Національна академія наук України
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

На правах рукопису

РУДЕНКО Олександр Васильович

РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ, ГЕОМЕТРИЧНИХ МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА АЛГОРИТМІВ КЕРУВАННЯ ДИНАМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ З ПЕРЕМИКАННЯМ РЕЖИМІВ

01.05.01 — теоретичні основи інформатики та кібернетики
(математична кібернетика)

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ 1995

Робота виконана в Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України.

Наукові керівники: академік НАН України,
доктор технічних наук, професор
КУХТЕНКО О. І.,

доктор фізико-математичних наук,
професор ЧИКРІЙ А. О.

Офіційні опоненти: член-кореспондент НАН України,
доктор технічних наук, професор
САМОЙЛЕНКО Ю. І.,

доктор фізико-математичних наук,
професор ЛОПАТІН О. К.

Провідна організація: Київський університет
імені Тараса Шевченка.

Захист відбудеться «22» грудня 1995 р. об 11 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.39.02 при Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України за адресою:

252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитися в науково-технічному архіві інституту.

Автореферат розісланий «22» листопада 1995 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради СИНЯВСЬКИЙ В. Ф.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В роботі розглядається клас систем, які за А.Ф.Філіповим[1] називаються динамічними системами з перемиканнями режимів.

У широкому, природничо-науковому розумінні поняття системи з перемиканнями режимів охоплює клас систем із фізично дискретним керуванням, неперервним часом і неперервним простором станів.

Численні приклади таких систем існують в різних областях. Однак найбільш поширеними реальними системами такого типу є, ймовірно, електричні кола з ключами, які складають основу сучасної автоматики.

Одна з актуальних задач, яка одразу ж виникає в теорії таких систем (і яку досить важко формалізувати), полягає у побудові відповідних математичних моделей.

Як правило, з цією метою використовують наближення ідеального перемикання, тобто миттєвого перемикання без енергетичних втрат.

Проте реальне перемикання - це фізичний процес, параметри якого (перед усім - тривалість часу) дають *обмеження на частоту перемикань зверху*, чому відповідає поняття *швидкодії* перемикаючих пристроїв. Але це означає, що наближення ідеального перемикання, описуване в термінах розривних (наприклад, кусково-сталих) керувань, має обмежену область застосування (не всі кусково-сталі керування будуть допустимими).

В теорії керування такий тип функціональних обмежень на керування систематично не вивчався. Формально він зводиться до визначення мінімально допустимих інтервалів між перемиканнями. Актуальність відповідних задач підкреслювалась також у роботах В.С.Михалевича і співробітників.

[1] Филиппов А.Ф. Условия устойчивости однородных систем с произвольными переключениями режимов // Автоматика и телемеханика. - 1980. - N 6. - С. 45-55.

Якщо зазначені інтервали відносно малі, то можна перейти до опуклої задачі керування. Її типовим розв'язком буде, взагалі кажучи, деякий ковзний режим, апроксимуючи який можна отримати розв'язок вихідної задачі. Але відомий апроксимаційний алгоритм Р.В.Гамкрелідзе, де застосовується принцип інтегральної ШІМ, тут безпосередньо не може бути використаний, бо в ньому не враховуються обмеження на інтервали неперервності знизу. Звідси випливає необхідність розробки нового алгоритму, параметрами якого повинні бути мінімально допустимі інтервали між перемиканнями. При цьому важливо отримати конструктивну оцінку апроксимації.

В даній роботі вперше ставиться і розв'язується задача отримання такої оцінки з врахуванням *ефекту некомутативності рухів.* В теорії Л.Янга - Дж.Варга - Р.В.Гамкрелідзе такий ефект, як відомо, не враховується і поглинається загальною оцінкою. В шукану кількісну оцінку повинні увійти дужки Лі векторних полів. Проте головна складність полягає тут в тому, що в диференціальній геометрії і теорії груп Лі аналогів такої оцінки не існує.

