

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

**Іваненко Назар Леонідович**

УДК 512.745.4

**Нормальна будова та лінеаризація  
груп трикутних автоморфізмів  
афінного простору**

(01.01.06 — алгебра та теорія чисел)

**Автореферат**  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук



00754800 (O)

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Київському національному університеті ім. Тараса Шевченка.

Науковий керівник:

- доктор фізико-математичних наук, професор В. І. Суцанський

Офіційні опоненти:

- доктор фізико-математичних наук, професор Білоруського державного університету Колюх Володимир Сергійович;
- кандидат фізико-математичних наук, доцент Національного університету "Киево-Могилянська академія" Боднарчук Юрій Вікторович.

Провідна установа:

- Львівський державний університет ім. Івана Франка.

Захист відбудеться "29" *січня* 1996 року о 14 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.01.01 при Київському національному університеті ім. Тараса Шевченка за адресою: 252127, м. Київ-127, пр. акад. Глушкова, 6, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Київського національного університету ім. Тараса Шевченка (вул. Володимирська, 58).

Автореферат розіслано "28" *з грудня* 1995 року.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради

Овсієнко С. А.

# Загальна характеристика роботи

## Актуальність теми

Останнім часом, у зв'язку з бурхливим розвитком алгебраїчної геометрії та її застосувань, увагу широкого кола математиків привернули проблеми вивчення автоморфізмів алгебраїчних многовидів. Зокрема, інтерес викликають автоморфізми одного з найпростіших многовидів — афінного простору. Питання вивчення автоморфізмів таких просторів виявилось зовсім не простим і призвело до розвитку цілої галузі алгебраїчної геометрії.

Група автоморфізмів  $A^n$  — афінного простору вимірності  $n$  над деяким полем  $\mathbb{k}$  має назву афінної групи Кремони (на відміну від групи всіх раціональних автоморфізмів, що називається просто групою Кремони). Позначимо цю групу  $Cr_n$ . Оскільки для афінних многовидів не істотно, чи вести мову про сам многовид, чи про його кільце регулярних функцій, група Кремони є також групою автоморфізмів кільця многочленів від  $n$  змінних.

Відомо, що група автоморфізмів афінного многовиду є алгебраїчною, тобто має структуру алгебраїчного многовиду<sup>1</sup>, сумісну з груповими діями. Проблеми, що виникають при дослідженні групи Кремони багато в чому пояснюються тим, що вона є нескінченновимірною. Запровадження структури алгебраїчної групи дає змогу говорити про алгебраїчні підгрупи групи Кремони. В ній можна виділити дві важливі підгрупи: групу лінійних перетворень  $GL_n(\mathbb{k})$  та групу трикутних перетворень  $\mathcal{J}_n$ , або, як її називають, групу Жонк'єра. Це дві основні складові частини групи Кремони.

Дана робота присвячена вивченню будови основних нелінійних підгруп групи Кремони над полем характеристики нуль та дослідженню властивостей окремих автоморфізмів (циклічних підгруп) із цієї групи. Задачу дослідження групової будови групи Кремони було сформульовано в оглядовій статті В. Попова<sup>2</sup>. Ця тема цікава ще тим, що для її вивчення доводиться залучати різноманітні методи з алгебри, алгебраїчної геометрії, топології та інших галузей математики.

## Мета роботи

Дослідити нормальну будову основних підгруп групи Кремони над полем характеристики нуль, характеризувати їх, описати решітки підгруп груп унітрикутних перетворень та групи Жонк'єра; вивчити дію цих груп на кільці многочленів від багатьох змінних.

<sup>1</sup> I. R. Shafarevich, On some infinitedimensional groups, Rend. di Math., 25(1966), 208–212.

<sup>2</sup> В. Л. Попов, Группы автоморфизмов алгебр многочленов, в сборнике "Вопросы алгебры", выпуск 4, Минск, Университетское, 1989, 4–16.

