Національна академія наук України
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

На правах рукопису

УДК 519.7

ТИМОШЕНКО Оксана Михайлівна

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ІГОР ПРИ РІЗНИХ СТРАТЕГІЯХ УТІКАЮЧОГО ГРАВЦЯ

01.05.01 — теоретичні основи інформатики та кібернетики (математична кібернетика)

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Київ 1995

007

ЛННБ України ім.В.Стефаника
00754343 (Q)

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України.

Науковий керівник (консультант):
доктор фізико-математичних наук
ОСТАПЕНКО Валентин Володимирович.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
професор ЧИКРІЙ Аркадій Олексійович,
кандидат фізико-математичних наук
ГРАБОВИЙ Ігор Петрович.

Провідна організація: Інститут математики НАН України.

Захист відбудеться «12» січня 1996 р. о 11⁰⁰ год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.39.02 при Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України за адресою:

252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитися в науково-технічному архіві інституту.

Автореферат розісланий «12» грудня 1995 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради СИНЯВСЬКИЙ В. Ф.

АВ-33.973

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.

Актуальність теми. Теорія диференціальних ігор є важливою складовою частиною сучасної математичної теорії керування динамічними процесами. В межах теорії диференціальних ігор розглядаються задачі переслідування об'єкта, що рухається, задачі керування траєкторією динамічної системи в умовах невизначеності і наявності перешкод, задачі утримання параметрів діючого об'єкта в заданих межах при несприятливих умовах та інші задачі динаміки, в яких має місце конфлікт або присутня перешкода , яку зручно інтерпретувати як гравця-супротивника.

Поняття диференціальної гри було вперше впроваджено Р.Айзексом і вивчалося в подальшому в роботах ряду українських авторів та авторів ближнього зарубіжжя: Л.С.Понтрягіна, М.М.Красовського, Є.Ф.Міщенка, І.Л.Григоренка, П.Б.Гусятникова,О.Б.Куржатського,М.С.Нікольского,Ю.С.Осипова, В.В.Остапенка,Л.А.Петросяна, Є.С.Половинкіна, Б.М.Пшеничного, М.Ю.Сатимова, А.І.Субботіна, О.П.Ченцова, Ф.Л.Черноуська, А.О.Чикрія, В.Флемінга , А.Фрідмана та ін.

В дисертації розглянуто два класи ігор, у яких задачі переслідування відрізняються від традиційних класичних постановок.

До першого класу входять ігри, в яких гравець-утікач володіє імпульсним керуванням. Треба зазначити, що дослідження динамічних систем, які описані диференціальними рівняннями з імпульсною дією, потребують розробки суттєво нових підходів порівняно з класичною теорією диференціальних рівнянь. Досить великий внесок у розвиток теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією зробили математики В.М.Самойленко, Н.А.Перестюк та ін. В роботах О.О.Асланяна розглядалися задачі оптимального керування за наявності імпульсної дії і було одержано аналог принципу максимуму Л.С.Понтрягіна. Задачі оптимального керування розподіленими системами з узагальненою дією вивчалися в роботах С.І.Лишка.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

Диференціальним іграм з імпульсною корекцією присвячені дослідження Ф.Л.Черноуська, А.А.Меликяна, О.П.Ченцова. Другий клас задач, які розглядаються у дисертації, складають ігри з випадковою перешкодою,в яких гравець-утікач застосовує ε-стратегії Б.М.Пшеничного або їм еквівалентні.

Стохастичні диференціальні ігри вивчалися в роботах М.М.Красовського і В.Є.Третьякова . В дисертації дається інша інтерпретація випадкової перешкоди.

Ігри, які вивчаються в дисертації, списують процес керування динамічною системою за наявності імпульсних або випадкових перешкод. Такі задачі виникають при функціонуванні різних технічних об'єктів. Треба зазначити, що такі ігри порівняно мало досліджені.

Отже тема дисертації є актуальною.

Мета роботи складається з вивчення нових класів ігор переслідування з різноманітними випадками стратегій утікаючого гравця, опису за допомогою операторних конструкцій структури цих пар та побудови на основі опуклого аналізу ефективних стратегій догоняючого гравця для широкого класу лінійних ігор.

Загальна методика досліджень грунтується на операторних конструкціях Б.М.Пшеничного, на застосуванні опуклого аналізу та диференціальних рівнянь до ігрових задач.

Наукова новизна. Визначені нові класи матрично опуклих множин та функцій для випадку скінченного та нескінченного числа матриць.

Описується структура нового класу диференціальних ігор, в яких гравець-утікач використовує імпульсне керування. За допомогою матрично-опуклих множин та квазіматрично-опуклих функцій у лінійних іграх побудовані ефективні стратегії гравців.

Для лінійного випадку побудовані конструктивні стратегії переслідувача, які будуються на використанні поняття матрично-опуклих функцій.

