Національна Академія Наук України

Інститут теоретичної фізики імені М.М.Боголюбова

На правах рукопису

Енольський
Віктор Зелікович

МЕТОД РЕДУКЦІЇ ДО ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ В ТЕОРІЇ СОЛІТОНІВ

Спеціальність 01.04.02 — теоретична фізика

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття
вченого ступеня доктора
фізико-математичних наук

Київ–1995р.

Дисертацією є рукопис. Роботу виконано в Інституті теоретичної фізики, Інституті металофізики та Інституті магнетизму НАН України.

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук, професор Є.Д.Білоколос.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор А.У.Клімик,
доктор фізико-математичних наук І.М.Крічевер,
доктор фізико-математичних наук О.Л.Ребенко.

Провідна організація: Харківський фізико технічний інститут низьких температур НАН України, м.Харків.

Захист відбудеться "22" "лютого" 1996 р. о 11-й годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.76.01 при Інституті теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України (252130, м.Київ-143, вул. Метрологічна 14-Б).

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту теоретичної фізики на вул. Метрологічній 14.

Автореферат розіслано "____" "____________" 199__ р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
Доктор фізико-математичних наук В.Є.Кузьмичев

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

В середині XIX сторіччя Якобі, Абель, Вейерштрасс, і, в особливості, Ріман створили теорію алгебраїчних та абелівських функцій. В галузі математичної фізики ця теорія була вперше використана Якобі, Нейманом, Ламе, Кірхгофом, та іншими. Але після блискучої роботи Ковалевської про новий інтегровний випадок обертання твердого тіла у гравітаційному полі навколо нерухомої точки, теорія абелівських функцій розвивалась, в основному, без зв'язку з математичною фізикою. Декілька визначних робіт Бейкера та Бурхнала та Чаунді, що були написані між 1919 та 1928 роками, були невдовзі забуті та їх результати були перевідкриті тільки в 1974–1976 у зв'язку із створенням так званої *теорії скінченнозонного інтегрування*, що виникла в результаті побудови періодичних розв'язків рівняння Кортевега — де Вріза.

Ця проблема, в свою чергу, виникла в *теорії солітонів*, що була започаткована роботою Гаднера, Гріна, Крускала, Міури у 1967 році і далі розвивалась, в основному, декількома групами колишнього СРСР та США. В Москві важливі результати з теорії солітонів були отримані Захаровим, Манаковим та Міхайловим; далі Новіков з Дубровіним та Крічевером започаткували метод скінченнозонного інтегрування; потім до цієї тематики приєднались Гельфанд, Манін та Переломов. Петербурзька група була створена Фаддеевим із співробітниками – Корепіним, Кулішем, Рейманим, Склянініним, Семеновим - Тян Шанським, Ізергіним, Ітсом та Матвеевим. Потсдамську групу утворювали Абловитц, Кауп, Ньюел та Сегур. В Арізоні теорія солітонів розвивалася Флашкою, Лембом та Мак Лафліним; в Нью-Йорці - Лаксом, Кейсом, Трубовицем. Слід також відмітити внесок таких дослідників як Шабат, Мозер, Костант та Аллер, що не належали до певних груп.

В Україні визначні результати у цій тематиці були отримані у Харкові Марченком із співробітниками – Котляровим, Островським, Хрусловим, а також Дрінфельдом та Пастуром. У Києві в галузі теорії солітонів та суміжних областях працюють Березанський, Далецький, Митропольський, також Білоколос, Голод, Нижник, Самойленко та інші.

Відкриття теорії скінченнозонного інтегрування вплинуло на подальший розвиток математичної та теоретичної фізики – різноманітні конструкції пов'язані з класичною теорією ріманових поверхонь стали широко застосовуватись в точно розв'язуваних модельних задачах квантової теорії поля та квантової статистичної фізики, в фізиці твердого тіла, в теорії плазми, гідродинаміці, тощо.

В той же час аналітичний апарат функцій пов'язаних з Рімановими поверхнями, так званих абелівських функцій, інтенсивно розвивався у минулому сторіччі, але не став таким же еффективним інструментом, як теорія еліптичних функцій, які являються частинним випадком абелівських функцій. Ця обставина поновлює інтерес до абелівських функцій з метою їх застосування до сучасних проблем фізики і математики.

В роботі розглядається одна з проблем теорії абелівських функцій — *теорія редукції абелівських функцій до молодших родів* — у контексті її застосування до скінченнозонних розв'язків цілком інтегровних рівняннь у частинних похідних та скінченновимірних цілком інтегровних динамічних систем. Ми даємо ефективний метод, який дозволяє накласти мінімальні обмеження на скінченнозонні розв'язки, з тим, щоб їх можна б було звести до еліптичних функцій - *еліптичних солітонів*.

<u>Стан проблеми.</u> В теорії скінченнозонного інтегру-

вання відомі випадки, коли скінченнозонний потенціал виражається через еліптичні функції. Зокрема, такими потенціалами являються g–зонні потенціали Ламе,

$$u(x) = g(g+1)\wp(x) \tag{1}$$

рівняння Шредінгера,

$$\left\{\frac{d^2}{d\,x^2} - u(x)\right\}\Psi(x;z) = z\Psi(x;z), \tag{2}$$

де $\wp$ є еліптична функція Вейєрштраса, а z є координата гіпереліптичної кривої. Під дією КдВ-потоку цей потенціал перетворюється на еліптичний розв'язок рівняння КдВ, що має вигляд

$$u(x) = 2\sum_{j=1}^{g(g+1)/2} \wp(x - x_j(t)), \tag{3}$$

де "частинки" $x_i(t)$ еволюціонують під дією певного потоку системи Калоджеро–Мозера, тобто дискретної інтегровної системи N часток, що взаємодіють з парним потенціалом, (Мак Кін Мозер, Еро, 1977) $u(x_i, x_j) = 2\wp(x_i - x_j)$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, N$.

Іншим прикладом двозонного розв'язку в еліптичних функціях є розв'язок (Б'янкі, 1927)

$$\phi(x,t) = 4arctan(F(x)G(t)), \tag{4}$$

де $F(x)$ та $G(t)$ є деякі еліптичні функції, рівняння "sine-Gordon",

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = \sin\phi. \tag{5}$$

Після відкриття скінченнозонного інтегрування С.П.Новіков сформулював у 1974 році таку проблему:

При яких обмеженнях на параметри скінченнозонного розв'язку цілком інтегровного рівняння цей розв'язок може бути зведений до молодших родів і, зокрема, — до еліптичних функцій ?

Іншими словами, при якій спеціалізації рімановоі поверхні, що ассоційована із скінченнозонним розв'язком, відповідні абелівські функції, будучи невиродженими, зводяться до молодших родів і, зокрема, – до еліптичних функцій. Редукція абелівських функкцій до еліптичних функцій є бажаною не тільки для того щоб отримувати більш зручні формули для обчисленнь. Така редукція дозволяє виділити періодичні розв'язки з множини скінченнозонних. Іншим аспектом редукції є те, що такі розв'язки являються тісно зв'язаними з різноманітними скінченновимірними динамічними системами.

Актуальність теми. Виведення еліптичних розв'язків з квазіперіодичних є важливим для багатьох фізичних задач. В результаті редукції скінченнозонний розв'язок представляється у вигляді суперпозиції еліптичних солітонів і являє собою далеке узагальнення багатосолітонних формул. Розвинений метод дозволяє отримувати нові розв'язки в еліптичних функціях в рамках єдиного підходу.

Редукція до еліптичних функцій дозволяє зробити більш ефективними обчислення з квазі періодичними ров'язками, тому що у разі їх зведення до еліптичних фукнкцій можна уникнути багатовимірних нескінчених сум, через які виражаються тета функції Рімана.

Це зведення цікаво із суто математичної точки зору, воно дозволяє, зокрема, дати геометричну інтерпретацію редукованих скінченнозонних розв'язків, як таких абелівських функцій, для яких відповідна алгебраїчна крива є N-листне накриття над еліптичною кривою – тором.

Мета дослідження. Метою роботи являються:

а) Знаходження необхідних і достатніх умов на параметри, при яких скінченнозонні розв'язки цілком інтегровних рівнянь математичної фізики, що виражаются через абелівські функції алгебраїчної кривої, зводяться до еліптичних функцій – еліптичних солітонів.

б) Побудова ефективних алгоритмів для здійснення такої редукції та для опису ассоційованих спектральних характеристик — рівняння алгебраїчної кривої, явних формул для накриття над тором, обчислення власних функцій відповідної лінійної спектральної проблеми та явні вирази для потенціалів, що редукуються до еліптичних функцій.

в) Побудова багатовимірних узагальнень точно розв'язуваних одновимірних випадків рівняння Шредінгера, побудова власних функцій – функцій Блоха та обчислення спектру.

г) Застосування розвиненого методу редукції до еліптичних функцій в задачах фізики та механіки для знаходження нових розв'язків в еліптичних функціях.

<u>Теоретична та практична цінність роботи.</u> Робота розв'язує проблему редукції скінченнозонних квазіперіодичних розв'язків цілком інтегровних рівняннь до еліптичних функцій. Розвинений апарат дозволяє отримати нові розв'язки в еліптичних функціях, побудувати нові приклади еліптичних потенціалів і відповідні хвильові функції, розглянути різноманітні відомі випадки редукції з єдиної точки зору.

<u>Використання результатів.</u> Результати дисертації можуть бути використані для виділення періодичних та еліптичних розв'язків з квазіперіодичних розв'язків рівняннь, що інтегруються у тета функціях Рімана. Вони дозволяють дати класифікацію еліптичних потенціалів рівняння Шредінгера і описати всі такі потенціали явно в термінах тета функцій Якобі. Результати дисертації ставлять ряд нових питаннь, що стимулюють дослідження алгебраїчних кривих (зокрема простору

їх модулів) з метою побудови ассоційованих з ними скінченнозонних розв'язків спеціального виду.

Особистий внесок автора. Показано, що проблема редукції скінченнозонних розв'язків цілком інтегровних рівнянь математичної фізики, що виникла в контексті сучасних проблем фізики, зводиться до класичної проблеми редукції тета функцій Рімана до тета функцій Якобі, та абелівських інтегралів, що ассоційовані з алгебраїчною кривою рода $g > 1$, до еліптичних інтегралів. Розв'язок цієї проблеми, що був започаткований в працях Вейерштрасса, Пуанкаре та інших пристосовується до сучасних задач теорії скінченнозонного інтегрування. Зокрема знайдені ефективні критерії редукції скінченнозонних потенціалів до еліптичних функцій у вигляді умов на тета константи. Розвинений альтернативний підхід до побудови еліптичних скінченнозонних потенціалів на основі спеціального еліптичного анзацу для функції Бейкера – Ахієзера. Побудоване двовимірне узагальнення однозонного потенціалу Ламе на основі редукції σ-функцій Клейна до еліптичних функцій. Розвинений метод застосований до задач фізики та механіки – задачі Ковалевської про обертання твердого у гравітаційному полі навколо нерухомої точки, інтегровних випадків системи Енона–Еліса, задачі про динаміку ультразвукових давидівських солітонів, задачі про еліптичні солітони у системі зв'язаних оптичних хвильоводів, задачі про інтегровні випадки однорідного потенціалу четвертого ступеня. В усіх цих задачах знайдені нові еліптичні розв'язки на основі розвиненого методу редукції.