## Методи досліджень

Використовуються методи теорії нескінченновимірних алгебраїчних груп та теорії решіток.

## Наукова новизна

Основні результати дисертаційної роботи є новими. Досліджуються дії груп трикутних автоморфізмів афінного простору на кільці многочленів від багатьох змінних, описано решітки підмодулів кільця многочленів щодо дії групових кілець груп трикутних автоморфізмів. Знайдено критерії нормальності для підгруп груп трикутних автоморфізмів, описано будову нормальних та характеристичних підгруп в звичайному і топологічному контексті і решітки таких підгруп. Вивчаються класи автоморфізмів, що спряжені до лінійних і знайдено ознаки лінеаризовності автоморфізмів (трикутних та не трикутних) афінного простору.

## Теоретичне і прикладне значення

Отримані результати мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані при дослідженні нескінченновимірних алгебраїчних груп.

## Апробація роботи

Результати, отримані в дисертації, доповідались на наукових конференціях молодих вчених (Київ, КДУ 1992, 1993 рр.), на науковому семінарі кафедри алгебри та математичної логіки Київського університету імені Тараса Шевченка та на Всеукраїнській науковій конференції "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях" (Львів, 5-7 жовтня 1995 р.).

## Публікації

Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1, 2, 3, 4].

## Структура і обсяг дисертації

Робота складається із вступу, чотирьох розділів і списку літератури із 31 найменування. Обсяг роботи 60 сторінок.

Автор висловлює щирю подяку своєму науковому керівникові, професору В. І. Суццанському, а також професору А. ван ден Есену (Католицький Університет Наймейгена) за плідні співбесіди та постійну увагу до роботи.

## Зміст роботи

У вступі обґрунтовано актуальність проблематики дисертації, наводиться короткий огляд робіт за темою дисертації, характеризується зміст роботи.

Перший розділ дисертації носить допоміжний характер. В ньому вводяться основні поняття, що використовуються в роботі та досліджуються їх основні властивості. Зокрема, наводиться визначення групи Кремони, як групи автоморфізмів афінного простору та визначаються групи унітрикутних перетворень і Жонк'єра.

У параграфі 1.1 описуються дві відомі конструкції над частково впорядкованими множинами — конструкції ординальних суми та добутку. В цьому ж параграфі будуються дві основні цілком впорядковані множини  $P_k$  і  $Q_n$ . Вони складаються з цілочисельних векторів, упорядкованих зворотним лексикографічним порядком.

У параграфі 1.2 вводиться поняття висоти многочлена та описано найпростіші властивості висоти многочлена. Висотою одночлена називається впорядкований набір степенів змінних, а висотою многочлена — найбільша з висот його одночленів в розумінні впорядкованої множини  $P_k$ . Висотою множини многочленів називається точна верхня межа в  $P_k$  множини висот елементів.

У параграфі 1.3 вводяться основні поняття, що стосуються елементів групи Жонк'єра. Це висота та глибина таблиці. Висотою таблиці  $F$  називається висота першої ненульової координати перетворення  $F - Id$ , а глибиною — кількість нульових координат на початку цього перетворення. Висота та глибина множини таблиць визначається як точна верхня межа в  $Q_n$  множини висот елементів. Якщо множина таблиць є підгрупою, то коефіцієнти при одночленах найбільшої висоти утворюють підгрупу адитивної групи поля, яка називається групою старших коефіцієнтів.

У параграфі 1.4 описано топологію Зариського нескінченновимірної алгебраїчної групи Кремони, а у параграфі 1.5 формалізовані поняття лінеаризовності та триангульовності елементів групи Кремони.

Розділ 2 присвячено описові будови підмодулів кільця многочленів при дії груп унітрикутних перетворень та групи Жонк'єра на многочленах зсувами.

У параграфі 2.1 описується будова підмодулів кільця многочленів щодо дії групи унітрикутних перетворень та решітка цих підмодулів.

