tag{22}$$

Тут

$$f_0(H) = -ln\{\lambda_{min}(-A^T H - HA)\} - \frac{1}{2} ln\{\lambda_{min}(H)\},$$
$$f_1(H) = -\lambda_{min}(-A^T H - HA), \qquad f_2(H) = \lambda_{max}(H) - 1.$$

Для числового розв'язку одержаної задачі використовуються градієнтний метод з розтягом простору в напрямку вектору різниці двух послідовних узагальнених градієнтів (R–алгоритм).

Детально розглянуті приклади, які показують високу швидкість збіжності R–алгоритму при практично повної відсутності коливань в околі розв'язку.

У третьому параграфі пропоновується альтернативний підхід побудови оптимальної оцінки області стійкості еліптичної форми методом дотику. Використовується квадратична функція Ляпунова $v(x) = x^T Hx$. Тут додатно визначена симетрична матриця H визначає форму області стійкості, що досліджується. У цій області виконується

$$v(x) > 0, \qquad\qquad \dot{v}(x) < 0.$$

Градієнти функцій $v(x)$ і $\dot{v}(x)$ мають вигляд

$$grad\, v(x) = 2Hx,$$
$$grad\, \dot{v}(x) = 2[A^T H + HA + B^T X^T H + HXB]x + \widetilde{x}.$$

Тут $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n)^T$ — вектор-стовпчик, компоненти якого обчислюються таким чином:

$$\widetilde{x}_i = x^T(\widetilde{B}_i H + H\widetilde{B}_i)x, \qquad i = \overline{1, n},$$

де $\widetilde{B}_i$ — квадратні $n \times n$ матриці, що складаються з стовпчиків блочної матриці B :

$$\widetilde{B}_i = \begin{pmatrix} b_{i1}^1 & b_{i+n,2}^2 & \cdots & b_{i+n(n-1),1}^n \\ b_{i2}^1 & b_{i+n,2}^2 & \cdots & b_{i+n(n-1),2}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{in}^1 & b_{i+n,n}^2 & \cdots & b_{i+n(n-1),n}^n \end{pmatrix}, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Фіксуючи поверхню $\dot{v}(x) = 0$, умова дотику поверхней $v(x) = \alpha$ і $\dot{v}(x) = 0$ має вигляд системи $n+1$ нелінійного рівняння

$$\begin{cases} x^T F(x, H)x = 0, \\ 2[Hp - x^T F(x, H)]x - \widetilde{x} = 0, \end{cases}$$

де

$$F(x, H) = A^T H + HA + B^T X^T H + HXB.$$

Розв'язок одержаної системи являє собою точки області $\{x : x^T Hx \leq \leq \alpha\}$, в яких не виконується умова асимптотичної стійкості. У кінці параграфу наведені приклади.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

1. Одержані двобічні мажорантні оцінки розв'язків диференціальних систем з квадратичною правою частиною.

2. Обчислен гарантований радіус кулі області асимптотичної стійкості нульового положення рівноваги квадратичної системи без запізнення.

3. За допомогою функції Ляпунова дробово-раціонального вигляду знайдені мажорантні оцінки збіжності розв'язків квадратичної системи, що лежать у кулі області асимптотичної стійкості.

4. Одержані умови стійкості нульового розв'язку квадратичної системи з запізненням, рівномірні по відхиленням аргумента, та з запізненням, яке залежить від параметрів системи.

5. З використанням функції Ляпунова дробово-раціонального вигляду одержані оцінки збіжності розв'язків квадратичних систем з запізненням.

6. Шляхом розв'язання оптимізаційної задачи отриман максимальний радіус кулі області асимптотичної стійкості.

За темою дисертації опубліковані такі роботи.

1. Давыдов В.Ф. Построение и оптимизация оценки области устойчивости квадратичных дифференциальных систем градиентным методом // Украинская конференция "Моделирование и исследование устойчивости процессов": Тезисы докладов конференции. - Киев, 1992. - С.47.

2. Давыдов В.Ф. Мажорантные оценки решений квадратичных дифференциальных систем // Крымская осенняя математическая школа "Метод функций Ляпунова и его приложения": Тезисы докладов. - Симферополь, 1993. - С.16-17.

3. Давыдов В.Ф. Исследование устойчивости квадратичных дифференциальных систем с запаздывающим аргументом // Украинская конференция "Моделирование и исследование устойчивости систем": Тезисы докладов конференции, ч.1. - Киев, 1993. - С. 38.

4. Давыдов В.Ф. Мажорантные оценки решений квадратичных дифференциальных систем // Межгосударственная научная конференция "Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация": Тезисы докладов. - Минск, 1993. - С.11.

5. Давыдов В.Ф. Мажорантные оценки решений квадратичных дифференциальных систем с запаздыванием // Украинская конференция "Моделирование и исследование устойчивости систем": Тезисы докладов конференции. - Киев, 1994. - С.39.

6. Давыдов В.Ф. Исследование устойчивости и получение качественных характеристик квадратичных систем // Вторая крымская математическая школа "Метод функций Ляпунова и его приложения": Тезисы докладов. - Симферополь, 1995. - С.21.

7. Давыдов В.Ф. Оценки решений квадратичных дифференциальных систем с малым запаздыванием. - Киев, 1994. - 10с. / Деп. в ВИНИТИ 09.08.95. - N 2403 - В95.