Публікації за темою дисертації. Матеріали дисертації опубліковано у 31 праці, серед яких одна монографія, 30 статей у наукових виданнях (перелік публікацій наведено наприкінці автореферату).

Апробація роботи. Основні результати було викладено у доповідях та обговорено на таких конференціях та семінарах:

- Семінар відділу теоретичної фізики Інституту металлофізики НАН України,
- Семінар відділу математичних методів в теоретичній фізиці Інституту теоретичної фізики НАН України,
- Семінар "Алгебраїчні структури в математичній фізиці" факультуту прикладної математики Київського політехнічного інституту,
- Семінар кафедри вищої геометрії та топології Московського університету,
- Київські міжнародні конференції "Нелінійні та турбулентні процеси у фізиці" 1983, 1985, 1987,
- Інститут ім. Ейлера в Санкт Петербурзі,
- Міжнародна конференція "Нелінійні диференціальні рівняння в частинних похідних", Варна, (Болгарія) 1988,
- Міжнародна конференція "Нелінійні когерентні структури у фізиці та біології", Едінбург, (Шотландія) 1995,
- Міжнародна конференція "Комплексна динаміка у відкритих системах", Копенгагеч, (Данія) 1995,
- Семінари університетів Едінбурга та Лідса (Великобританюя),
- Семінар відділу фізики університета м. Салерно (Італія),

- **Семінар відділу математики Технічного університету м. Берлін (Німеччина),**
- **Семінар Інституту фізики Польської Академії Наук, м. Варшава (Польща),**
- **Семінар відділу прикладної математичної фізики Датського технічного університету м. Лінгбі (Данія).**

ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

Дисертація містить 254 сторінки машинописного тексту і складається із вступу, чотирьох глав та списку літератури (зі 102 найменувань).

<u>У вступі</u> викладається історія питання, дається аналіз сучасної літератури, та формулюється проблема.

Рівняння Кортевег.. – де Вріза,

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx} \tag{6}$$

було виведене наприкінці XIX сторіччя для опису хвиль на мілкій воді. Найпростіші розв'язки (6) мають вигляд $u(x - vt)$. Для того, щоб їх знайти, досить розв'язати класичну задачу про обертання еліптичного інтеграла. Поклавши $u = u(x - vt)$, знаходимо

$$x(u) = \int_\infty^u \frac{d\tau}{\sqrt{2\tau^3 + v\tau^2 + 2C\tau + C_1}} + C_2 \ . \tag{7}$$

Знаходження u як функції від x є класична проблема обертання еліптичних інтегралів. Її загальний розв'язок являє собою подвійно-періодичну функцію $u = 2\wp(x) + \gamma$ однієї комплексної змінної x – так звану еліптичну функцію Вейерштраса.

Гарднер, .'рін, Крускал та Міура у 1967 році винайшли метод інтегрування рівняння КдВ з швидко спадаючими початковими ..аними – так зв..ний метод оберненої задачі теорії розсіяння. Цей метод безпосередньо зв'язаний з спектральною терією оператора Шредінгера L з потенціалом $u(x,t)$. В основі метода лежить так зване представлення Лакса для рівняння КдВ, що було відкрите Лаксом у 1968 році:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial t} = [L, A], \\
&L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t) \quad , \\
(8) \qquad &A = 4\frac{d^3}{dx^3} - 3\left(u\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}u\right).
\end{aligned}
$$

З представлення Лакса випливає, що власні значення оператора L не залежать від часу t. У випадку швидко спадаючих початкових даних представлення Лакса дозволяє вивести просте правило еволюції для даних розсіяння оператора L, тобто для коеффіцієнтів розсіяння та нормалізаційних множників. Загальновідома процедура реконструкції потенціала за його даними розсіяння (що була раніше розвинена Гельфандом, Левітаном, Марченком, Фаддеєвим та іншими) дозволяє перетворити просту еволюцію даних розсіяння в розв'язок рівняння КдВ.

У випадку початкового потенціалу $u(x,0)$, що відповідає нульовому коеффіцієнту відбиття (остання умова є іваріантною по відношенню до динаміки КдВ), обернена проблема може бути розв'язана точно і призводить до важливого класу розв'язків рівняння КдВ - так званим N-солітонним розв'язкам. Ці розв'язки мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&u(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det M \quad , \\
(9) \qquad &M_{ij} = \delta_{ij} + \frac{2\sqrt{P_iP_j}}{P_i + P_j}\cdot\exp\left(\frac{\xi_i + \xi_j}{2}\right), \\
&\xi_i = P_ix - P_i^3t + \xi_{io},\ i,j = 1,\ldots,N, \\
&P_i > 0,\ P_i \neq P_j.
\end{aligned}
$$

У (9) N є число від'ємних власних значень λ_i оператора L, $P_i = 2\sqrt{-\lambda_i}$, а дійсні сталі ξ_{i0} можуть бути довільними.

Безпосереднє застосування методу оберненої задачі до випадку періодичних початкових умов виявилось неможливим через відсутність ефективних методів розв'язку спектральної задачі для лінійного оператора з періодичними коеффіцієнтами. Як відомо спектр такого оператора має зонну структуру, тобто містить послідовність сегментів $[E_{2k+1}, E_{2k+2}]$, $k = 0, 1, \ldots$, абсолютно неперервного спектру, що розділяються лакунами: $(-\infty, E_1)$, (E_2, E_3), $\ldots$, (E_{2k}, E_{2k+1}), $\ldots$. Довжина k–тої зони прямує до нуля коли $k \to \infty$ для всіх неперервних періодичних потенціалів. Може так статися, що число лакун у спектрі оператора Шредінгера скінченне. Тоді відповідний потенціал називається *скінченнозонним потенціалом*.

Роль скінченнозонних потенціалів у проблемі аналізу рівняння КдВ була відкрита незалежно та з різних точок зору Новіковим, Дубровіним, Крічевером, Ітсом, Матвеєвим, Лаксом та Марченком. Виявилось, що скінченнозонний потенціал є розв'язком стаціонарного вищого рівняння КдВ (*рівняння Новікова*). Далі виявилось, що певний класс скінченнозонних розв'язків зводиться до проблеми обертання Якобі для дволистної рімановой поверхні алгебраїчної кривої

$$\mu^2 = \prod_{j=1}^{2g+1} (\lambda - E_j), \tag{10}$$

де $E_j's$ являються границями зон. Така обернена задача була розв'язана Ахієзером у 1976 році для $g = 1$, тобто для випадку еліптичної кривої. Було також помічено, що пара блохівських розв'язків $\psi_{1,2}(x, z)$, $\psi_{1,2}(0, z) = 1$ розглядуваного скінченнозонного потенціалу може бути інтерпретована як значення аналітичної функції $\psi(x, P)$, $P \in X$, з g полюсами P_j які не залежать від x. В околі нескінченно віддаленої точки ця функція маї таку асимптотичну поведінку

$$\psi(x,P) \cong \exp ix\sqrt{z},\ z=\pi(P) \quad ,$$

де $\pi(P)$ є канонічна проекція точки $P \in X$ на комплексній площині. Ці дві умови – полюсна структура та поведінка на нескінченності визначають таку функцію однозначно.

У 1975 році Ітс та Матвєєв розв'язали відповідну задачу обертання Якобі явно у такому вигляді:

$$(11) \quad u(x) = -2\frac{d^2}{dx^2}\ln\theta(x\mathbf{g}+\mathbf{l};\tau)+C \quad ,$$

$$(12) \quad \theta(\mathbf{p};\tau) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^g} \exp\{(\pi i\tau\mathbf{k},\mathbf{k})+2\pi i(\mathbf{p},\mathbf{k})\}, \quad \mathbf{p}\in\mathbb{C}^g \quad ,$$

де τ є матриця періодів рімановоі поверхні алгебраїчної кривої (10) а E_j є границі неперевного спектру відповідного оператора Шредінгера. Незалежно зведення спектрального аналізу оператора Хілла до проблеми обертання Якобі було знайдене Мак Кіном та Моербеке (1975) та Мак Кіном та Трубовіцем (1976)

Для того, щоб потенціал рівняння Шредінгера був розв'язком рівняння КдВ, функція $\mathbf{l}(t)$ повинна бути лінійною функцією t

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{l}(0) + \mathbf{W}\cdot t \quad ,$$

де вектор $\mathbf{W}$ повністю визначається границями спектру.

Власні функції рівняння Шредінгера з потенціалом виду (11) були побудовані явно Ітсом у вигляді

$$(13) \quad \psi(x,P) = \frac{\theta\left(\int_\infty^P \omega + Ux + \mathbf{D};\tau\right)\theta(\mathbf{D};\tau)}{\theta\left(\int_\infty^P \omega + \mathbf{D};\tau\right)\theta(Ux+\mathbf{D};\tau)}\exp(\Omega_1(P)x),$$

де $P=(\mu,\lambda)$ та $\Omega_1(P)$ є абелевий інтеграл другого типу. Далі після важливих робіт Крічевера (1976, 1977) ця ψ-функція стала основним знаряддям теорії.

В той же час сформульоване вище питання про те, при яких обмеженнях на параметри скінченнозонний розв'язок, що відповідає невиродженній алгебраїчній кривій, зводиться до молодших родів, і зокрема – до еліптичних розв'язків, не було вирішене. Диссертаційна робота мала за мету заповнити цю прогалину.

У першій главі, що має назву *Редукція абелівських функцій до молодших родів*, для розв'язання сформульованої проблеми ми використовуємо класичну теорію редукції Вейерштрасса та Пуанкаре абелівських функцій до молодших родів. Ми також використовуєм тета функціональний формалізм, викладений у відомих монографіях та класичній журнальній літературі (Крацер (1903), Крацер та Віртінгер (1912), Ігуса(1972), Фей(1973), Раух та Фаркаш (1974), Гріффітс та Харріс (1978), Фаркаш та Кра (1980), Мамфорд (1983)).

Ми наводимо основні твердження теорії редукції в Розділі 2.1 і далі пристосовуєм цю теорію до задач редукції скінченнозонних розв'язків цілком інтегровних рівняннь математичної фізики. Зокрема основне твердження теорії редукції — *Теорема Вейерштрасса–Пуанкаре про повну звідність* — дає необхідню та достатні умови, при яких матриця τ з зігелевського напівпростору ступеня g, S_g, зводитья під дією деякого перетворення G з $Sp(2g, \mathbb{Z})$, $g > 1$ (в цьому контексті g є натуральне число, що є родом алгебраїчної кривої для "якобієвих" точок τ) до вигляду

$$G \cdot \tau = \begin{pmatrix} \tau' & Q \\ Q^T & \tau'' \end{pmatrix}, \tag{14}$$

де τ' та τ'' є відповідно $n \times n$ та $(g-n) \times (g-n)$ матриці та Q є $(g-n) \times n$ раціональна матриця. Ці умови виділяють многовид *звідних точок* у S_g. Звідні точки мають таку властивість:

Теорема I. [Білоколос, Енольський 1982, Енольський 1983, Енольський 1984] *Нехай τ є звідна точка у $\mathcal{S}_g$ а N є таке найменше натуральне число, що матриця NQ являється цілочисельною. Тоді тета функція $\theta(\mathbf{z};\tau)$ виражиється через тета функції N-того порядку $\vartheta(\mathbf{z}'; N\tau')$, $\theta(\mathbf{z}''; N\tau'')$, де вектори $\mathbf{z}'^T = (z_1, \ldots, z_n)$ та $\mathbf{z}''^T = (z_{h+1}, \ldots, z_g)$.*

Доведення основане на теоремі додав. ння Коізумі (1976) для тета функцій N-того порядку.