Теоретична та практична цінність. Робота є складовою частиною наукових досліджень, які ведуться у відділі обчислювальних методів Інституту кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України за темами:

1) "Розвиток теорії обчислювальних методів нелокальної оптимізації та їх застосування до розв'язання динамічних та сітьових задач" (за завданям НАН України, 1994-1996рр.).

2) "Розвиток математичної теорії оптимальних процесів керування та вимірювання" (за завданням ДКНТ, 1995-1996рр).

Результати дисертації можуть бути використані для розрахунку керуючих дій для конкретних об'єктів, що функціонують в умовах дії різноманітних полей.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися на наукових семинарах в Інституті кібернетики ім. В.М.Глушкова, Інституті математики НАН України, Київському університеті ім. Т.Г.Шевченка.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в трьох друкованих роботах.

Структура та обсяг. Дисертація складається з вступу, трьох глав та списку літератури. Загальний об'єм роботи - 111 с. , список цитованої літератури - 71 найменування.

ЗМІСТ РОБОТИ.

У першій главі дисертації дається системне викладення теорії матричної опуклості . Розглянуто випадки, коли сімейство матриць, яке задає клас опуклості, складається з двох елементів довільного скінченного набору елементів та нескінченної множини елементів. Послідовно вивчена матрична опуклість множин та встановлено її зв'язок з H -опуклістю, описані класи квазіматрично-опуклих функцій, вказані операції, відносно яких замкнуті ці класи.

Матрично-опуклі множини використовуються в другій главі для опису множин початкових позицій, сприятливих для того чи іншого гравця в іграх з імпульсним керуванням утікача. Для гри з функцією плати використовується поняття матричної квазіопуклості, яке дозволяє описати ігри, в яких достатньо конструктивно будуються стратегії гравців.

При цьому специфіка даних ігор потребує застосування матричної опуклості як з скінченним так і нескінченним сімейством матриць.

В третій главі при вивчанні ігор з випадковою перешкодою недостатньо використання властивості квазіопуклості. Тому тут застосовується поняття матрично-опуклих множин.

Перша частина глави (§1-3) носить оглядовий характер. В ній описані результати робіт В.В.Остапенка відносно матричної опуклості для сімейства з двох матриць. В другій частині глави (§4) викладені нові результати, які стосуються матричної опуклості для різноманітних сімейств матриць. Ці результати знаходять безпосереднє застосування в теорії диференціальних ігор.

Матрично-опуклі множини *M*, які розглядаються в цій главі, будуть припускатися замкненими, матрично-квазіопуклі функції φ -напівнеперервними знизу, а матрично опуклі функції - неперервними.

Означення1. Множина $M \subset E^n$ називається $\Re_k$-опуклою, якщо

$$A_1M + A_2M + ... + A_kM = M. \qquad (1)$$

Встановимо зв'язок між матричною і звичайною опуклістю.

Теорема 1. Нехай для деякого набору $A_{i_1},...A_{i_m}$ операторів з $\Re_k$ виконується нерівність

$$\left\| E - 2(A_{i_1} + ... + A_{i_m}) \right\| < 1.$$

Тоді $\Re_k$ - опукла множина є скалярно-опуклою.

В.Г.Болтянським було введено і достатньо докладно вивчено поняття *H*-опуклості . Нагадаєм означення :

Означення 2. Нехай *H* - довільна підмножина одиничної сфери у E^n. Множина *M* є *H*-опуклою, якщо її можна представити у вигляді такого перетину:

$$M = \bigcap_{x^* \in H} \{x \in E^n : \langle x, x^* \rangle \le c(x^*)\},$$

де $\langle \cdot,\cdot \rangle$ - скалярний добуток у E^n; $c(x^*)$ - числа, які, можливо, дорівнюють $+\infty$.

Встановимо зв'язок між матричною та H-опуклістю.

Будемо позначати H_k множину таких одиничних векторів $x^* \in E^n$, для яких виконуються умови :

а) $A_i^* x^* = \lambda_i(x^*) x^*$, $i = 1,\dots,k$;

б) числа $\lambda_i(x^*) \geq 0$, $i = 1,\dots,k$.

Теорема 2. Нехай M є $\mathfrak{R}_k$-опуклою і скалярноопуклою множиною $\operatorname{int} M \neq 0$. Тоді M є H_k-опуклою множиною.

Теорема 3. Нехай M - H_k-опукла множина. Тоді M - $\mathfrak{R}_k$-опукла.

Означення 3. Функція φ називається $\mathfrak{R}_k$-квазіопуклою, якщо для будь-яких $x_i \in E^n$, $i = 1,\dots,k$ виконується

$\varphi(A_1 x_1 + \dots + A_k x_k) \leq \max\limits_{1 \leq i \leq k} \varphi(x_i)$.

Означення 4. Функція $\varphi(x)$ називається $\mathfrak{R}_k$-квазіопуклою, якщо множина $D_c(\varphi)$ є $\mathfrak{R}_k$-опуклою для будь-якого c.