**Теорема 2.2.** *Довільний  $U\mathcal{J}_k$ -підмодуль в  $\mathbb{k}[X_k]$  складається із усіх многочленів висоти не більше деякого набору  $(n_1, \dots, n_k)$ , причому, якщо висота многочлена дорівнює  $(n_1, \dots, n_k)$ , то його старший коефіцієнт лежить в деякій підгрупі адитивної групи поля  $\mathbb{k}$ .*

**Теорема 2.3.** *Решітка  $U\mathcal{J}_k$ -підмодулів в кільці  $\mathbb{k}[X_k]$  ізоморфна  $\bigoplus_{\bar{h} \in P_k} L_{\bar{k}}^{(\bar{h})}$ , де  $L_{\bar{k}}^{(\bar{h})}$  — примірник решітки підгруп адитивної групи поля  $\mathbb{k}$ .*

Параграф 2.2 описує модулі відносно дії групи Жонк'єра та їх решітку.

**Теорема 2.4.** *Нехай  $\mathbb{k}$  — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль. Будь-який нетривіальний  $\mathcal{J}_k$ -підмодуль в  $\mathbb{k}[X_k]$  складається з усіх многочленів висоти меншої за деяке  $\bar{h} = (n_1, \dots, n_k)$ .*

**Наслідок 2.4.1.** *Решітка  $\mathcal{J}_k$ -підмодулів в кільці  $\mathbb{k}[X_k]$  ізоморфна  $P_k$ .*

Розділ 3 присвячено підгруповій будові групи унітрикутних перетворень афінного простору над полем  $\mathbb{k}$ . Параграф 3.1 дає характеристику нормальних дільників цієї групи в контекстах алгебраїчних та абстрактних груп і описує решітку відповідних підгруп.

**Теорема 3.2.** *Підгрупа  $H < U\mathcal{J}_n$  буде нормальною (в абстрактному розумінні) тоді і тільки тоді, коли вона містить всі таблиці  $U \in U\mathcal{J}_n$ , висоти не більше  $h(H)$ , причому, якщо висота  $h(U) = h(H)$ , то старший коефіцієнт таблиці  $U$  лежить в деякій підгрупі  $A$  адитивної групи поля  $\mathbb{k}$ .*

**Теорема 3.3.** *Решітка нормальних дільників (в абстрактному розумінні) групи  $U\mathcal{J}_n$  ізоморфна решітці  $\bigoplus_{h \in Q'_n} L_k^{(h)}$ , де  $L_k^{(h)}$  — примірник решітки підгруп адитивної групи поля  $\mathbb{k}$ .*

**Теорема 3.5.** *Підгрупа  $H$  буде замкненою нормальною підгрупою  $U\mathcal{J}_n$  тоді і тільки тоді, коли вона містить всі таблиці із  $U\mathcal{J}_n$  висоти менше деякого  $\bar{h} \in Q_n$ .*

**Наслідок 3.5.1.** *Решітка замкнених нормальних дільників групи  $U\mathcal{J}_n$  ізоморфна  $Q'_n$ .*

У параграфі 3.2 описуються характеристичні підгрупи групи унітрикутних перетворень. Перша теорема встановлює, що висота таблиць не змінюється при дії довільного автоморфізму групи унітрикутних перетворень, а наступні дві теореми дають характеристику цілком інваріантних підгруп групи унітрикутних перетворень та описують решітку цих підгруп.

**Теорема 3.6.** *Висота таблиць із  $U\mathcal{J}_n$  є інваріантом відносно дії групи її автоморфізмів  $\text{Aut } U\mathcal{J}_n$ .*

**Теорема 3.8.** *Підгрупа  $H < U\mathcal{J}_n$  буде характеристичною тоді і тільки тоді, коли вона містить всі таблиці із  $U\mathcal{J}_n$  висоти строго меншої деякого  $\bar{h} \in Q_n$ .*

**Наслідок 3.8.1.** *Решітка характеристичних підгруп групи  $U\mathcal{J}_n$  ізоморфна решітці  $Q'_n$ .*

Цікавий ще одним наслідок з попередніх теорем. Виявляється множина характеристичних підгруп  $U\mathcal{J}_n$  збігається із множиною її замкнених нормальних дільників.