У випадку алгебраїчних кривих (якобієві точки у $\mathcal{S}_g$) умови звідності означають що ассоційована із звідною τ-матрицею алгебраїчна крива C_g накриває N-листно алгебраїчну криву $C_{g'}$, що ассоційована з матрицею τ'.

Ми завершуємо цей Розділ формулюванням *Схеми редукції* для алгебраїчних кривих в термінах умов в просторі модулів, які дозволяють сконструювати накриваючу C_g, накриття $\pi : C_g \to C_{g'}$ та отримати явні формули для зведення тета функцій до еліптичних функцій

У Розділі 2.2 ми застосуємо ці результати для опису скінченнозонних потенціалів. Ми розглядаємо скінченнозонні потенціали рівняння Шредінгера, що даються формулою Ітса–Матвеєва і виділяємо два випадки (див. статті [Білоколос, Енольський 1987, 1988, 1989, 1994]).

Перший випадок є випадок, коли скінченнозонні потенціали зводяться до еліптичних функцій з неспіввимірними модулями і таким чином розв'язок рівняння КдВ залишається квазі періодичною функцією по x, незважаючи на те, що сам розв'язок виражається через еліпичні функції.

Для того, щоб отриманий еліптичний розв'язок став еліптичною періодичною функціїю, ми маємо накласти додаткові умови співвимірності компонент обмоточних векторів.

Другий випадок є випадок, в якому скінченнозонний потеціал зводиться до еліптичної функції по x.

Означення. g–зонний потенціал $u(x)$, що ассоціюється з кривою C_g, називається N-еліптичним, якщо крива C_g накриває N–листно тор C_1. Позначимо N–еліптичний потенціал через $u_N(x)$.

В першому випадку редукція описується такою теоремою.

Теорема II. [Білоколос, Енольський 1987, 1994] *g–зонний N–еліптичний потенціал $u(x)$ має вигляд*

$$\begin{aligned} u(x,t) = &-\frac{2}{N}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\sum_{\mathbf{p}_N} C_{\mathbf{p}_N}\theta\begin{bmatrix} 2p_{N1} \\ 2kp_{N2} \end{bmatrix} \\ &\times(NU_1x+NV_1t+NW_1;N\tau_{11}) \\ &\times\theta\begin{bmatrix} 2p_{N2} & 2p_{N3} & ,\ldots, & 2p_{Ng} \\ 2kp_{N1} & 0 & ,\ldots, & 0 \end{bmatrix} \\ &\times\left(N\tilde{\mathbf{U}}x+N\tilde{\mathbf{V}}t+N\tilde{\mathbf{W}};N\tilde{\tau}\right)+C, \end{aligned} \tag{15}$$

де сумування розповсюджується на повний набір представників $\mathbf{p}_N=(p_{N1},\cdots,\cdots p_{Ng})$ з множини $(1/N)\mathbb{Z}^g$, $\mathbf{U}=(U_1,\tilde{\mathbf{U}})$, $\mathbf{V}=(V_1,\tilde{\mathbf{V}})$, $\mathbf{W}=(W_1,\tilde{\mathbf{W}})$, матриця $\tilde{\tau}$ утворена з τ виключенням першого рядка, який має вигляд $(\tau_{11},\,k/N,\,0,\,\ldots,\,0)$ і першого стовпчика; постійні $C_{\mathbf{p}_N}$ вираховуються за формулою

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{p}_N} = &\exp\left(\frac{1}{2}\pi ikp_{N1}p_{N2}\right) \\ &\times\sum_{\substack{p_j \\ j=N-1,\ldots,2}}\theta\begin{bmatrix} 2\mathbf{p}_N-2\mathbf{p}_{N-1} \\ 0 \end{bmatrix}(\mathbf{0};N(N-1)\tau) \\ &\times\theta\begin{bmatrix} 2\mathbf{p}_{N-1}-2\mathbf{p}_{N-2} \\ 0 \end{bmatrix}(\mathbf{0};(N-1)(N-2)\tau)\cdots \\ &\times\theta\begin{bmatrix} 2\mathbf{p}_3-2\mathbf{p}_2 \\ 0 \end{bmatrix}(\mathbf{0};6\tau)\times\theta\begin{bmatrix} 2\mathbf{p}_2 \\ 0 \end{bmatrix}(\mathbf{0};2\tau). \end{aligned}$$

В усіх формулах через $\theta[\varepsilon](\cdot;\tau)$ позначена тета функція з характеристикою $[\varepsilon]$.

Другий випадок описується такою теоремою

Теорема III. [Білоколос, Енольський 1994] *g-зонний потенціал $u(x)$ являється еліптичною функцією тоді і тільки тоді коли*

i) невироджена гіпереліптична крива C_g, що асоційована з потенціалом, накриває N-листно тор C_1;

ii) рівняння

$$U_1 \neq 0, \qquad U_2 = U_3 = \ldots = U_g = 0 \tag{16}$$

мають розв'язки у точках $\tau \in \mathcal{S}_g$ для такого базису $(A, B) \in H_1(C_g, \mathbb{Z})$, що матриця τ має вигляд

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & k/N & 0 & \cdots & 0 \\ k/N & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \tau' & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}, \tag{17}$$

де k є натуральне число $1 \leq k < N$

Зокрема, теорема показує як виділити еліптичні потенціали Ламе з квазі періодичних потенціалів.

Многовид у просторі модулів, що описується умовами Теореми III, є підмноговид $\mathcal{E}$ в $\mathcal{R}$; у випадку роду 2; він являє собою так званий *многовид Ембера*.

Ми називаємо тета константами значення тета функцій та їх похідних при нульовому значенні аргумента. На протязі всієї глави ми розвиваємо підхід, що дозволяє виразити всі параметри у термінах тета констант і сформулювати умови редукції у вигляді умов на тета константи. Ми резюмуємо цей підхід у вигляді такої теореми:

Теорема IV. [Білоколос, Енольський 1987, 1989] *Многовид $\mathcal{R}$ звідних точок, у яких скінченнозонний потенціал зводиться до еліптичних функцій і залишається квазі періодичною функцією та многовид $\mathcal{E}$ звідних почок для яких скінченнозонний потенціал зводиться до еліптичної періодичної функції описуються умовами обертання у нуль певних тета констант.*

Останній Розділ 2.3 Глави 2 присвячений випадку двозонних потенціалів.

Зокрема, для $g = 2$, редукція можлива для зліченного числа випадків для яких крива C_g накриває N-листно тор C_1, де $N = 2, 3, \ldots$; більше того ріманова матриця Π кривої C_g зводиться до матриці вигляду

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tau_{11} & 1/N \\ 0 & 1 & 1/N & \tau_{22} \end{pmatrix}.$$

В цьму ж розділі дається класифікація всіх еліптичних потенціалів, що являють собою сумму функцій Вейерштрасса з аргументами, що зсунені на півперіоди (потенціали Требіха–Вердьє), в рамках теорії тета функцій. Виявляється, що у випадку роду два крім двозонного потенціала Ламе, $u(x)u_3(x) = 6\wp(x)$, існує тільки два нетрівіальних еліптичних потенціала Требіха–Вердьє:

$$u_4(x) = 6\wp(x) + 2\wp(x + \omega_i), \; i = 1, 2, 3 \tag{18}$$

$$u_5(x) = 6\wp(x) + 2\wp(x + \omega_i) + 2\wp(x + \omega_j), \quad i \neq j = 1, 2, 3, \tag{19}$$

що ассоційовані відповідно із 4 та 5–листним накриттям над тором.

Розділ завершується детальним аналізом потенціала (18), для якого в рамках тета функціонального підходу вираховані явно накриття над тором та алгебраїчна крива.

Потенціали Требіха–Вердьє розглядаються також і в наступній главі в рамках інакшого підходу.

У другій главі, що має назву *Анзац Ерміта–Крічевера та теорія редукції*, розвинений інший аспект теорії редукції скінченнозонних розв'язків. Ми розгладаємо там спеціальний *еліптичний анзац* для розв'язків рівняння Шредінгера з еліптичним потенціалом. Ерміт використав подібний анзац для опису розв'язків рівняння (2). Покладемо

$$\Psi(x,z) = e^{kz} \sum_{j=1}^{g(g+1)/2} A_j(z,k.\beta) \frac{d^j\Phi(x;\beta)}{dx^j}, \tag{20}$$

де $\Phi(x;\beta)$ є розв'язок рівнячия Ламе (2) при $g=1$, а $A_j(z,k,\beta)$ являються функціями, які мають бути визначеними. За пропозицією Крічевера ми розглядаімо еліптичний потенціал

$$u(x) = \sum_{l=1}^{m} g_l(g_l+1)\wp(x-x_l), \quad \sum_{l=1}^{m} g_l(g_l+1) = N, \tag{21}$$

та відповідний анзац для еліптичної функції Бейкера–Ахієзера,

$$\Psi(x,z) = exp(kx)$$

$$\times \sum_{l=1}^{m} \left\{ a_{0l}\Phi(x-x_l) + \sum_{j=1}^{g_l(g_l+1)/2} A_{jl}(z,k,\beta) \frac{d^j\Phi(x;\beta)}{dx^j} \right\}, \tag{22}$$

де функція $\Phi(x;\beta)$ є розв'язок рівняння Шредінгера з однозонним потенціалом Ламе, що дається формулою

$$\Phi(x;\beta) = \frac{\sigma(x-\beta)}{\sigma(x)\sigma(\beta)} e^{\zeta(\beta)x}, \tag{23}$$

та σ, ζ є функції Веєрштрасса.

Спочатку величини x_i, $i = 1\ldots, N$ вважаються різними і розглядається так звана еліптична модель Калоджеро–Мозера, тобто система одновимірних N часток, взаємодія яких описується двохчастковим потенціалом. Гамільтоніан такої системи задається у вигляді

$$H = \sum_i y_i^2 + \sum_{i,j} \wp(x_i - x_j), \tag{24}$$

де $\wp$ є еліптична функція Веєрштрасса з періодами $2\omega_1$, $2\omega_2$, а y_i, x_i $(u = 1, \ldots, N)$ є канонічні змінні, $\{y_i, y_j\} = \{x_i, x_j\} = 0$, $\{y_i, x_j\} = \delta_{ij}$, із стандартними дужками Пуассона.

Нехай $\{X_\mu\} = \{H_i, E_\alpha\}$, є базисні матриці $H_i = (\delta_{ij}\delta_{ik})$, $i = 1, \ldots, N$, $E_\alpha = E_{nm} = (\delta_{nj}\delta_{nk})$, $n \neq m, m, n = 1, \ldots, N$.

Оператор Лакса L системи був знайдений Крічевером у 1980 році і має вигляд:

$$L(u) = \sum_j y_j H_j + i \sum_\alpha \Phi_\alpha E_\alpha, \tag{25}$$

де $\Phi_\alpha = \Phi(\mathrm{x} \cdot \alpha; u)$ та функція $\Phi(x; u)$ означена в (23).