Теорема 4. Нехай $\varphi(x)$ - неперервна $\mathfrak{R}_k$-квазіопукла функція, така, що $D_c(\varphi)$ є опуклою множиною для будь-якого c. Тоді $D_c(\varphi)$ - H_k-опукла множина.

Теорема 5. Нехай $\varphi(x)$, $\psi(x)$ - $\mathfrak{R}_k$-квазіопуклі функції. Тоді $\Phi(x) = \max\{\varphi(x), \psi(x)\}$ - $\mathfrak{R}_k$-квазіопукла.

Нехай α_i - невід'ємне власне число A_i і X_i - підпростір власних векторів A_i^*, які відповідають числу α_i, $i = 1,\dots,k$.

Припустимо, що $X = \bigcap\limits_{i=1}^{k} X_i$.

Теорема 6. Нехай $X \neq 0$ и $\varphi(x)$ - квазіопукла функція, яка задовольняє умові: для будь-якого x, поданого у вигляді $x = x_1 + x_2$, де $x_1 \in X$, $x_2 \in X^\perp$, виконується рівність

$\varphi(x) = \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1)$.

Тоді $\varphi(x)$ - $\mathfrak{R}_k$-квазіопукла функція.

Нехай $\lambda_1,...,\lambda_k$ - невід'ємні числа. Позначимо $\Lambda_k=\{\lambda_1,...\lambda_k\}$ - сімейство цих чисел.

Означення 5. Функція $\varphi(x)$ називається $(\Re_k,\Lambda_k)$-опуклою, якщо для будь-яких $x_i\in E^n$, $i=1,...,k$,

$\varphi(A_1x_1+...+A_kx_k)\le\lambda_1\varphi(x_1)+...+\lambda_k\varphi(x_k)$.

Теорема 7. Нехай $\varphi(x)$, $\psi(x)$ - $(\Re_k,\Lambda_k)$-опуклі функції. Тоді функції $\varphi(x)+\psi(x)$ і $\max\{\varphi(x),\psi(x)\}$ є $(\Re_k,\Lambda_k)$-опуклими.

Теорема 8. Нехай $\varphi(x)$ - $(\Re_k,\Lambda_k)$-опукла, а $\psi(x)$ - $(\Re_k,\Lambda'_k)$-опукла функція і функція $\Phi(x)=\max\{\varphi(x),\psi(x)\}\ge 0$ для всіх $x\in E^n$. Тоді $\Phi(x)$ – $(\Re_k\Lambda'_k)$ - опукла функція.

Теорема 9. Невід'ємна $(\Re_k,\Lambda_k)$ - опукла функція є $(\Re_k\Lambda'_k)$ - опуклою.

Теорема 10. Нехай $\varphi(x)$ - $(\Re_k,\Lambda_k)$-опукла функція. Тоді $\varphi(x)$ - $(\Re,\Lambda)$-опукла.

Нехай λ_i - власне невід'ємне число оператора A_i і X_i - простір власних векторів A_i^*, які відповідають цьому числу.

Припустимо, що $X=\bigcap\limits_{i=1}^{k}X_i$.

Розглянемо випадок $\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i=1$.

Теорема 11. Опукла функція $\varphi(x)$ є $(\Re_k,\Lambda_k)$-опуклою тоді і тільки тоді, коли виконується умова: для будь-якого $x=y+z$, де $y\in X$, $z\in X^{\perp}$, виконується

$\varphi(x)=\varphi(y+z)=\varphi(y)$. (2)

Розглянемо випадок нескінченного числа операторів.

Припустимо, що $\Re_\infty=\{A(t),t\in[0,1]\}$, де $A(t)$ - лінійний оператор, що діє в E^n. Припускаємо, що $A(t)$ - обмежене сімейство операторів та

$\int\limits_0^1 A(t)dt=E$.

Означення 6. Множина M називається $\Re_\infty$-опуклою, якщо

$$\int_0^1 A(t)Mdt = M, \qquad (3)$$

де

$$\int_0^1 A(t)Mdt = \bigcup_{x(\cdot)} \{ \int_0^1 A(t)x(t)dt \},$$

причому об'єднання береться по всіх вимірних обмежених відображеннях $x(\cdot)$ таких, що $x(t)\in M$ для всіх $t\in[0,1]$.

Будемо позначати H_∞ множину всіх таких одиничних $x^*\in E^n$, в яких для майже всіх $t\in[0,1]$ виконуються умови:

а) $A^*(t)=\lambda(t|x^*)x^*$,

б) числа $\lambda(t|x^*)\geq 0$.

Теорема 12. Нехай M є $\Re_\infty$-опуклою множиною та $\operatorname{int} M\neq 0$. Тоді M - H_∞-опукла множина.

Теорема 13. Нехай M - H_∞-опукла множина. Тоді M - $\Re_\infty$-опукла.