**Наслідок 3.8.2.** *Характеристичними підгрупами групи  $U\mathcal{J}_n$  є замкнені нормальні дільники і тільки вони.*

В наступному розділі 3.3 описується нормальна будова групи Жонк'єра. Виявляється, що кожна нормальна підгрупа в групі Жонк'єра має структуру напівпрямого добутку деяких простіших підгруп.

**Теорема 3.10.** *Кожна нормальна підгрупа  $H$  в  $\mathcal{J}_n$  є напівпрямим добутком  $G \rtimes T$  характеристичної підгрупи  $G$  групи унітрикутних перетворень та деякої підгрупи  $T$  стандартного алгебраїчного тора вимірності  $n - d(G)$ .*

**Наслідок 3.10.1.** *Кожна замкнена нормальна підгрупа  $H$  в  $\mathcal{J}_n$  є напівпрямим добутком  $G \rtimes T$  характеристичної підгрупи  $G$  групи унітрикутних перетворень та деякої замкненої підгрупи  $T$  стандартного алгебраїчного тора вимірності  $n - d(G)$ .*

Наступна теорема характеризує нормальні дільники.

**Теорема 3.11.** *Підгрупа  $H < \mathcal{J}_n$  буде нормальною тоді і тільки тоді, коли вона містить таблиці вигляду*

$$(x_1, \dots, x_k, s_k x_{k+1} + a_{k+1}(X_k), \dots, s_n x_n + a_n(X_{n-1}))$$

висоти меншої деякого  $\bar{h} \in Q_n$ , де набори  $(s_{m+1}, \dots, s_n)$  коефіцієнтів при  $x_i$  лежать в деякій підгрупі  $T$  стандартного алгебраїчного тора вимірності  $n - d(G)$ .

**Теорема 3.12.** *Підгрупа  $H < \mathcal{J}_n$  буде замкненим нормальним дільником тоді і тільки тоді, коли вона містить таблиці вигляду*

$$(x_1, \dots, x_k, s_k x_{k+1} + a_{k+1}(X_k), \dots, s_n x_n + a_n(X_{n-1}))$$

висоти меншої деякого  $\bar{h} \in Q_n$ , де набори  $(s_{k+1}, \dots, s_n)$  коефіцієнтів при  $x_i$  лежать в деякій замкненій підгрупі  $T$  стандартного алгебраїчного тора вимірності  $n - d(G)$ .

Описано решітки нормальних підгруп групи Жонк'єра та решітку замкнених нормальних підгруп.

**Теорема 3.13.** *Решітка нормальних підгруп групи Жонк'єра ізоморфна решітці  $\mathcal{L}_n$ .*

В попередній теоремі решітка  $\mathcal{L}_n$  є підрешіткою декартового добутку  $\mathbb{L}_n = Q_n \times L_{T_n}$ , де  $L_{T_n}$  — решітка підгруп алгебраїчного тора вимірності  $k$ .

**Теорема 3.14.** *Решітка замкнених нормальних дільників групи Жонк'єра ізоморфна решітці  $\bar{\mathcal{L}}_n$ .*

Решітка  $\tilde{\mathcal{L}}_n$  конструюється аналогічно  $\mathcal{L}_n$  із решіток  $Q_n$  та решіток замкнених підгруп алгебраїчних торів.

Питання про характеристичні підгрупи не становить інтересу, оскільки, як довели Ю. Боднарчук та О. Пилявська<sup>3</sup>, всі автоморфізми групи Жонк'єра внутрішні, а тому нормальні підгрупи будуть одночасно і характеристичними.