Гамільтонівськи потоки системи утворюються слідом $Tr\, L^n$, зокрема, $Tr\, L^2$ породжує Гамільтоніан (24). Як відомо, система Калоджеро–Мозеро допускає *динамічну r-матричну алгебру*

$$\{L_1(u), L_2(v)\} = [r_{12}(u, v), L_1(u)] - [r_{21}(u, v), L_2(v)], \tag{26}$$

де $L_1 = L \otimes I$, $L_2 = I \otimes L$, $r_{12}(u, v) = \sum_{\mu,\nu} r^{\mu\nu}(u, v) X_\mu \otimes X_\nu$ є $N^2 \times N^2$ матриця, що залежить від динамічних змінних.

Теорема V. [Енольський, Ібек 1994] *r-матрична алгебра (26), задовільняє динамічному рівнянню Янга-Бакстера*

$$\begin{aligned} &[d_{12}(x, y), d_{13}(x, z)] + [d_{12}(x, y)\ d_{23}(y, z)] + [d_{32}(z, y), d_{13}(x, z)] \\ &+ \{L_2(y) \overset{\otimes}{,} d_{13}(x, z)\} - \{L_3(z) \overset{\otimes}{,} d_{12}(x, y)\} \\ &+ [S_{13}(x, z), L_2(y)] - [S_{12}(x, y), L_3(z)] = 0, \end{aligned} \tag{27}$$

де два інших рівняння отримаються циклічною перестановкою та в цьому контексті

$$d_{12}(x, y) \ \dot{=}\ r_{\cdot}(x, y) \otimes I,$$

$$d_{23}(y,z) = I \otimes r_{23}(y,z),$$
$$d_{13}(x,y) = \sum_{\mu,\nu} r^{\mu\nu}(x,y) X_\mu \otimes I \otimes X_\nu,$$

S-матриця має вигляд

$$S_{13}(x,z) = -\sum_\alpha \Phi_\alpha(x-z) exp\, \psi(x,z) E_{-\alpha} \otimes H_i \otimes E_\alpha,$$
$$(28) \qquad S_{12}(x,y) = -\sum_\alpha \Phi_\alpha(x-y) exp\, \psi(x,y) E_{-\alpha} \otimes E_\alpha \otimes H_i.$$

Ми звертаємо увагу на те, що S-матриця (28) відрізняється від S-матриці Скляніна (1993), де було використане інше представлення для оператора L.

Рівняння

$$(29) \qquad det(L - \lambda I) = 0$$

визначає *криву Крічевера*, тобто алгебраїчну криву $C_N = (\lambda, u)$, яка є N-листним накритттям над тором $\pi : C_N \to C_1$,

$$(30) \qquad \lambda^N + \sum_{i=0}^{N-1} r_i(u) \lambda^{N-i-1} = 0,$$

де $r_i(u)$ — еліптичні функції, зокрема, для перших двох з ним ми маємо $r_1(u) = -\binom{N}{2}\wp(u) + \sum \wp_{ij}$, $r_2(u) = \binom{N}{3}\wp'(u)$.

Ми розглядаємо обмеження третього потоку, $Tr\, L^3$ системи Калоджеро–Мозера на многвид стаціонарних точок другого потоку, $grad\, H$ - так званий *локус* системи Калоджеро–Мозера $\mathcal{L}_N$, що дається рівняннями

$$y_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, N,$$
$$(31) \qquad \sum_{i \neq j} \wp'(x_i - x_j) = 0,\ x_i \neq x_j,\ i,j = 1, \ldots, N.$$

В роботі Еро, Мак Кіна і Мозера (1977) доведено, що коли частинки x_i рухаються по локусу відповідно до рівняння

$$(32) \qquad \frac{dx_i}{dt} = -12 \sum_{j=1, j \neq i}^{N} \wp(x_i - x_j), \quad i = 1, \ldots, N,$$

де C є стала, тоді функція

$$u(x) = 2\sum_{j=1}^{N} \wp(x - x_j(t)) + C, \tag{33}$$

є еліптичним розв'язком рівняння КдВ $u_t = 6uu_x - u_{xxx}$.

Геометрія локуса $\mathcal{L}_N$ вивчалась Еро, Мак Кіном та іншими. Було доведено, що локус не порожній для натуральних трикутних чисел N, тобто для чисел вигляду $N = g(g+1)/2$, де g є число зон в спектрі (або рід відповідної алгебраїчної кривої). Відповідний еліптичний потенціал є g-зонним потенціалом Ламе. Нещодавно Требіх та Вердьє (1991) знайшли нову множину еліптичних потенціалів, що мають вигляд (33) та відповідають не трикутним числам точок на локусі $\mathcal{L}_N$. Зокрема для точок локуса x_i, що є напівперіодами, вони знайшли сімейство еліптичних потенціалів вигляду

$$u(x) = \sum_{i=0}^{3} g_i(g_i+1)\wp(x - \omega_i), \quad g_i \in \mathbb{N}, \tag{34}$$

що ассоційовані з N-листним накриттям $N = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3} g_i(g_i+1)$ над тором. Ми називаємо ці потенціали *потенціалами Требіха-Вердьє*.

Теорема VI. [Глава. 7 монографії: Білоколос, Бобенко, Енольський, Ітс, Матвєєв, 1994] *Крива (29) стає гіпереліптичною, при її обмеженні на локус $\mathcal{L}_N$.*

Ми показуємо, що метод еліптичного анзаца виявляється ефективним для побудови спектральних характеристик багатозонних потецціалів Ламе, зокрема ми довели такі результати.

Теорема VII. [Ілбек, Енольський, 1994] *Еліптична функція Бейкера-Ахієзера, що ассоційована з чотирьох-зонним потенціалом Ламе $u(x) = 20\wp(x)$, має вигляд*

$$\Psi(x;\alpha) = e^{kx}\left\{a_0\Phi(x;\alpha) + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^i\Phi(x;\alpha)}{\partial x^i}\right\}, \tag{35}$$

де

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{21k^2+3z}{k(7k^2+3z)},$$
$$a_2 = \frac{21}{7k^2+3z}, \quad a_3 = \frac{7}{k(7k^2+3z)},$$

змінні** (k,α) **являються координатами кривої

$$\begin{aligned}
&k^{10} - 45\wp k^8 + 120\wp' k^7 \\
&+\left(-630\wp^2 + \frac{399}{4}g_2\right)k^6 + 504\wp\wp' k^5 \\
&+\left(-1050\wp^3 + \frac{735}{4}\wp g_2 + \frac{1725}{4}g_3\right)k^4 \\
&+(360\wp^2\wp' - 165\wp' g_2)k^3 \\
&+\left(-315\wp^4 + \frac{2205}{4}\wp^2 g_2 - \frac{855}{2}\wp g_3 - \frac{189}{4}g_2^2\right)k^2 \\
&+(40\wp^3\wp' - 163\wp\wp' g_2 + 125\wp' g_3)k \\
&-9\wp^5 + \frac{309}{4}\wp^3 g_2 + \frac{9}{4}\wp^2 g_3 \\
&-\frac{75}{4}\wp g_2^2 - \frac{75}{4}g_2 g_3 = 0,
\end{aligned} \tag{36}$$

де** $\wp \equiv \wp(\alpha), \wp' \equiv \wp'(\alpha)$. **Крива (36) являється гіпереліптичною і допускає мероморфну функцію другого порядку

$$z = \frac{7}{5}\,\frac{k^5 - 10k^3\wp + 10k^2\wp' - 15k\wp^2 + 3kg_2 + 2\wp\wp'}{k^3 - 3k\wp + \wp'} \tag{37}$$

та може бути реалізована у вигляді

$$\begin{aligned}
y^2 &= -(z^3 - 52zg_2 - 560g_3) \\
&\times \prod_{i=1}^{3}(z^2 - 10ze_i - 35e_i^2 - 7g_2).
\end{aligned} \tag{38}$$

Накриття** τ **редукує голоморфний диференціал на** C_4 **до еліптичного диференціалу

$$\frac{d\wp}{\wp'} = \left(5z^3 - \frac{455}{4}zg_2 - \frac{875}{2}g_3\right)\frac{dz}{y}. \tag{39}$$

Аналогічне твердження доведено в [Енольський, Ілбек, 1995] для 5-зонного потенціалу Ламе а також для певних випадків рівняния Альфана.

Остання частина Глави 3 присвячена дослідженню двозонного локуса ассоційованного з потенціалами Требіха–Вердьє (18) та (19). Ми вираховуєм спектральні характеристики для такаих потенціалів методом еліптичного анзаца, що відрізняється від методів Глави 2 і базується на теорії виключення. Для здійснення цих досить громіздких обчислень ми використуємо програми для аналітичних обчислень Maple та Mathematica. Результати сумуються у вигляді такої теореми.

Теорема VIII. [Енольський, Ілбек, 1995] *Спектральні характериcтики потенціалів Требіха–Вердьє (18) та (19),*

$$C_1 \xleftarrow{\pi} C_2 \xrightarrow{\tilde{\pi}} \tilde{C}_1,$$

якими є 1) спектральні криві C_2 та їх стандартна гіпереліптична реалізація у вигляді кривих Крічевера, 2) перше накриття π, 3) друге накриття $\tilde{\pi}$, 4) зв'язок між модулями торів C_1 та $\tilde{C}_2$, 5) хвильові функції $\Psi(x;\alpha)$ та поліноми Ламе Λ_i, що є значення $\Psi(x;\alpha)$ на краях зон обчислені і наведені у таблицях 1-5.

Таблиця 1:

u_N	Спектральна крива $C_2 = (w, z) \equiv (\lambda, \alpha)$
u_3	$w^2 = -(z^2 - 3g_2)\prod_{i=1}^{3}(z - 3e_i)$
	$\lambda^3 - 3\lambda\wp + \wp' = 0$
u_4	$w^2 = -(z + 6e_i)\prod_{k=1}^{4}(z - z_k(i)), i = 1, 2, 3$ $z_{1,2}(i) = e_j + 2e_i \pm 2\sqrt{(e_i - e_j)(2e_j + 7e_i)}$ $z_{3,4}(i) = e_k + 2e_i \pm 2\sqrt{(e_i - e_k)(2e_k + 7e_i)}$
	$\lambda^4 - 3(2\wp - e_i)\lambda^2 + 4\lambda\wp'$ $-3(\wp - e_j)(\wp - e_k) = 0,$ $i \neq j \neq k = 1, 2, 3$
u_5	$w^2 = \prod_{i=1}^{i=5}(z - z_i(j)), \quad j = 1, 2, 3$ $z_4(j) = 6e_k - 3e_i,\ z_5(j) = 6e_i - 3e_k$ $\prod_{i=1}^{3}(z - z_i(j))$ $= z^3 - 3z^2e_j + (51e_j^2 - 20g_2)z$ $-369e_j^3 + 132e_jg_2$
	$\lambda^5 - 2(e_i + 5\wp)\lambda^3 + 10\wp\lambda^2$ $+3(e_i + 5\wp)(e_i - \wp)\lambda$ $-2\wp'(e_i - \wp) = 0$

Таблиця .2:

u_N	Накриття π	Редукція голоморфного диференціала
u_3	$\wp(u) = -\frac{z^3-27g_3}{9(z^2-3g_2)}$	$\frac{d\wp}{\wp'} = -\frac{3z}{2}\frac{dz}{w}$
u_4	$\wp(u) = e_j + \frac{(z-3e_i+9e_k)^2(z-z_1(i))(z-z_2(i))}{4(z+6e_i)(-2z+15e_i)^2}$ $\wp(u) = e_k + \frac{(z-3e_i+9e_j)^2(z-z_3(i))(z-z_4(i))}{4(z+6e_i)(-2z+15e_i)^2}$	$\frac{d\wp}{\wp'} = -(2z+3e_k)\frac{dz}{w}$
u_5	$\wp(u) = e_j + \frac{(z-z_1(j))(z-z_2(j))(z-z_3(j))(z+15e_j)^2}{(5z^2+6ze_j+201e_j^2-108g_2)^2}$	$\frac{d\wp}{\wp'} = (5z+3e_j)\frac{dz}{2w}$