Означення 7. Функція $\varphi(x)$ називається $\Re_\infty$-квазіопуклою, якщо для будь-якої вимірної обмеженої функції $x(t)\in E^n$, $t\in[0,1]$ виконується

$$\varphi(\int_0^1 A(t)x(t)dt)\leq \sup_{t\in[0,1]} \varphi(x(t)).$$

Лема 1. Нехай $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ - $\Re_\infty$-квазіопуклі функції. Тоді $\Phi(x)=\max\{\varphi(x),\psi(x)\}$ квазіопукла.

Нехай $\alpha(t)$ - невід'ємне власне число $A(t)$ і X_t - підпростір власних векторів $A^*(t)$, які відповідають числу $\alpha(t)$. Припустимо $X=\bigcap_{t\in[0,1]} X_t$.

Теорема 14. Нехай $X\neq 0$ та φ - квазіопукла функція, яка задовольняє умові: для будь-якого x, який можна представити у вигляді $x=x_1+x_2$, де $x_1\in X$, $x_2\in X^\perp$ виконується рівність

$\varphi(x)=\varphi(x_1+x_2)=\varphi(x_1)$

Тоді $\varphi(x)$ - $\Re_\infty$-квазіопукла функція.

Розглянемо матрично-квазіопуклі функції для нескінченного сімейства операторів. Нехай $\{\lambda(t), t\in[0,1]\}=\Lambda_\infty$ - обмежене, вимірюване сімейство невід'ємних чисел.

Означення 8. Функція $\varphi(x)$ називається $(\Re_\infty,\Lambda_\infty)$-опуклою, якщо для будь-якого вимірюваного, обмеженого відображення $x(t)\in E^n$, $t\in[0,1]$, виконується

$$\varphi\left(\int_0^1 A(t)x(t)dt\right)\le\int_0^1 \lambda(t)\varphi(x(t))dt.$$

Нехай $\lambda(t)$ - власне невід'ємне число оператора $A(t)$ і X_t - простір власних векторів $A^*(t)$, які відповідають цьому числу. Позначимо X_∞ множину всіх x^*, таких, що $x^*\in X_t$ для майже всіх $t\in[0,1]$.

Розглянемо випадок $\int_0^1\lambda(t)dt=1$.

Теорема 15. Опукла функція $\varphi(x)$ є $(\Re_\infty,\Lambda_\infty)$-опуклою тоді і тільки тоді, коли виконується умова: для будь-якого $x=y+z$, де $y\in\dot{X}_\infty$, $z\in X_\infty^\perp$, виконується

$$\varphi(x)=\varphi(y+z)=\varphi(y). \qquad (4)$$

У другій главі розвивається нова постановка диференційної гри, в якій наздоганяючий гравець користується звичайним керуванням, а утікач - імпульсним. Такий підхід дозволяє моделювати керування динамічними системами , при якому можливі суттєві перешкоди або поломки, виникнення яких приводить до розриву траєкторії .

В главі розглянуті різноманітні випадки, які відрізняються розміщенням моментів імпульсних перешкод, і для лінійних ігор побудовані достатньо конструктивні стратегії як наздоганяючого, так і утікаючого гравців.

В § 1 дається загальна постановка розглянутої гри та опис вжитих стратегій. В наступних параграфах вивчаються лінійні ігри, для яких одержані найбільш змістовні результати.

В § 2 досліджується гра на відрізку $[0,\Theta]$, (Θ - фіксований момент часу) із заданою розбивкою:

$\omega = \{\tau_0 = 0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{k+1} = \Theta\}$.

Динамика гри описується рівнянням

$$\dot{z}(t) = Az(t) + u(t) + \sum_{i=1}^{k} v_i \delta(t - \tau_i), \qquad (5)$$

де $z \in E^n$, $u \in U$, $v_i \in V$, U, V - компакти, A - лінійний оператор у E^n. Мета гравця P (доганяючого), який розпоряджається параметром U, - добитися включання $z(\Theta) \in M$, де M - задана замкнута термінальна множина. Мета гравця E (утікаючого), який розпоряджається параметрами v_i, - протилежна. В початковий момент часу $\tau_0 = 0$ гравець P, знаючи $z(0) = z_0$, вибирає керування $u_0(t)$ на інтервалі $[0,\tau)$. В наступні моменти τ_i гравець P, знаючи z_0 та керування $v_1, v_2, \ldots, v_i$ гравця E, вибирає керування $u_i(t)$ на інтервалі $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Гравець E в кожний момент τ_i вибирає v_i, знаючи $z(\tau_i)$.

Метою досліджень, які проводяться в главі 2, є опис множин початкових позицій , з яких той чи інший гравець може закінчити гру на свою користь, а також побудови відповідних стратегій.