Цілі роботи. 1. Дослідити з системної точки зору проблему побудови математичних моделей електричних кіл з ключами в наближенні ідеальних ключів, базуючись на прийнятому в математичній фізиці принципі граничного переходу при аналізі більш складних і більш адекватних моделей в заданому наближенні.

2. Розробити прикладну концепцію близькості *N*-позиційних керувань в топології ковзних режимів і дати її обгрунтування з врахуванням специфіки даного класу керувань. Зокрема, одержати комутаторну мажорантну оцінку відхилення в задачі апроксимації ковзних режимів.

3. Розробити модифіковану версію апроксимаційного алгоритму Р.В.Гамкрелідзе, яка б враховувала скінченність швидкодії перемикаючих пристроїв.

Наукова новизна. 1. Запропоновано і на конкретному матеріалі проілюстровано і розроблено фізично коректний системний принцип побудови математичних моделей електричних кіл з ключами в наближенні ідеальних ключів на основі такої конструкції аналізу, як "*сумісна границя*" при виконанні граничних переходів

{ключі неідеальні} → {ключі ідеальні}

в системі диференціальних рівнянь кола з попередньо введеними неідеальними ключами. Встановлено математичний механізм і фізичний зміст дискретних змінних "булевого" типу, що виникають в границі і описують (для даного кола, в регулярному випадку) сукупність положень ідеальних ключів.

На конкретному модельному прикладі (з використанням законів зберігання в класі ковзних режимів) запропонований і відпрацьований один із варіантів загальної схеми розв'язання оберненої задачі динаміки, яка включає визначення не лише режиму керування, але й параметрів керованого ємкісного накопичувача, який забезпечує заданий струм в навантаженні.

2. В рамках теорії систем з N-позиційним керуванням дано математичне визначення запозиченої з обчислювальної техніки супервізорної концепції керованого N-вимірного часу. На цій основі розроблена прикладна концепція близькості N-позиційних керувань в топології ковзних режимів, визначена як близькість по відхиленню відповідних керованих процесів (шляхів) в просторі супервізорних часткових часів $R^N(t_1,\dots,t_N)$.

З врахуванням специфіки класу N-позиційних керувань на базі більш адекватної аксіоматичної схеми дано математичне обгрунтування цієї концепції без залучення універсальних функціональних засобів теорії Л.Янга - Дж.Зарга - Р.В.Гамкрелідзе.

Як узагальнення одного результату диференціальної геометрії в припущенні C^1-гладкості векторних полів отримана концептуально нова, супервізорна теорема порівняння, яка дає інтегральне зображення відхилення і його мажорантну оцінку в задачі апроксимації ковзних режимів з використанням дужок Лі векторних полів. Розроблено новий апроксимаційний алгоритм.

Практична цінність. Результати роботи знайшли застосування при розробці складної математичної моделі керованої полоідальної магнітної системи токамаку, при аналізі постановок задач керування положенням і струмом плазмового шнура і відпрацюванні методів їх вирішення в класі керувань-мір. Концептуальна новизна і прикладна спрямованість отриманих результатів роблять можливим їх застосування в інших областях.

Методи досліджень. В роботі використовувались алгебраїчні і диференціально-геометричні методи в теорії керованих динамічних систем, методи теорії лінійних і нелінійних електричних кіл, теорії ковзних режимів, теорії дискретних систем керування, теорії звичайних диференціальних рівнянь.

Апробація роботи. Основні результати дисертації доповідалися на наукових семінарах Інституту кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, Республіканських школах-семінарах "Математична теорія систем і прикладні дослідження" (Одеса, 1981; Київ, 1983; Чернівці, 1985), VI Всесоюзній конференції "Качественная теория дифференциальных уравнений" (Іркутськ, 1986), Всесоюзній науково-технічній конференції "Актуальные проблемы моделирования и управления системами с распределенными параметрами" (Одеса, 1987), Науковій школі-семінарі "Моделирование и исследование устойчивости физических процессов" (Київ, 1990), симпозіумі "Питання оптимізації обчислень" (Київ, 1993), Міждержавній конференції "Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация" (Мінськ, 1993).