Таблиця .3:

u_N	Накриття $\tilde{\pi}$
u_3	$\tilde{\wp}(u) = -\frac{9}{16}(4z^3 - 9g_2 z + 9g_3)$
u_4	$\tilde{\wp}(u) - \tilde{e}_j = -\frac{9(z-z_2)(z-z_3)(z+4e_i-e_k)^2}{4(z+6e_i)}$
u_5	$\tilde{\wp}(u) = -\frac{9P_5(z)}{4(z-3e_i-9e_j)(z+6e_i+9e_j)}$ $P_5(z) = z^5 + 3e_i^4 z^4 - 42e_i^2 z^3 + 150e_j e_k z^3 + 30e_i^2 e_k z^2$ $+9(69e_i^4 + 625e_j^2 e_k^2 - 221e_i g_3/2)z$ $-27e_i(11e_i^4 - 81e_i g_k/2 + 475e_k^2 e_j^2)$

Таблиця .4: Зв'язок між модулями торів C_1 та $\tilde{C}_1$

u_3	$\tilde{g}_2 = \frac{3^7(g_2^3+9g_3^2)}{2^6}, \quad \tilde{g}_3 = \frac{3^{11}(g_3g_2^3-3g_3^2)}{2^9}$ $\frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{(k^2-2)(2k^2-1)(k^2+1)}{4(k^4-k^2+1)^{3/2}}$
u_4	$\tilde{g}_2 = 3^7\frac{83}{4}g_2g_3e_i + 3^6\frac{89}{4}g_2^2e_i^2 + 3^4g_2^2 + 14\cdot 3^7g_3^2,$ $\tilde{g}_3 = \frac{3^7\cdot 11\cdot 17}{4}e_ig_2^4 + \frac{3^{10}\cdot 307}{8}e_ig_3^2g_2 + \frac{3^{10}\cdot 457}{16}g_2^2g_3e_i^2$ $+\frac{3^8\cdot 61}{4}g_3g_2^3 + \frac{3^{11}\cdot 5\cdot 19}{16}g_3^3$ $\tilde{k} = k'(1-4k^2) \qquad \tilde{k}' = k(1-4(k')^2)$
u_5	$\tilde{g}_2 = 2^2\cdot 3^7\cdot 5\cdot 23e_i^6 - 3^7\cdot 11\cdot 17e_i^4g_2 - \frac{3^6\cdot 5^3}{2^2}e_i^2g_2^2 + \frac{3^4}{2^4}5^5g_2^3$ $\tilde{g}_3 = -\frac{3^7}{2^6}e_i\left(5^7g_2^4 + 2^8\cdot 3^5\cdot 191e_i^8 + 2^5\cdot 3^3\cdot 13\cdot 457e_i^4g_2^2\right.$ $\left.-2^8\cdot 3^3\cdot 23\cdot 79e_i^6g_2 - 2^4\cdot 3^2\cdot 5^4\cdot 11e_i^2g_2^3\right)$

Таблиця .5:

u_N	Хвильова функція $\Psi(x,u)$ та поліноми Ламе $\Lambda(x)$
u_3	$\Psi(x) = \frac{\partial}{\partial x}(exp(\lambda x)\Phi(x;u))$ $\Lambda_{ij} = \sqrt{(\wp(x)-e_i)(\wp(x)-e_j)}, (z = 3e_k) \quad i \neq j \neq k = 1,2,3$ $\Lambda_{\pm} = \wp(x) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}}, (z = \pm\sqrt{3g_2})$
u_4	$\Psi(x,u) = \frac{\partial}{\partial x}(exp(\lambda x)\Phi(x;u)) + \frac{3\lambda^2-3\wp(u)+z}{6\sqrt{\wp(u)-e_i}}\Phi(x+\omega_i;u)exp(\lambda x)$ $\Lambda^{\pm}_{ik}, k \in \{1,2,3\} - \{i\}$ $\Lambda_{ik} = \sqrt{(\wp(x)-e_i)(\wp(x)-e_j)}$ $+\frac{1}{3}[(e_i-e_k) \pm \sqrt{(e_i-e_k)(7e_i+2e_k)}]\sqrt{\frac{\wp(x)-e_j}{\wp(x)-e_i}}$ $\Lambda_0 = \wp(x) - e_i \quad (z = -6e_i)$
u_5	$\Psi(x,u) = \frac{\partial}{\partial x}(exp(\lambda x)\Phi(x;u))$ $+[a_{i,j}\Phi(x+\omega_i,u) + a_{j,i}\Phi(x+\omega_j,u)]exp(\lambda x)$ $a_{i,j} = \frac{-9\lambda\wp(u)+\lambda z+6\lambda e_i+3\wp'(u)}{6\lambda\sqrt{\wp(u)-e_i}+6\sqrt{\wp(u)-e_j}\sqrt{\wp(u)-e_k}}$ $\Lambda_i = \sqrt{(\wp(x)-e_i)(\wp(x)-e_k)} + (e_i-e_j)\sqrt{\frac{\wp(x)-e_k}{\wp(x)-e_i}}\,(z = 6e_i - 3e_j)$ $\Lambda_j = \sqrt{(\wp(x)-e_j)(\wp(x)-e_k)} + (e_j-e_i)\sqrt{\frac{\wp(x)-e_k}{\wp(x)-e_j}}\,(z = 6e_j - 3e_i)$ $\Lambda_n = \sqrt{(\wp(x)-e_j)(\wp(x)-e_j)} + \tilde{a}_{ij}\sqrt{\frac{\wp(x)-e_i}{\wp(x)-e_j}} + \tilde{a}_{ji}\sqrt{\frac{\wp(x)-e_j}{\wp(x)-e_i}},$ $(z = z_k), i \neq j \neq k = 1,2,3,$ $\tilde{a}_{ij} = \frac{15e_i^2+27e_j^2-6e_ie_j-z_k^2+2z_k(e_j-e_i)}{24(e_j-e_i)}$

Зокрема вдається описати обмеження на двозонний локус потоків рівняння КдВ з початковими данними у вигляді потенціалів Ламе і потенціалів Требіха–Вердьє; докладніше

Теорема IX. [Енольський 1984, Енольський, Ілбек, 1995] *Ізоспектральна деформація N-еліптичних потенціалів u_3, u_4 та u_5 має вигляд*

$$u_3: \quad 4X^3 - 9g_2X + 9g_3 + \frac{16}{9}\tilde{\wp}(8it) = 0, \tag{40}$$

$$u_4: \quad 9(X - z_2)(X - z_3)(X + 4e_i - e_k)^2$$

$$+4(X + 6e_i)(\tilde{\wp}(8it) - \tilde{e}_j) = 0, \tag{41}$$

$$u_5: \quad 9P_5(X) + 4(X - 3e_i - 9e_j)$$

$$\times(X - 3e_i - 9e_k)\tilde{\wp}(8it) = 0, \tag{42}$$

де многочлен п'ятого ступеня $P_5(z)$ в (42) дається у таблиці 3 та корені (40)-(42), X_j мають вигляд

$$X_j = -3\sum_{k\neq j}^{N} \wp(x_j - x_k), \quad j = 1, \ldots, N.$$

В цьому розділі будується представлення Лакса вигляду для системи Калоджеро–Мозеро обмеженої на двозонний локус.

$$\begin{aligned} \dot{L}(z) &= [M(z), L(z)], \\ L(z) &= \begin{pmatrix} V(z) & U(z) \\ W(z) & -V(z) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{43}$$

де

$$M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q(z) & 0 \end{pmatrix}.$$

З цих рівняннь випливає, що

$$V(z) = -\frac{1}{2}\dot{U}(z),$$

$$W(z) = -\frac{1}{2}\ddot{U}(z) + U(z)Q(z),$$

$$\dot{W}(z) = 2V(z)Q(z). \tag{44}$$

Таким чином, залишається тільки побудувати величини U та Q.

Теорема X. [Енольський, Ібек, 1995] *Двозонна динаміка на локусі припускає представлення Лакса вигляду (43) з*

$$U(z) = \prod_{i=1}^{N}(z - X_i),$$

$$Q(z) = \zeta + 2\tilde{\wp}(8it), \tag{45}$$

де функція ζ дається виразом для другого накриття з таблиці 3, а величина $\tilde{\wp}(8it)$ виражається в термінах X_i з рівнянь (40-42).

Наприклад, для двозонного потенціалу Ламе u_3, матричні елементи U та Q в матрицях L та M мають вигляд

$$U(z) = 4(z - X_1)(z - X_2)(z - X_3), \tag{46}$$

$$Q(z) = 4z^3 - 9g_2 z + 8X_1X_2X_3 + 27g_3, \tag{47}$$

де, в цьому випадку, $X_i = 3\wp(x_j - x_k)$, $i \neq j \neq k = 1, 2, 3$.

<u>У третій главі</u>, що називається *Додавальні теореми для абелівських блохівських функцій та двовимірне рівняння Ламе*, ми розглядаємо хвильову функцію як природне узагальнення функції Бейкера–Ахієзера

$$\psi(x; P) = \psi(x; \alpha), \alpha = \int_{P_0}^{P} r, P_0, P \in C_g,$$

що визначена на гіпереліптичній кривій $C_g = (y, x)$,

$$y^2 = 4x^{2g+1} + \lambda_{2g}x^{2} + \lambda_{2g-1}x^{2g-1} \ldots + \lambda_0.$$

Це є *блохівська функція*, $\Psi(\mathbf{u}; \alpha)$, $\mathbf{u}^T = (u_1 \ldots, u_g)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_g) \in \mathcal{T}_g$ що визначена на абелівському торі $\mathcal{T}_g = \mathbb{C}^g/\Gamma$, де Γ є гратка.