Позначимо H множину всіх власних векторів A^*:

$\varepsilon_i = \tau_{i+1} - \tau_i$,

$$U_{\min} = \bigcap_{1 \le i \le k} \left(\int_0^{\varepsilon_i} e^{-At} dt\right) U .$$

Припустимо

$$P_\Theta^{\min} M = \bigcup_{u_0 \in U} \bigcap_{v \in V} \bigcup_{w \in U_{\min}} \{z_0 : e^{A\Theta} z_0 + \int_0^{\tau_1} e^{A(\Theta - t)} dt \cdot u_0 + \left(\sum_{i=1}^{k} e^{A(\Theta - \tau_i)}\right)(w + v) \in M\} .$$

Теорема 16. Нехай множина M є H-опуклою і $z_0 \in P_\Theta^{\min} M$. Тоді існують відображення $u_i : V \to U$, $i = 1, \ldots, k$, та вектор $u_0 \in U$, такі, що для розв'язання (5) *z(t)*, що відповідає будь-якому керуванню гравця E

$$v(t)=\sum_{i=1}^{k} v_i \delta(t-\tau_i),$$

та керуванню гравця P

$$u(t)=\{u_0, t\in[0,\tau_1), u_i=u_i(v_i), t\in[\tau_i,\tau_{i+1}), i=1,\dots,k\},$$

виконується

$$z(\Theta)\in M.$$

Позначимо

$$U_{\max}=\bigcup_{i=1}^{k}\left(\int_0^{\varepsilon_i} e^{-At}dt\right)\cdot u.$$

Припустимо

$$P_0^{\max}M=\bigcup_{w_0\in co_H U}\bigcap_{v\in V}\bigcup_{w\in co_H U_{\max}}\{z_0 : e^{A\Theta}z_0+\int_0^{\tau_1} e^{A(\Theta-t)}dt\cdot w_0+\sum_{i=1}^{k} e^{A(\Theta-\tau_i)}[w+v]\in M\}.$$

Тут $co_H U$ - *H*-опукла оболонка множини *M*, тобто найменша *H*-опукла множина, яка вміщує U.

Теорема 17. Нехай $z_0\notin P_\Theta^{\max}M$. Тоді існує відображення $v_* : co_H U\to V$, таке, що для розв'язання (5) *z(t)*, яке відповідає будь-якому керуванню гравця *P*,

$$u(t)=\{u_i(t); t\in[\tau_i,\tau_{i+1}), i=0,\dots,k\}$$

і керуванню гравця *E*

$$v(t)=\sum_{i=1}^{k} v_*(w_0)\delta(t-\tau_i),$$

де

$$w_0=\left(\int_0^{\tau_1} e^{A(\Theta-t)}dt\right)^{-1}\cdot\int_0^{\tau_1} e^{A(\Theta-t)}u_0(t)dt,$$

виконується $z(\Theta)\notin M$

В ході доведення теорем 16 і 17 описуються досить конструктивні побудови стратегій гравців.

В $\S$ 3 розглянуто випадок рівномірної розбивки ω, при якій $\tau_{i+1}-\tau_i=\varepsilon=const$. Побудова множин $P_\Theta^{\min}M$ і $P_\Theta^{\max}$ спрощується. Припустимо

$$P_\Theta M=\bigcup_{u_0\in U}\bigcap_{v\in V}\bigcup_{u\in U}\{z_0 : e^{A\Theta}z_0+\int_0^{\varepsilon} e^{A(\Theta-t)}dt\cdot u_0+\sum_{i=1}^{k} e^{A(\Theta-\tau_i)}[\int_0^{\varepsilon} e^{-At}dt\cdot u+v]\in M\}.$$

В цьому параграфі $P_\omega^{\min} M = P_\omega M$, а у випадку H-опуклості U справедливо $P_\omega^{\max} M = P_\omega M$. Таким чином, весь простір E^n розбивається на дві множини: множину початкових позицій, сприятливих для гравця P ($P_\omega M$), та множину позицій, сприятливих для гравця E ($E^n \setminus P_\omega M$). Крім цього, в теоремі 16 всі відображення u_i можна вважати однаково незалежними від індексу i.

В параграфі розглянуто довільну розбивку ω за умови, що U - H-опукла множина, $0 \in U$. В цьому випадку

$$U_{\min} = \int_0^{\varepsilon_{\min}} e^{-At} dt \cdot U, \quad U_{\max} = \int_0^{\varepsilon_{\max}} e^{-At} dt \cdot U ,$$

де

$$\varepsilon_{\min} = \min_{0 \le i \le 1} \varepsilon_i, \quad \varepsilon_{\max} = \max_{0 \le i \le 1} \varepsilon_i .$$