В останньому розділі 4 викладені результати, що з'явилися внаслідок дослідження гіпотез якобіана та гіпотез про лінеаризацію автоморфізмів афінного простору. Відомо, що гіпотезу якобіана досить довести для "однорідних" автоморфізмів степеня 3. Г. Мейстерс<sup>4</sup> висловив гіпотезу, що таке твердження є правильним для майже всіх перетворень.

**Гіпотеза (Г. Мейстерс).** *Нехай  $F = X + H$  кубічний однорідний поліноміальний автоморфізм якобіан якого  $JH$  має визначник 1. Тоді обернене до поліноміального відображення  $sF$  існує для майже всіх  $s \in \mathbb{k}^*$  (крім скінченного набору коренів з одиниці).*

Ця гіпотеза виявилась неправильною, але питання залишилось цікавим при переході до різних підкласів поліноміальних автоморфізмів.

У параграфі 4.1 доводиться певне послаблення гіпотези Г. Мейстерса, точніше, що для трикутних перетворень скінченного порядку гіпотеза Г. Мейстерса завжди є правильною.

**Теорема 4.1.** *Нехай  $\mathbb{k}$  — деяке поле та  $F \in \mathcal{J}_n$  — трикутне відображення вигляду*

$$F = (s_1x_1 + a_1, s_2x_2 + a_2(x_1), \dots, s_nx_n + a_n(x_{n-1})).$$

*Тоді, якщо  $F^m = Id$  для деякого  $m \in \mathbb{N}$  і характеристика поля  $\mathbb{k}$  не ділить  $m$ , то існує трикутний автоморфізм  $\varphi \in \mathcal{J}_n$  такий, що  $\varphi^{-1}F\varphi \in \text{Aff}_n(\mathbb{k})$ .*

Доводиться також посиленна гіпотеза Г. Мейстерса для трикутних перетворень.

**Теорема 4.2.** *Нехай  $\mathbb{k}$  — деяке поле та  $F \in U\mathcal{J}_n$  — трикутне відображення вигляду*

$$F = (x_1 + a_1, x_2 + a_2(x_1), \dots, x_n + a_n(x_{n-1})).$$

<sup>3</sup> Ю. Боднарчук, О. Пилявська, Про автоморфізми афінних груп Жонк'єра і Кремони, тези доповіді на Всеукраїнській науковій конференції "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях" (Львів 5-7 жовтня 1995 р.), частина 1, с. 16.

<sup>4</sup> G. Meisters, Dilated polymorphisms conjugate to Dilations, Proceedings of the conference "Invertible Polynomial maps", Braga, July 4-8, 1994.

Для майже всіх  $A \in T_n(\mathbb{k})$  існує трикутне відображення  $\varphi \in \mathcal{C}r_n$  таке, що  $\varphi^{-1}AF\varphi \in \text{Aff}_n(\mathbb{k})$ . Точніше, якщо

$$A = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & s_n \end{pmatrix},$$

то для всіх матриць таких, що  $s_1^{i_1} \cdots s_n^{i_n} \neq 1$  для деякої скінченної множини векторів  $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^n$ , що залежать від  $F$ , існує відображення  $\varphi \in \mathcal{J}_n$  вигляду

$$\varphi = (x_1 + a_1, x_2 + a_2(x_1), \dots, x_n + a_n(x_{n-1}))$$

таке, що

$$\varphi^{-1}AF\varphi = (s_1x_1 + \ell_1, s_2x_2 + \ell_2(x_1), \dots, s_{n-1}x_{n-1} + \ell_{n-1}(x_{n-2}), s_nx_n + \ell_n(x_{n-1})).$$

де  $\ell_i(x_i)$  лінійні многочлени.

У параграфі 4.2 доводиться певне посилення гіпотези Г. Мейстера для сильно нільпотентних відображень та доводиться, що для сильно нільпотентних відображень скінченного порядку гіпотеза Г. Мейстера виконується завжди.