Абелівська блохівська функція має такі властивості періодичності: якщо вектор $\Omega_i \in \mathbb{C}^g$, $i = 1, \ldots, 2g$ належить гратці Γ, тоді

$$\Psi(\mathbf{u} + \Omega_i; \alpha) = \xi_i(\alpha)\Psi(\mathbf{u}; \alpha), \quad \xi_i(\alpha) \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \ldots, 4,$$
$$\Psi(u; \alpha + \Omega_i) = \Psi(\mathbf{u}; \alpha). \tag{48}$$

У випадку тора $\mathcal{T}_g$, що утворений гіпереліптичною алгебраїчною кривою, абелівська Блохівська функція ,изначена на симметричі му добутку g кривих C_g внаслідок існування розв'язку задачі обертання Якобі:

$$u_i \leftrightarrow \sum_{k=1}^{g} \int_{x_{0k}}^{x_k} \frac{z^{i-1}dz}{y}, \quad x_{0k}, x_k \in C_g, \quad i = 1 \ldots, g,$$
$$\alpha_i \leftrightarrow \sum_{k=1}^{g} \int_{a_0k}^{a_k} \frac{z^{i-1}dz}{y}, \quad a_{0k}, a_k \in C_g, \quad i = 1 \ldots, g.$$

Щоб реалізувати абелівську блохівську функцію, що асоційована з гіпереліптичною кривою, ми використовуємо *гіпереліптичну σ-функцію* Клейна, яка являє собою природне узагальнення еліптичної σ-функції Вейерштрасса, що лежить в основі теорії еліптичних функцій Вейерштрасса. Клейнівська σ-функція $\sigma(\mathbf{u})$ являється цілою функцією на абелевому торі $\mathcal{T}_g = \mathbb{C}^g/\Gamma$, що ассоціюється з гіпереліптичною функцією роду g і має такі властивості періодичності,

$$\sigma(\mathbf{u} + \Omega_i) = \sigma(\mathbf{u})\, exp(2\eta(\Omega_i + \mathbf{u}), \quad \Omega_i \in \Gamma, \tag{49}$$

де η є $g \times g$-матриця. Подібно до теорії еліптичних функцій Клейнівська σ-функція виражається через гіпереліптичні тета функції та матриця η є матрицею періодів певних абелівських диференціалів другого типу. Гіпереліптична ζ-функція та $\wp$-

функція визначаються як логарифмічні похідні:

$$\begin{aligned} \zeta_i(\mathbf{u}) &= -\frac{\partial}{\partial u_i} \ln \sigma(\mathbf{u}) \quad ,i=1\ldots,g, \\ \wp_{ij}(\mathbf{u}) &= \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \ln \sigma(\mathbf{u}) \quad ,i,j=1\ldots,g, \\ \wp_{ijk}(\mathbf{u}) &= \frac{\partial^3}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} \ln \sigma(\mathbf{u}) \quad ,i,j,k=1\ldots,g, \quad \ldots \end{aligned} \tag{50}$$

Означення абелівської блохівської функції наслідує форму розв'язку однозонних рівняннь Ламе:

$$\Phi(\mathbf{u};\alpha) = \frac{\sigma(\alpha-\mathbf{u})}{\sigma(\alpha)\sigma(\mathbf{u})} e^{\sum_{i=1}^{g} \zeta_i u_i}, \tag{51}$$

де у цьму контексті σ та ζ функції є гіпереліптичні функції Клейна.

Нами доведена теорема додавання для абелівської блохівської функції в рамках анзацу

$$\Phi(\mathbf{u}+\mathbf{v};\alpha) = \frac{\mathbf{Y}^T(\mathbf{u};\alpha) A \mathbf{Y}(\mathbf{v};\alpha)}{\mathbf{X}^T(\mathbf{u}) A \mathbf{X}(\mathbf{v})}, \tag{52}$$

де матриця $A \in GL(2^g, \mathbf{Z})$, а $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ є вектор-функції. Цей анзац являє собої безпосереднє узагальнення теореми додавання для функції Бейкера–Ахієзера у випадку роду $g=1$, що може бути записана у вигляді (52) із X, Y, A, що мають вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^T(u) &= (\wp(u), 1), \quad \mathbf{Y}^T(u;\alpha) = (\Phi(u;\alpha), \Phi'(u;\alpha)), \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{53}$$

Для випадку роду два доведена така теорема:

Теорема XI. [Бухштабер, Енольський 1995] *Нехай*

$$\mathbf{Y}^T(\mathbf{u},\alpha) = \begin{pmatrix} \Phi(\mathbf{u};\alpha) \\ \Phi_1(\mathbf{u};\alpha) \\ \Phi_2(\mathbf{u};\alpha) \\ \frac{1}{2\wp_{22}(\alpha)} (\Phi_{12}(\mathbf{u};\alpha) - 2\wp_{12}(\mathbf{u})\Phi(\mathbf{u};\alpha)) \end{pmatrix}$$

є вектор-функція. Тоді для будь яких векторів $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{T}_2$ справедлива така теорема додавання

$$\Phi(\mathbf{u}+\mathbf{v};\alpha) = \frac{\mathbf{Y}^T(\mathbf{u};\alpha)\hat{A}\,\mathbf{Y}(\mathbf{v};\alpha)}{\mathbf{X}^T(\mathbf{u})\hat{A}\,\mathbf{X}(\mathbf{v})}, \tag{54}$$

де нижні індекси у Φ означають похідну по відповідній координаті, $\mathbf{X}(\mathbf{u})^T = (\wp_{22}(\mathbf{u}), \wp_{12}(\mathbf{u}), \wp_{11}(\mathbf{u}), 1)$, 4×4*-матриця* $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{pmatrix}$, *а 2×2-матриця A наведена у (53).*

Справедливість такого анзацу приводить до твердження, що узагальнює рівняння Ламе на випадок роду два.

Теорема XII. [Бухштабер, Енольський 1995] *Нехай*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= \wp_{12}(\alpha)L_{22} + L_{11} + \wp_{221}(\alpha)\frac{\partial}{\partial u_2},\\
\mathcal{L}_2 &= 2\wp_{12}(\alpha)L_{21} - \wp_{22}(\alpha)L_{11} + \wp_{211}(\alpha)\frac{\partial}{\partial u_2},\\
\mathcal{L}_3 &= \wp_{22}(\alpha)L_{22} + 2L_{21} + \wp_{222}(\alpha)\frac{\partial}{\partial u_2}
\end{aligned}$$

та L_{ij} являються операторами Ламе $L_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} - 2\wp_{ij}(\mathbf{u})$ $\quad i,j = 1,2$. Тоді справедливі такі співвідношення

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1\Phi(\mathbf{u};\alpha) &= \left(\wp_{11}(\alpha) - \wp_{22}(\alpha)\wp_{12}(\alpha) + \frac{\lambda_2}{4}\right)\Phi(\mathbf{u};\alpha),\\
\mathcal{L}_2\Phi(\mathbf{u};\alpha) &= -\left(\wp_{11}(\alpha) + \frac{\lambda_2}{4}\right)\wp_{22}(\alpha)\Phi(\mathbf{u};\alpha),\\
\mathcal{L}_3\Phi(\mathbf{u};\alpha) &= -\wp_{22}^2(\alpha)\Phi(\mathbf{u};\alpha),
\end{aligned}$$

Таким чином, на відміну до стандартного рівняння Ламе, його двовимірне узагальнення містить спектральний параметер у диференціальному операторі. Але обмежуючи зміну спектрального параметра на деякі підмножини в абелевого тору можна отримати розв'язок спектральної задачі для двовимірного рівняння Ламе.

Багатовимірна спектральна проблема для блохівських функцій розглядалась Новіковим, Крічевером та Дубровіним в середині семидесятих років. Зокрема розглядалась багатовимірна спектральна задача для рівняння Шредінгера з потенціалом і зовнішнім магнітним полем; там була побудований блохівський розв'язок для одного рівня енергії, який являється координатою Рімановоі поверхні. Далі Веселовим та Новіковим у 1984 р. та була розв'язана *чисто потенціальна проблема* (тобто без зовнішнього поля) для фіксованого енергетичного рівня для гіпереліптичних кривих спеціального типу тобто кривих, що припускають інволюцію з двома нерухомими точками і утворюють таким чином многовид Пріма. Новіков поставив питання про існування багатовимірних потенціалів, для яких блохівський многовид являється алгебраїчним многовидом певної вимірності. Ми наводимо в роботі змістовний приклад нетривіального блохівского многовида.

Теорема XIII. [Бухштабер, Енольський 1995] *Абелівська блохівська функція роду два*

$$\Psi(\mathbf{u};\alpha) = \frac{\sigma(\alpha-\mathbf{u})}{\sigma(\alpha)\sigma(\mathbf{u})} exp\,(\zeta^T(\alpha)\mathbf{u} + \kappa^T\mathbf{u}) \tag{55}$$

та спектральна функція $\lambda(\alpha)$

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha) &= \Lambda_{11}(\wp_{11}(\alpha) + \frac{\lambda_2}{4}) \cdot \Lambda_{22}\wp_{22}(\alpha) \\ &- \frac{\Lambda_{11}}{16(\Lambda_{11}\Lambda_{22} - \Lambda_{12}^2)} det \begin{pmatrix} K(\alpha) & \mathbf{l} \\ \mathbf{l}^T & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{56}$$

дають розв'язок спектральної задачі

$$\sum_{i,j=1}^{2} \Lambda_{ij} \left(\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} + \wp(\mathbf{u}) \right) \Psi(\mathbf{u};\alpha) = \lambda(\alpha)\Psi(\mathbf{u};\alpha)$$

з операторами L_{ij} *ассоційованими з.тором* $\mathcal{T}_2$ *та довільними* *сталими* Λ_{ij} *та Блохівсьм многовидом, що визначається як*

$$\mathcal{M} = \{(\alpha) | \Lambda_{22} = \Lambda_{11}\wp_{12}(\alpha) + \Lambda_{12}\wp_{22}(\alpha)\} \subset \mathcal{T}_2.$$

Тут $K(\alpha)$ *є матриця Бейкера, що описує поверхню Куммера,*

$$K(\alpha) = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \frac{1}{2}\lambda_1 & 2\wp_{11}(\alpha) & -2\wp_{12}(\alpha) \\ \frac{1}{2}\lambda_1 & -(\lambda_2 + 4\wp_{11}(\alpha)) & \frac{1}{2}\lambda_3 + 2\wp_{12}(\alpha) & 2\wp_{22}(\alpha) \\ 2\wp_{11}(\alpha) & \frac{1}{2}\lambda_3 + 2\wp_{12} & -(\lambda_4 + 4\wp_{22}(\alpha)) & 2 \\ -\wp_{12}(\alpha) & 2\wp_{22}(\alpha) & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$l^T = (\Lambda_{12}, \Lambda_{11}, 0, 0)$ *є вектор, к обраховується за формулою*

$$\kappa^T = \frac{1}{2(\Lambda_{11}\Lambda_{22} - \Lambda_{12}^2)}(\wp_{222}(\alpha)\Lambda_{11} + \wp_{221}(\alpha)\Lambda_{12})(-\Lambda_{12}, \Lambda_{11}).$$

Точка $(\wp_{11}(\alpha), \wp_{22}(\alpha))$ *належить алгебраїчній кривій*

$$detK\left(\wp_{22}(\alpha), \frac{\Lambda_{22}}{\Lambda_{11}} - \frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{11}}\wp_{22}(\alpha), \wp_{11}(\alpha)\right) = 0,$$

яка є гіпереліптична крива роду два.

В останньому розділі Глави 3 ми повертаємось до теорії редукції і розглядаємо спеціальний випадок кривої, що допускає автоморфізм другого порядку.