В параграфі розглянута гра, в якій розбивка ω не фіксована, а вибирається гравцем E в початковий момент часу. Гравець P при цьому не знає заздалегідь розбивки ω, а вибирає своє керування u_i на інтервалі $[\tau_i, \tau_{i+1})$, знаючи z_0, $v_1, \dots, v_i$, а також довжину інтервалу $\varepsilon_i = \tau_{i+1} - \tau_i$. Припускається, що довжина між моментами імпульсної корекції τ не може бути менше наперед заданої величини ε, тобто $\tau_{i+1} - \tau_i \ge \eta$. Опишемо сприятливі початкові позиції для грвця P. Припустимо $k_0 = \left[\dfrac{\Theta}{\varepsilon} \right]$:

$$U_{\min}^* = \bigcap_{\varepsilon \in [\varepsilon, \Theta + \varepsilon]} \left(\int_0^{\delta} e^{-At} dt \right) U .$$

$$P_\omega^* M = \bigcap_{\varepsilon_0 \in [\varepsilon, \Theta]} \bigcup_{u_0 \in U} \bigcap_{v \in V} \bigcup_{w \in U_{\min}^*} \{ z_0 : (w + v) \in \bigcap_{\substack{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \; \varepsilon_i \ge \varepsilon \\ i = 2, \dots, k \\ k = 1, \dots, k_0}} \left(\sum_{i=1}^{k} e^{A(\tau_i - \tau_1)} \right)^{-1} \left(M - e^{A\tau_1} z_0 - \int_0^{\tau_1} e^{A(\tau_1 - t)} dt \cdot u_0 \right) \} .$$

Теорема 18. Нехай M - H-опукла множина і $z_0 \in P_\omega^* M$. Тоді виконується твердження теореми 16 за умови, що розбивка ω заздалегідь невідома гравцю P.

Відмітимо, що для простого руху ($A=0$)

$$P_\varepsilon^* M = \bigcap_{z_1\in[\varepsilon,0\cdot\varepsilon]} \bigcup_{u_0\in U} \bigcap_{v\in V} \bigcup_{u\in U} \{z_0 : z_0 + z_1 u_0 + k_0(\varepsilon u + v) \in M\}.$$

У випадку $0 \in U$

$$P_\varepsilon^* M = \bigcup_{u_0\in U} \bigcap_{v\in V} \bigcup_{u\in U} \{z_0 : z_0 + \varepsilon u_0 + k_0(\varepsilon u + v) \in M\}.$$

Нехай $\varphi(z)$ - неперервна функція на E^n. В останньому параграфі розглянута гра, в якій мета гравця P - мінімізувати функціонал $\varphi(z(\Theta))$, а мета гравця E - максимізувати його. Тут виведена оцінка зверху і знизу ціни гри та отримані або доведені теореми, які є аналогами результатів параграфів 2-5. В даному параграфі суттєво використані дослідження глави 1 відносно матрично-опуклих функцій.

Глава 3 присвячена диференціальним іграм з випадковою перешкодою.

В практичних задачах гравцем E виступає деяка перешкода. Якщо будь-якої інформації про перешкоду , крім обмежень на її значення , немає, то доцільно розв'язувати цю практичну задачу в рамках теорії диференціальних ігор.

Однак в багатьох випадках відома деяка імовірна інформація про дії супротивників у майбутньому. Якщо в класичних іграх ставиться задача про мінімізацію найбільшої втрати, то тут можна розглядати задачу мінімізації деякої середньої втрати. Така задача часто виникає на практиці у випадку, коли перешкода рідко набуває екстремальних значень. І ці значення не носять катастрофічного характеру. У розглянутій грі гравець P використовує ε-стратегії Б.М.Пшеничного. Стратегією гравця E є вибір у початковий момент часу розбивки ω, яка є невідомою гравцю P. У кожний момент τ_i розбивки ω гравець P дізнається про реалізацію випадкової перешкоди.

В $\S$ 1. розглядається гра в загальному нелінійному випадку.

Розглянемо керований об'єкт, динаміка якого описується

$$\dot{z} = f(z,u,v), \qquad (6)$$

де $z \in E^n$, $u \in U$, $v \in V$, U - компакт з евклидового простору, V - вимірювана підмножина евклидового простору.

На функцію f та множину U накладені обмеження :

1) $f(z,u,v)$ неперервна за сукупністю змінних;

2) $\|f(z,u,v)\| \le C(v)(1+\|z\|)$, де $C(v)$ - неперервна функція;

3) $f(z,U,v)$ - опукла множина.

Параметром u розпоряджається гравець P, з позиції котрого і буде розглядатися в подальшому диференціальна гра. Параметр v є перешкодою з функцією розподілу $\mu(\cdot)$.

Нехай Θ - фіксований момент часу, φ - неперервний функціонал, визначений на Z. Розглянемо задачу мінімізації гравцем P функції $\varphi(z(\Theta))$, де $z(\cdot)$ - розв'язання рівняння (6).

Опишемо стратегію гравця P.