**Теорема 4.6.** Нехай  $\mathbb{k}$  — поле і  $F \in \mathcal{C}r_n$  поліноміальне відображення вигляду  $F = X + H$  з сильно нільпотентною матрицею  $JH$ . Тоді для всіх  $A \in \mathcal{C}(F) \cap T_n(\mathbb{k})$  таких, що  $s_1^{i_1} \cdots s_n^{i_n} \neq 1$  для деякого скінченного набору векторів  $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^n$ , існує лінійно трикутнове перетворення  $\varphi \in \mathcal{C}r_n$  таке, що  $\varphi^{-1}AF\varphi \in \text{Aff}_n(\mathbb{k})$ .

**Теорема 4.8.** Нехай  $\mathbb{k}$  — поле і  $F \in \mathcal{C}r_n$  поліноміальне відображення вигляду  $F = X + H$  з сильно нільпотентною матрицею  $JH$ . Тоді, якщо  $(sF)^m = I$  для деякого  $s \in \mathbb{k}^*$  і  $m \in \mathbb{N}$  таке, що характеристика поля  $\mathbb{k}$  не ділить  $m$ , то існує лінійно трикутновий автоморфізм  $\varphi \in \mathcal{C}r_n$  такий, що  $\varphi^{-1}sF\varphi \in \text{Aff}_n(\mathbb{k})$ .

Попередні теореми мають ще одне застосування. У параграфі 4.3 наводиться контрприклад до гіпотези лінеаризації та проблеми нерухомих точок над полем простої характеристики.

## Роботи автора за темою дисертації

- [1] *Н. Іваненко*, Нормальные подгруппы группы Жюнк'ера над полем характеристики ноль. Материалы третьей международной конференции по алгебре памяти М. И. Каргаполова, 23–28 августа 1993 г., Красноярск, 131–132.
- [2] *Н. Іваненко*, Нормальна будова групи Жюнк'ера над полем нульової характеристики, Український математичний журнал, 46, №6 (1994), 692–698.
- [3] *Н. Іваненко*, Характеристичні підгрупи групи Жюнк'ера над полем нульової характеристики, Український математичний журнал, 47, №1 (1995), 111–113.
- [4] *N. Ivanenko*, Some classes of linearizable polynomial maps, Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях" (Львів 5–7 жовтня 1995 р.), частина 1, с. 55–56.

**Ключові слова:** група Кремони, група Жюнк'ера, алгебраїчна група, автоморфізми афінного простору, трикутні автоморфізми.

ЛНБ ім. В. Стефаника  
АН України

*Иваненко Н. Л.*, Нормальное строение и линеаризация групп треугольных автоморфизмов аффинного пространства. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — алгебра и теория чисел. Киевский национальный университет, Киев, 1995.

В диссертации исследуются действия групп треугольных автоморфизмов аффинного пространства на кольце многочленов от многих переменных, описаны решётки подмодулей кольца многочленов относительно действия групповых колец групп треугольных автоморфизмов. Найден критерий нормальности подгруппы групп треугольных автоморфизмов, описано строение её нормальных и характеристических подгрупп в обычном и топологическом контексте и решётки таких подгрупп. Изучаются классы автоморфизмов, сопряженных к линейным и установлено несколько признаков линеаризируемости треугольных и не треугольных автоморфизмов аффинного пространства.

*Ivanenko N. L.*, Normal structure and linearization of groups of triangular automorphisms of affine space. Manuscript. Thesis of dissertation for obtaining of the degree of candidate of sciences in physics and mathematics, speciality 01.01.06—algebra and number theory. Kiev national university, Kyiv, 1995

There are investigated the actions of triangular automorphism groups on the polynomial ring of multiple variables, described the lattices of group ring modules for groups of triangular automorphisms of affine space. The criterions for the subgroup of the groups of triangular automorphisms to be invariant and fully invariant are found, there are described the structure of such subgroups in abstract and topological settings and their lattices. Classes of automorphisms conjugated to linear automorphisms are studied and several conditions of linearizability of triangular and non-triangular automorphisms are stated.