Теорема XIV. [Бухштабер, Енольський 1995] *Нехай*

$$f_1(\mathbf{u}) = (\beta_1 - \beta_2)cn\ (u_+; k_+)\ cn\ (u_-; k_-),$$
$$f_2(\mathbf{u}) = (\gamma_1 - \gamma_2)dn\ (u_+; k_+)\ dn\ (u_-; k_-),$$
$$f_3(\mathbf{u}) = (\beta_1 - \beta_2)sn\ (u_+; k_+)\ sn\ (u_-; k_-), \tag{57}$$

де $sn^2\ (u_\pm; k_\pm) = (1 - \mu_\pm)/(1 - a^{\pm 1})$ *and* $cn^2\ (u_\pm; k_\pm) = 1 - sn^2\ (u_\pm; k_\pm)$, $dn^2\ (u_\pm; k_\pm) = 1 - k_\pm^2\, sn^2\ (u_\pm; k_\pm)$. *Тоді спектральна задача*

$$\left\{\left(1 - \frac{C}{p}\right)\frac{\partial^2}{\partial w_1^2} + \left(1 + \frac{C}{p}\right)\frac{\partial^2}{\partial w_2^2} - \mathcal{U}(\mathbf{w})\right\}\Psi(\mathbf{w}; \alpha)$$

$$(58) \qquad = \lambda(\alpha)\Psi(\mathbf{w};\alpha),$$

що ассоційована з кривою

$$(59) \qquad y^2 = 4z(z-\beta_1)(z-\beta_1)(z-\gamma_1)(z-\gamma_1),$$

де $\beta_1\beta_2 = \gamma_1\gamma_2$ *та потенціал* $\mathcal{U}(\mathbf{w})$, *що має вигляд*

$$(60) \quad \mathcal{U}(\mathbf{w}) = \frac{f_1(\mathbf{w})(B-C) + f_2(\mathbf{w})(-A+C) + C(B-A)}{f_1(\mathbf{w}) - f_2(\mathbf{w}) + B - A},$$

$A = \beta_1 + \beta_2$, $B = \gamma_1 + \gamma_2$, C *є стала, розв'язується на блохівському многвиді* $\mathcal{M}$, *що дається рівнянням*

$$f_1(\alpha)(-2p^2 + CB) + f_2(\alpha)(2p^2 - CA) + f_3(\alpha)C(A-B) = 0.$$

Тут спектральна функція

$$\lambda(\alpha) = -A - B + CS(\alpha)$$

вираховується згідно з теоремою XIII,

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \frac{1}{2p^2(p^2 - C^2 + C(\wp_{22}(\alpha)) - 1)} \\ &\times \; ((4p^2 + (A+B)(1 - \wp_{22} + AB)(p^2 - C(1 - \wp_{22}(\alpha))) \\ (61) \qquad &+ \; C(C(1 - \wp_{22}(\alpha))^2 - 2p^2(A+B))). \end{aligned}$$

<u>**В четвертій главі**</u>, що називається *Застосування теорії редукції*, ми застосовуєм розвинену теорію для побудови еліптичних розв'язків для ряду цілком інтегровних динамічних систем.

Задача Ковалевської. Перший приклад становить задача Ковалевської про обертання твердого тіла навколо нерухомої точки у гравітаційному полі. Асоційована алгебраїчна крива є відома крива Ковалевської

$$(62) \quad w^2 = z\left[(z-H)^2 - \frac{k}{4}\right]\left[(z-H)^2 - \left(1 - \frac{k}{4}\right)\right] - (\mathbf{p}^T\mathbf{M})^2,$$

де $H, k, \mathbf{p}^T\mathbf{M}$ - інтеграли руху. Після відкриття Ковалевською в 1892 році нового інтегровного випадку руху твердого тіла з закріпленою точкою з'явилось чимало робіт, в яких досліджувались спеціальні випадки руху гіроскопа Ковалевської, що описуються еліптичними функціями. Але в усіх цих випадках зведення до еліптичних функцій здіснювалось за рахунок виродження кривої Ковалевської. Ми даємо перший випадок еліптичних розв'язків задачі Ковалевської, для яких крива залишається невиродженою. Виявляється, що параметри кривої (62) можна фіксувати таким чином, що крива стає еквівалентною кривій, що ассоційована з двозонним потенціалом Ламе. Детальніше

Теорема XV. [Енольський 1984] *Припустимо, що при $k > 0$, справедлива така нерівність $k + H > (pM)^2$ та*

$$22H = 5(7\sqrt{k} + 4\sqrt{k+33},$$
$$\mathbf{p}^T\mathbf{M} = \left(\frac{3}{5}H - \frac{\sqrt{k}}{2}\right)\left(\frac{4}{25}H^2 + \frac{2}{5}\sqrt{k}H + 1\right),$$

Тоді рух гіроскопу Ковалевської є дісний, періодичний та описується еліптичними функціями таким чином

$$\begin{aligned} s_{1,2}(t) &= \frac{4}{5}H \\ &+ \frac{1}{2}\left\{\sum_{j=1}^{3}\wp_j \pm \sqrt{9g_2 + \sum_{j=1}^{3}\wp_j^2 - 10\sum_{1\le<j\le 3}\wp_i\wp_j}\right\}, \end{aligned} \tag{63}$$

де $s_{1,2}$ - змінні Ковалевської, $\wp_j = \wp(it/\sqrt{2} + \omega_j|\omega, \omega')$, $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega + \omega'$, $\omega_3 = \omega'$, $\wp(\omega_i) = e_i$, $i = 1, 2, 3$ та

$$\begin{aligned} e_{1,2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{H}{15} - \frac{\sqrt{k}}{6}\right) \pm \frac{1}{3}\sqrt{H\frac{k}{2}}, \\ e_3 &= \frac{\sqrt{k}}{6} - \frac{H}{15}. \end{aligned}$$

Еліптичні розв'язки системи Енона-Еліса. В цьому параграфі ми демонструємо інший метод який дозволяє отримати еліптичні траєкторії скінченновимірної інтегровної динамичної системи, зокрема системи Енона-Еліса, в інтегровних випадках. Тобто ми розглядаємо систему двох часток, що взаємодіють з кубічним потенціалом,

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + Aq_1^3 + Bq_2^2q_1 + A_1q_1^2 + A_2q_2^2, \tag{64}$$

де A, B, A_1, A_2 – сталі. Система Енона–Еліса являється відомим прикладом системи з хаотичною поведінкою, але при деяких спеціальних значеннях сталих вона стає цілком інтегровною системою. Відомі три інтегровні випадки цієї системи: і. $A/B = 1$, $A_1 = A_2$, A_1 – довільна стала; іі. $A/B = 6$, A_1, A_2 – довільні сталі та ііі. $A/B = 16$, $A_1 = A_2$, A_1 – довільна стала.

Метод базується на зв'язках стаціонарних потоків цілком інтегровних рівняннь у частинних похідних з деякими натуральними цілком інтегровними динамічними системами. Зокрема Форді знайшов в 1991, що стаціонарні потоки п'ятоко порядку рівнянь Савади-Котери, Каупа-Купершміта та рівняння Кортевега – де Вріза ізоморфні інтегровним випадкам системи Енона–Еліса. Більше того, така відповідність між стаціонарними потоками цілком інтегровних дифе енціальних рівняннь та натуральними динамічними системи поширюється на інші ситстеми. Так, стаціонарні потоки рівняння Хіроти-Сатсуми виявились зв'язаними з інтегровними випадками 1 : 6 : 1 та 1 : 6 : 8 потенціалу четвертого ступеня (див. роботу [Бакер, Енольський, Форді, 1995]).

Теорема XVI. [Ілбек, Енольський, 1994, 1995] *Еліптичні траєкторії інтегровного випадку* **іі** *системи Енона-Еліса* *описуються еліптичними потенціалами та поліномами Ламе рівняння Шредінгера. Інтегровні випадки i та iii описуються еліптичним потенціалом, що ассоціюеться з поліномами Ламе рівняння ільфана з $n = 5$.*

Ультразвукові Давидівські солітони та система Енона–Еліса. В цьому параграфі ми розглядаємо взаємодію надлишкового електрона, або екситона, в ангармонічній фононній гратці. Відповідна система рівняннь має вигляд

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} + Jl^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) + 2\chi\rho(x,t)\Psi(x,t) = 0 \tag{65}$$

$$\begin{aligned} M\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho(x,t) &= w\alpha^{-1}\left[l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(1+\frac{l^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2})\alpha\rho(x,t)\right.\\ &+ \left.\frac{\alpha^2 l^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\rho^2(x,t)\right] - 2l^2\chi\frac{\partial^2}{\partial x^2}|\Psi(x,t)|^2, \end{aligned} \tag{66}$$

де $\Psi(x,t)$ є хвильова функція електрона, $\rho(x,t)$ – координата фононного зміщення, J, l, α, χ - фізичні сталі, що описуть параметри гратки та електрон–фононну взаємодію.

Рівняння (65,66) узагальнюють на випадок ангармонічної гратки аналогічні рівняння, які в гармонічному наближенні були виведені незалежно Косевічем у 1974, Давидовим та Кислухою у 1976 та Петриною та дисертантом у 1976. (Виведення рівняння у випадку гармонічилї гратки на захист не висувається) Рівняння (65,66) не являються цілком інтегровними, але для анзацу типу простих хвиль, тобто, для розв'язків, що мають вигляд

$$\Psi(x,t) = \Psi(x-vt), \quad \rho(x,t) = \rho(x-vt),$$

де v є швидкість хвилі, вони являють собою систему Енона–Еліса (64). Справедливе таке твердження:

Теорема XVII. [Гайдідей, Хрістіансен, Ілбек, Енольський 1992] *Сукупність розв'язків вигляду простих хвиль (65,66)* *містить еліптичні які еквівалентні до еліптичних траєкторій інтегровного випадку ii системи Енона–Еліса .*

Про періодичний розв'язок зв'язаних нелінійних рівнянь Шредінгера. Розглянемо систему зв'язаних нелінійних рівнянь Шредінгера

$$
\begin{aligned}
&i\frac{\partial A}{\partial Z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \sigma B + (|A|^2 + \gamma|B|^2)A = 0,\\
(67)\qquad &i\frac{\partial B}{\partial Z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial T^2} + \sigma A + (|B|^2 + \gamma|A|^2)B = 0,
\end{aligned}
$$

де A та B комплексні функції та σ, γ – сталі. Ці рівняння являються важливими для ряду застосувань, наприклад, у волоконній оптиці.

Рівняння (67) не є цілком інтегровні, але після замін змінних, $A = (a + ib)/\sqrt{2}$ $B = (a - ib)/\sqrt{2}$ $z = (\gamma + 1)Z/2$, $t = \sqrt{\gamma + 1}T$ та звуження на розв'язки вигляду

$$a(z,t) = q_1(t)exp(i\Omega z), \quad b(z,t) = q_2(t)exp(i\Omega z)$$

вони зводяться при певних значеннях сталих до інтегровного випадку "1:2:1" потенціалу четвертого порядку.

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}q_1 + (q_1^2 + q_2^2)q_1 = (\Omega - \Omega_0)q_1,\\
(68)\qquad &\frac{d^2}{dt^2}q_2 + (q_1^2 + q_2^2)q_2 = (\Omega + \Omega_0)q_2,
\end{aligned}
$$

де Ω – довільна стала та $\Omega_0 = 2\sigma/\delta$. Відомо, що інтегровний випадок "1:2:1" потенціалу четвертого порядку еквівалентний двозонному розв'язку рівняння КдВ, і, таким чином, розвинений раніше метод може бути застосований для того, щоб знайти еліптичні розв'язки системи.