Публікації. По темі дисертації опубліковано 12 робіт.

Структура та обсяг дисертації. Робота складається із вступу, двох глав, закінчення, списку літератури з 95 найменувань, містить 208 сторінок машинописного тексту, в тому числі 30 рисунків.

ЗМІСТ РОБОТИ

В главі 1 з методологічних позицій школи А.А.Андронова - Л.С.Понтрягіна розглядається проблема побудови математичних моделей динамічних систем з перемиканнями режимів в наближенні ідеальних перемикаючих пристроїв.

Головна увага приділяється питанням побудови і дослідження математичних моделей електричних кіл з керованими ключами в наближенні ідеальних ключів. Описуються характерні штучні заходи, основані на спрощених трактовках поняття ідеального ключа, в яких ключ розглядається одразу як ідеальний. Зазначаються притаманні їм трудноші і недоліки. Розглядається концептуальне питання про те, що варто розуміти з фізичної і математичної точки зору під наближенням ідеального ключа. Запропоноване в роботі вирішення цього питання дається на основі прийнятого в математичній фізиці принципу дослідження більш складних і більш адекватних моделей в заданому наближенні. Цей принцип висувається як альтернатива поширеним в інженерній практиці штучним засобам "збирання" сукупності N моделей некерованого руху в єдину, загальну модель руху "в режимі перемикань". Показується, що в рамках теорії звичайних диференціальних рівнянь стосовно такої предметної області як електричні кола з ключами (а це є найбільш розповсюджені на практиці реальні приклади логіко-динамічних систем) існують необхідні математичні засоби "збирання" з автоматичним визначенням сукупності "булевих" дискретних змінних, які описують допустимі положення ідеальних ключів.

Найбільш розвинений штучний засіб змістовно викладено в статті Р.Броккетта, Дж.Вуда[2] з посиланням за обгрунтуванням і бібліографією на книгу К.Дезоера, Е.Ху[3] (в дисертації йому присвячений розділ 1.3).

"Під ідеальним ключем, - говориться в цій статті, - ми будемо розуміти елемент кола, який або не проводить струм, незважаючи на спад напруги в ньому, або не створює спаду напруги, незважаючи на струм, що протікає вздовж нього, і може переходити від одного з цих двох положень до іншого по команді незалежно від струму вздовж нього".

Тобто, в основі даного підходу лежить концепція відокремленого ідеального ключа (не враховуються структура, параметри і стан кола, можливі заборони на перемикання) Далі говориться, що цей підхід приводить для лінійних кіл з ключами до рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = \left(A_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) A_i \right) x(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) b_i + b_0 ,$$

де функції $u_i(t)$ моделюють поведінку ключів, і полягає в наступному:

"Загальний підхід до моделювання кіл з ключами не може бути заснований на імпедансних описуваннях, тому що ідеальні ключі не мають імпедансних характеристик. Однак існує описування ключа в термінах змінної $u(t)$, яка набуває ізольованих значень, і бажано було б обгрунтовувати весь підхід до моделювання кіл з ключами на цьому формулюванні. Тобто, якщо ми маємо коло з ключами і джерелами, то ми вилучаємо ключі і вважаємо, що $i + v$ і $i - v$ зв'язані через ключ співвідношенням

---

[2] Brockett R.W., Wood J.R. Electrical networks containing controlled switches // Applications of Lie group theory to nonlinear network problems. - North Hollywood (Calif.). - 1974. - 7. - P. 1-11.