8. Давыдов В.Ф. Мажорантные оценки решений квадратичных дифференциальных систем с запаздыванием // Украинский математический журнал. - 1995. - Т.47, N 4. - С.542-545.

9. Давидов В.Ф., Хусаінов Д.Я. Мажорантні оцінки розв'язків диференціальних систем з квадратичною правою частиною // Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. - 1994. - С. 206-211.

10. Хусаінов Д.Я., Давидов В.Ф. Оцінка області стійкості квадратичних диференціальних систем // Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. - 1991. - Вип.2. - С. 3-6.

11. Хусаинов Д.Я., Давыдов В.Ф. Исследование устойчивости квадратичных систем с запаздыванием // VIII Конференция "Качественная теория дифференциальных уравнений": Тезисы докладов. - Самарканд, СНГ. - 1992. - С.120.

12. Хусаінов Д.Я., Давидов В.Ф. Оптимізація оцінки області стійкості квадратичних систем градієнтним методом // Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. - 1992. - Вип.4. - С.27-33.

13. Хусаинов Д.Я., Давыдов В.Ф. Получение гарантированного условия асимптотической устойчивости систем с одним запаздыванием // Автоматика. - 1993. - N 1. - С.16-20.

14. Хусаинов Д.Я., Давыдов В.Ф. Устойчивость запаздывающих систем квадратичного вида // ДАН Украины. - 1994. - N 7. - С. 11-13.

15. Хусаинов Д.Я., Давыдов В.Ф., Шевеленко Е.Е. Исследование устойчивости систем с нелинейной правой частью // Міжнародна математична конференція, присвячена пам'яті Ганса Гана: Тезисы докладов. - Черновцы, Украина. - 1994. - С.150.

16. Хусаинов Д.Я., Давыдов В.Ф., Шевеленко Е.Е. Исследование устойчивости нелинейных систем с запаздыванием // Украинская конференция "Моделирование и исследование устойчивости систем" (Моделирование систем): Тезисы докладов конференции. - Киев, 1995. - С.110.

17. Бычков А.С., Давыдов В.Ф., Марценюк В.П., Хусаинов Д.Я., Цитрицкий Е.О. Негладкая оптимизация оценок устойчивости динамических систем // III Международный семинар "Негладкие и разрывные задачи управления. Оптимизация и их приложения": Тезисы докладов, ч.1. - Санкт-Петербург, 1995. - С. 27-29.

18. Davydov V.F. Majoranty Estimates of Solutions of Quadratic Systems with Delay Argument // Abstracts of Invited Lectures and Short Communications Delivered at the Fourth International Colloquium on Differential Equations. - Plovdiv, Bulgaria, 1993. - P.45.

19. Davydov V.F. Stability Investigation of Quadratic Systems with Delay Argument // VIII Czechoslovak Conference of Differential Equations and Their Applications. EQUADIFF-8. Additional Abstracts. - Bratislava, 1993. - P.7.

20. Davydov V.F. Majorant Solutions Estimates of Differential Quadratic Systems with Delay // International Conference on Functional Differential Equations and Applications. Abstracts. - Moscow, 1994. - P.20-21.

21. Davydov V.F. Stability Investigation of Quadratic Systems with Delay // Second International Conference on Differential Equations and Applications. Abstracts. - Vesprem, Hungary, 1995. - P.23.

Давыдов В.Ф. Исследование устойчивости и построение качественных характеристик квадратичных дифференциальных систем. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.04 - системный анализ и теория оптимальных решений. Киевский университет, Киев, 1996.

Диссертация содержит сведения, нашедшие отражение в двадцати одной опубликованной научной работе автора. В диссертации предложена компактная матричная форма записи дифференциальных систем с квадратичными правыми частями. Вторым методом А.М.Ляпунова с функциями квадратичного и дробно-рационального вида получены двусторонние оценки решений квадратичных систем. Вычислен гарантированный радиус шара области асимптотической устойчивости нулевого решения. Получены условия устойчивости квадратичных систем с запаздыванием, равномерные по отклонению аргумента, и с запаздыванием, зависящим от параметров системы. Решена оптимизационная задача построения максимального радиуса шара области асимптотической устойчивости. Проведены численные эксперименты, показывающие конструктивность полученных оценок и условий, а также эффективность оптимизации качественных характеристик.

Davydov V.F. Stability investigation and construction of qualitative characteristics of quadratic differential systems. Manuscript. Thesis for a degree of Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, the speciality 01.05.04 - system analysis and theory of optimal solutions. Kiev University, Kiev, 1996.

Thesis contains information published in twenty one scientific author's papers. Compact matrix notation form of differential systems with quadratic right-hand sides are proposed in the thesis. Two-sided estimates of solutions of the quadratic system are obtained by Liapunov's second method with functions of quadratic and rational forms. Guaranteed radius of the ball of asymptotic stability region of zero solution is calculated. Stability conditions of quadratic systems with delay, uniformly by argument deviation, and with delay depending on system's parameters are derived. Optimization task of receiving maximum value of the radius of asymptotic stability region is solved. Numerical experiments showing constructibility of obtained conditions and estimates, and optimization efficiency of qualitative characteristics are conducted.

Ключові слова: квадратична система, функція Ляпунова, матричне рівняння Ляпунова, асимптотична стійкість, запізнення, недиференційована оптимізація, узагальнений градієнт.

Ab 33.815