Нехай $\omega = \{\tau_0 = 0 < \tau_1 < ... < \tau_k = \Theta\}$ - скінченна розбивка інтервалу $[0,\Theta]$, $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$. Будемо вважати, що при фіксованій розбивці ω функція $v(t)$ є кусково-постійною з інтервалом простору $[\tau_{i-1},\tau_i)$, $i = 1,...k$. Гравець P у початковий момент $\tau_0 = 0$ знає початкову позицію $z(0)=z$, величину δ_1, значення перешкоди v_1 на інтервалі $[\tau_0,\tau_1)$ та вибирає своє керування $u(t)$, $t \in [\tau_0,\tau_1)$. Аналогічно в момент часу τ_{i-1} гравець P знає $z(\tau_{i-1})$ величину δ_i, значення перешкоди v_i на інтервалі $[\tau_{i-1},\tau_i)$ і вибирає своє керування $u_i(t)$, $t \in [\tau_{i-1},\tau_i)$. Крім того, гравець P знає функцію розподілу $\mu(\cdot)$.

Описана стратегія є аналогом ε-стратегії . Зазначимо, що при цьому гравець P не знає заздалегідь розбивки ω і йому тільки в ході гри передаються значення довжин інтервалів δ_i. Тому природно ввести другого гравця E і залишити за ним право вибору розбивки ω.

Позначимо R_ε оператор, який ставить у відповідність до кожної функції $\Psi(x)$ функцію

$$\Psi_\varepsilon(x) = \int_V \inf_{u(\cdot)} \Psi(z(\varepsilon|u(\cdot),v,x))\mu(dv), \qquad (7)$$

де $z(t|u(\cdot),v(\cdot),x)$ - розв'язання (6), яке відповідає керуванням $u(\cdot),v(\cdot)$ і початковій позиції x, інфінум береться по всім допустимих, тобто вимірюваних функцій $u(\cdot)$ зі значеннями в U.

Покладемо

$$R^{\omega}\varphi = R_{\delta_1}...R_{\delta_k}\varphi,$$
$$R_{\Theta}\varphi = \sup_{\omega} R^{\omega}\varphi, \qquad (8), \quad (9)$$

де супремум береться по всіх розбивках інтервалу $[0,\Theta]$.

Будемо вважати, що при фіксованій розбивці ω значення перешкоди v_i на інтервалах $[\tau_{i-1},\tau_i)$ є незалежною випадковою величиною. Припустимо, що гравець P вибрав деяку ε-стратегію Γ_P, описану вище. Це означає, що його керування $u_i(\cdot)$ на інтервалах $[\tau_{i-1},\tau_i)$ будуть залежати від реалізації випадкових перешкод і від поточних значень $z(\tau_{i-1})$.

Позначимо:

$z(\Theta|\Gamma_P,v_1,...,v_k,x)$

- розв'язання (6), яке відповідає деякій стратегії Γ_P та реалізаціям $v_1,...v_k$ при початкових умовах $z(0)=x$;

$$M_{\omega}\varphi(z(\Theta|\Gamma_P,x)) = \int_V ... \int_V \varphi(z(\Theta|\Gamma_P,v_1,...,v_k\ x))\mu(dv_k)...\mu(dv_1) \qquad (8)$$

- математичне чекання значення функціоналу φ на кінці траєкторії $z(\Theta)$, яке відповідає ε-стратегії Γ_P та розбивці ω. Мета гравця P - мінімізувати математичне чекання (8).

Теорема 19. Для будь-якого $\varepsilon>0$ існує стратегія Γ_P^* гравця P, така, що для будь-якої розбивки

$M_{\omega}\varphi(z(\Theta|\Gamma_P^*,x)) \le R_{\Theta}\varphi(x)+\varepsilon$.

Ця теорема дає опис ціни гри.

З теореми 19 випливає, що для опису гарантованого математичного чекання мінімуму функціоналу $\varphi(z(\Theta))$ і побудови стратегії Γ_P^* можна використовувати оператор R_{Θ}.

В наступному параграфі для визначення класів лінійних ігор дається оцінка величини $R_{\Theta}\varphi(x)$. Розглянемо гру з динамікою

$$\dot{z} = Az + B(u,v), \qquad (9)$$

де A - лінійний оператор , $B(u,v)$ - неперервне за сукупністю змінних відображення. Позначимо a_i дійсні власні числа оператора A.

Припустимо:

$$C(t) = e^{A(\Theta - t)}\left[\int_0^\Theta e^{At}dt\right]^{-1},$$

$$\lambda_i(t) = e^{a_i(\Theta - t)}\left[\int_0^\Theta e^{a_i t}dt\right]^{-1}, \quad \lambda(t) = \max_{1 \le i \le m} \lambda_i(t),$$

$$\mathfrak{R} = \{C(t),\ t \in [0,\Theta]\}, \quad \Lambda = \{\lambda(t), t \in [0,\Theta]\},$$

$$R_\Theta^* \varphi(x) = \int_V \min_{u \in U} \varphi(e^{A\Theta}x + \int_0^\Theta e^{A(\Theta - t)}dt \cdot B(u,v))\mu(dv),$$

$$\bar{\lambda} = \int_0^\Theta \lambda(t)dt.$$

Дамо оцінку $\bar{R}_\Theta$ зверху.