Розглянемо потенціал

$$(69)\qquad \mathcal{U}_4(x) = 6\wp(x + \omega_3) + 2\frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp(x + \omega_3) - e_1}$$

і побудуємо розв'язок в термінах поліномів Ламе, що ассоційовані з власними значеннями z_1, z_2, $z_1 > z_2$

$$
\begin{aligned}
z_1 &= e_2 + 2e_1 + 2\sqrt{(e_1 - e_2)(7e_1 + 2e_2)}, \\
z_2 &= e_3 + 2e_1 + 2\sqrt{(e_1 - e_3)(7e_1 + 2e_3)}.
\end{aligned} \tag{70}
$$

Справедливе таке твердження

Теорема XVIII. [Енольський 1994] *Скінчений та дійсний розв'язок q_1, q_2, що відповідає потенціалу (69), має вигляд*

$$
\begin{aligned}
q_1(x) &= iC\sqrt{\wp(x+\omega_3) - e_3}\Big(\sqrt{(\wp(x+\omega_3) - e_1} \\
&\qquad + \frac{e_1 - e_2 + \sqrt{(e_1 - e_2)(7e_1 + 2e_2)}}{3\sqrt{(\wp(x+\omega_3) - e_1}}\Big), \\
q_2(x) &= C\sqrt{\wp(x+\omega_3) - e_2}\Big(\sqrt{(\wp(x+\omega_3) - e_1} \\
&\qquad + \frac{e_1 - e_3 + \sqrt{(e_1 - e_3)(7e_1 + 2e_3)}}{3\sqrt{(\wp(x+\omega_3) - e_1}}\Big).
\end{aligned}
$$

Тут ω_3 є чисто уявний напівперіод, $0 \le x \le 2\omega$ з дійсним періодом 2ω, та

$$
C^2 = \frac{18}{z_1 - z_2} > 0. \tag{71}
$$

Параметри Ω та Ω_0 зв'язані з Вейєрштрассівськими параметрами e_i рівняннями

$$
2\Omega = -5(z_1 + z_2), \quad 2\Omega_0 = z_1 - z_2 \tag{72}
$$

з z_1, z_2 даними у (70). Виключаючи e_i з цих рівнянь ми отримуємо формулу для амплітуди (71) і таке дисперсійне рівняння

$$
\begin{aligned}
C^2\Omega_0 &= 9, \quad 0 \le k^2 \le 1, \\
\frac{\Omega}{5\Omega_0} &= \frac{k^2 - 2 - 2\sqrt{1-k^2}\sqrt{4-k^2} - 2\sqrt{4-3k^2}}{k^2 + 2\sqrt{1-k^2}\sqrt{4-k^2} - 2\sqrt{4-3k^2}},
\end{aligned}
$$

$$\Omega_0 \le \frac{\Omega}{15}.$$

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ, ЯКІ ВИНЕСЕНО НА ЗАХИСТ

- Знайдені необхідні і достатні умови при яких скінченно зонні розв'язки рівнянь математичної фізики, що виражаються через абелівські функції алгебраїчної кривої, зводяться до еліптичних функцій.

- Побудовані ефективні алгоритми для здіснення такої редукції та для опису ассоційованих спектральних характеристик — рівняння алгебраїчної кривої, явні формули для накриття над тором, обчислення власних функцій відповідної лінійної проблеми та потенціалів, що редукуються до еліптичних функцій.

- Побудоване багатовимірне узагальнення точно розв'язуваних одновимірних випадків рівняння Шредінгера. Знайдені функції Блоха в термінах σ-функцій Клейна та обчислений спектр.

- Дано застосування розвиненого методу редукції до еліптичних функцій для задач фізики та механіки. Зокрема проаналізовані задача Ковалевської про обертання твердого тіла у гравітаційному полі навколо нерухомої точки, досліджені інтегровні випадки системи Енона–Еліса, розглянута задача про динаміку ультразвукових давидівських солітонів, досліджена задача про еліптичні солітони у системі зв'язаних оптичних хвильоводів, вивчені інтегровні випадки потенціалу четвертого ступеня. В усіх цих задачах знайдені нові еліптичні розв'язки на основі розвиненого методу редукції.

ПУБЛІК ЦІЇ ЗА ЗМІСТОМ ДИСЕРТАЦІЇ

Монографія

E D Belokolos, A I Bobenko, V Z Enolskii, A R Its, and V B Matveev. *Algebro-geometrical Aproach to Nonlinear Integrable Equations.* Springer, Berlin, 1994, 337 p.

Статті у наукових виданнях

1. Д.Я.Петрина, В.З.Энольский. О колебаниях одномерных систем. *Докл. АН Укр.ССР. Сер.А* , 8:59–63, 1976.
2. В.З.Энольский. О движении избыточного электрона в молекулярной цепи при учете взаимодействия с оптическими фоночами. *ТМФ*, 52(5):954–958, 1930.
3. А.С.Давыдов, В.З.Энольский. Терия движения избыточного электрона, взаимодействующего с оптическии фононами в одномерной решетке. *ЖЭТФ*, 44(3):826–829, 1980.
4. А.С.Давыдов, В.З.Энольский. Трехмерный солитон в ионном кристалле. *ЖЭТФ*, 54(3):577–582, 1981.
5. Е.Д.Белоколос,В.З.Энольский. Обобщенный анзац Лэмба. *ТМФ*, 53:271–282, 1982.
6. Е.Д.Белоколос, В.З.Энольский. О решениях в эллиптических функциях нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных интегрируемых методом обратной задачи теории рассеяния. *Успехи матем. наук*, 37:89, 1982.

7. Е.Д.Белоколос, В.З.Энольский. Классификация нелинейных волн в Джозефсоновском контакте. *Физика Многочастичных Систем*, 2:3–24, 1982.

8. V.Z. Enolskii. On the solutions in elliptic functions of integrable nonlinear equations. *Phys. Lett.*, 96:327–330, 1983.

9. В.З.Энольский. О решениях в эллиптических функциях интегрируемых нелинейных уравнений связанных с двухзонными потенциалами Ламе. *ДАН СССР*, 278:305–309, 1984.

10. V.Z. Enolskii. On the two gap Lamé potentials and elliptic solutions of the Kowalewski problem connected with them. *Phys. Lett. A*, 100:463–466, 1984.

11. V.Z. Enolskii. Reduction g-gap solutions of equations integrable in Riemann theta functions to lower genera. In: *Proc. of the II Workshpop on nolinear and turbulent processes in physics*, pages 126–129, New York, 1984.

12. Е.Д.Белоколос, А.И.Бобенко, В.З.Энольский, В.Б.Матвеев. Алгебро-геометрические принципы суперпозиции конечнозонных решений интегрируемых нелинейных уравнений. *Успехи матем. наук*, 41:1–49, 1986.

13. А.Р.Итс, В.З.Энольский. О динамике системы Калоджеро-Мозера и редукции гиперэллиптических инткгралов к эллиптическим интегралам. *Функц. анализ и прил.*, 20(1):73–74, 1986.

14. Е.Д.Белоколос, В.З.Энольский. О выражении параметров вполне интегрируемых уравнений в терминах тета констант. *Функц. анализ и прил.* , 21:3:61–62, 1987.

15. A.S. Davydov and V.Z.Enolskii. On the question of the Pecar polaron mass. *Physica of status solidi(b)*, 143:167–171, 1987.

16. А.С.Давыдов, В.З.Энольский. Эффективная масса Пекаровского полярона. *ЖЭТФ*, 67(2):313–315, 1988.

17. E D Belokolos and V Z Enolskii. Algebraically integrable nonlinear equations and Humbert surfaces. In: V.G.Baryakhtar et al, editor, *Plasma Theory and Nonlinear and Turbulent Processes in Physics, vol. 1*, World Scientific, Singapore, 1988.

18. Е.Д.Белоколос, В.З.Энольский. Изоспектральные деформации эллиптических потенциалов. *Успехи матем. наук*, 44:5:155–156, 1989.

19. Е.Д.Белоколос, В.З.Энольский. Эллиптические солитоны Вердье и теория редукции Вейерштрасса. *Функц. анализ и прил.*, 23(1):75–76, 1989.

20. V.Z. Enolskii. On the interaction of an extra electron with optical phonons in long molecular chains and ionic crystals. In: A.C. Scott, editor, *Davydov Soliton Revisted*, pages 169–179, Plenum Press, 1990.

21. Д.Я.Петрина, А.И. Герасименко и В.З.Энольский О статистической механике одномерных систем. *ДАН СССР*,94 (2), 177-181, 1990.

22. П.Л.Христиансен, Дж.К.Илбек, В.З.Энольский, Ю.Б.Гайдидей. Ультразвуковые Давыдовские солитоны и система Энона-Элиса. *Укр.Физ.Журн.*, 37:1187–1192, 1992.

23. P.L. Christiansen, J.C. Eilbeck, V.Z. Enolskii, and Ju.B. Gaididey. On ultrasonic Davydov solitons and the Hénon-Heiles system. *Phys. Lett. A.*, 166:129–134, 1992.

24. J.C. Eilbeck, V.Z. Enolskii. Elliptic Baker–Akhiezer functions and an application to an integrable dynamical system. *J. Math. Phys.*, 35(3):1192–1201, 1994.

25. J.C. Eilbeck and V Z Enolskii. Elliptic solutions and blow-up in an integrable Hénon-Heiles system. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Series A*, 124:1151–1164, 1994.

26. V.Z. Enolskii. Coupled nonlinear Schroödinger equations for connected wave guides: integrable cases, theta functional integration and elliptic solutions. In: C.Montes, editor, *Optical Telecommunications, Fibres and Components for System Applications: Present and Future*, pages 125–129, Nice University, COST, 1994.

27. E.D. Belokolos and V.Z. Enolskii. Reduction of theta functions and elliptic finite-gap potentials. *Acta Applicandae Mathematicae*, 36:87–117, 1994.

28. V.Z. Enolskii and J.C. Eilbeck. On the two-gap locus for the elliptic Calogero-Moser model. *J.Phys. A: Math. Gen.*, 28:1069-1088, 1995.

29. S.Baker, V.Z.Enolskii, and A.P.Fordy. Integrable quartic potentials and coupled KdV equation *Phys.Lett.A*, 201:167-174,1995.

30. В.М.Бухштабер, В.З.Энольский. Абелевы блоховские решения двумерного уравнения Ламе. *Успехи матем. наук*, 50:1:191-192, 1995.

Enolskii V.Z., *Method of reduction to elliptic functions in the theory of solitons."*

Dissertation forwarded for degree of doctor of physics and mathematics sciences in the speciality 01.04.02 – theoretical physics. Bogoliubov Institute for Theoretical Physics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 1996.

Dissertation is the manuscript. It is defended one monograph 30 and scientific papers which develop the method of reduction to elliptic functions of the finite gap solutions of completely integrable partial differential equations and finite dimensional dynamical systems. The necessary and sufficient criteria for the finite gap potential of Schrödinger equation to be reducible to elliptic function are found in term of vanishing of some theta constants.

Энольский В.З., *Метод редукции к эллиптическим функциям в теории солитонов."*

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика. Институт теоретической физики Национальной Академии Наук Украины, Киев, 1996.

Диссертация представляет собой рукопись. Защищается одна монография и 30 научных работ, которые развивают метод редукции к эллиптическим функциям конечнозонных решений вполне интегрируемых уравнений в частных производных и конечномерных динамических систем. Найдены необходимые и достаточные условия редуцируемости конечнозонного потенциала уравнения Шредингера к эллиптическим функциям в терминах обращения в нуль некоторых тэта констант.

Ключові слова: *солітони, скінченнозонні розв'язки цілком інтегровних рівнянь, редукція до еліптичних функцій.*

Енольський Віктор Зелікович
Метод редукції до еліптичних функцій в теорії солітонів

Зам.– Формат 60 × 90/16 Обл.-вид.арк.- 2
Підписано до друку _________ 1995р. Тираж 100 прим.

Поліграфічна дільниця Інституту металофізики НАНУ