Теорема 20. Нехай φ – $(\mathfrak{R},\Lambda)$ - опукла функція. Тоді

1) $\bar{R}_\Theta \varphi(x) \le \bar{\lambda} R_\Theta^* \varphi(x)$;

2) для будь-якої початкової позиції z_0 існує відображення $u_*: V \to U$ таке, що для кожного інтервалу $[\tau_{i-1}, \tau_i)$ гравець P вибирає керування за формулою $u_i(t) = u_*(v_i)$, і для будь-якої розбивки ω справедлива оцінка

$$M_\omega \varphi(z(\Theta)) \le \bar{\lambda} R_\Theta^* \varphi(z_0).$$

Позначимо H множину всіх одиничних власних векторів A^*.

Теорема 21. Нехай $B(U,v)$ - H-опукла множина для будь-якого v. Тоді

$$\bar{R}_\Theta \varphi(x) \ge R_\Theta^* \varphi(x)$$

Наслідок 1. В умовах теорем 20 і 21

$$R_\Theta^* \varphi(x) \le \bar{R}_\Theta \varphi(x) \le \bar{\lambda} R_\Theta^* \varphi(x)$$

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ.

1. Вивчені класи матрично-опуклих множин для випадку скінченного і нескінченного сімейств матриць та встановлен їх зв'язок з класами *H*-опуклих множин.

2. Описані класи матрично-квазіопуклих та опуклих функцій для скінченного та нескінченного сімейств матриць.

3. Для диференціальної гри з імпульсним керуванням утікача за допомогою понять матричної опуклості описані множини початкових позицій, сприятливих для того чи іншого гравця, і побудовано відповідні оптимальні стратегії гравців. Вивчені випадки рівномірного та нерівномірного розміщення моментів імпульсної корекції , а також випадки , в яких моменти наперед не фіксуються.

4. На основі матричної квазіопуклості досліджені ігри з імпульсним керуванням при наявності термінальної функції плати.

5. Описана структура диференціальної гри з випадковою перешкодою.

6. На основі поняття матрично-опуклих функцій стримані конструктивні розв'язки для широкого класу лінійних ігор з випадковою перешкодою.

Основні положення та результати дисертації опубліковані в таких працях:

1. Кононенко Н.А., Остапенко В.В., Тимошенко О.М., Яковлева А.П. Моделирование свойств живучести на основе дифференциальных игр и дифференциальных включений // Теория и вычислительные проблемы оптимизации:-Киев:Ин-т кибернетики им. Глушкова В.М. АН Украины.-1993-с.50-56.

2. Остапенко В.В., Тимошенко О.М. Линейные игры с импульсным управлением противника // Кибернетика и системный анализ.-1995.-№1.-с.120-126.

3. Остапенко В.В., Тимошенко О.М. Методы решения дифференциальных игр при различных стратегиях убегающего игрока // Доп.НАН України.-1995.-№6.-с.5-7.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

Тимошенко О. М. Методы решения дифференциальных игр при различных стратегиях игрока.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.01 — теоретические основы информатики и кибернетики (математическая кибернетика). Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины.

Изучены новые классы матрично выпуклых множеств и функций для случая конечного и бесконечного множеств. Дана новая постановка игры, в которой убегающий игрок представляется некоторой случайной помехой. Для линейного случая построены конструктивные стратегии преследователя, основанные на использовании понятия матрично выпуклых множеств. Описана структура нового класса дифференциальных игр, в которых убегающий игрок использует импульсное управление. С помощью матрично-выпуклых множеств и квазиматрично-выпуклых функций в линейных играх построены эффективные стратегии игроков.

Timoshenko O. M. Methods of solving of the differencial games with different strategies to evater.

The thesis for candidate of Phis. & Math. Sci. on 01.05.01 speciality-theoretical basics of informatics and cybernetics (mathematical cybernetics). V. M. Glushkov Institute of Cybernetics, NAS of Ukraine, Kiev, 1995.

The new classes of matrix convex sets and functions for the cases of finite and infinite sets have been studied. The new set-up has been given for the game in which the evater is represented by some random obstacle. For the linear case the constructive strategies which are based on the use of notion of matrix convex sets have been worked out. The structure of the new game class where the evater uses impulse control with the help of matrix convex function in linear games have been described. The effective strategies of players have been built.

Ключові слова: диференціальні ігри, лінійні ігри, імпульсне керування, гравець-переслідувач, гравець-утікач, матрична опуклість, квазіматрична опукла функція, рівномірна розбивка, нефіксована розбивка.

Підп. до друку 30.11.95. Формат 60×84/16. Папір для розмнож. апар. Офс. друк. Ум. друк. арк. 0,98. Ум. фарбо-відб. 1,06. Обл.-вид. арк. 1,0. Зам. 868. Тир. 100 прим.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40

4533

AB 33.973
AB 33.973