[3] Desoer C.A., Khu E.S. Basic circuit theory. - N.Y.: McGrowHill. 1969

$$(i+v) = u(t)\cdot(i-v).$$

Якщо ключ замкнений, то $i+v=i-v$, а якщо розімкнений, то $i+v=-(i-v)$. Таким чином значення $u(t)$ для ключа є або плюс, або мінус одиниця." (Див. вище згадану статтю Р.Броккетта, Дж.Вуда).

Але цей підхід не універсальний: він не враховує сингулярних ефектів наближення ідеального ключа. Крім того, в основу фізичної теорії рекомендується покласти свідомо штучну комбінацію $i \pm v$. Це свідчить про важливість і недостатню розробленість самої проблеми. В той же час викликає інтерес висловлена в цитованій статті ідея, що наближення ідеального ключа можна інтерпретувати як "нульове наближення". Проте чіткого визначення наближення не дано.

На відміну від цього в дисертаційній роботі розвивається і на конкретних прикладах ілюструється підхід, який грунтується не на понятті відокремленого ідеального ключа і притаманних йому штучних прийомах, а на понятті моделі, що розглядається в наближенні ідеального ключа.

Визначається поняття математичної моделі електричного кола з ключами в наближенні ідеальних ключів, основане на принципі граничного переходу {ключі неідеальні} → {ключі ідеальні} в системі диференціальних рівнянь кола з попередньо введеними неідеальними ключами.

При виконанні необхідної сукупності граничних переходів для уникнення можливих елементів свавілля, властивого феноменологічним прийомам, висувається жорстка вимога використовувати таку конструкцію аналізу як "сумісна границя". Остання, таким чином, по визначенню, і є математичним інструментом побудови граничної моделі.

Нетривіальним моментом цього підходу є можливість отримання (в процесі граничного переходу) однозначно визначеної сукупності дискретних змінних "булевого" типу, які адекватно описують досліджувану сукупність положень ідеальних ключів у даному колі. Однак така можливість, яка досліджується в роботі як феномен теорії звичайних диференціальних рівнянь, реалізується не завжди.

З'ясування відповідних умов приводить до визначення двох характерних випадків наближення ідеального ключа - регулярного і сингулярного. Вони описуються в розділі 1.3 і розробляються в розділах 1.4, 1.5.

У регулярному випадку порядок вихідної, дограничної моделі в процесі граничного переходу до ідеальних ключів не змінюється. Але отримується нова інформація у вигляді сукупності дискретних змінних, які параметризують список досліджуваних положень ідеальних ключів у даному колі.

У сингулярному випадку порядок падає. Нова інформація реалізується у вигляді скінченних співвідношень (фазових обмежень типу рівностей), які дають умови припустимості розривів відповідних контурів. На конкретних прикладах показується, що отримувані в граничному переході скінченні співвідношення в точності відповідають вимогам законів комутації. Останні, таким чином, випливають внаслідок граничного переходу.

Ці два випадки детально аналізуються на прикладі задачі про моделювання розряду N-секційного ємкісного накопичувача на індуктивне навантаження в наближенні ідеальних ключів.

В розділі 1.4 розглядається регулярний випадок, і в цьому випадку вводиться і досліджується поняття *ідеального N-позиційного перемикача*, яке визначається як результат обчислення сукупності N границь у сумісному наближенні N ідеальних ключів. Особливий інтерес становить з'ясування фізичного змісту виникаючого в граничній моделі N-компонентного вектора дискретних керуючих змінних $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$, де кожна компонента θ_i може набувати тільки два значення:

ноль або одиниця, причому завжди одна з компонент дорівнює одиниці, а решта - нулю. Показано, що θ_i $(i \in \overline{1,N})$, за визначенням, є *сумісна границя перехідної провідності контакту*.

А саме, при довільному N динаміка взаємодії керованого N-секційного ємкісного накопичувача з лінійним або нелінійним навантаженням - LR-віткою без індуктивно зв'язаних з нею зовнішніх контурів (наявність такого зв'язку на обчислення границі не впливає) описується дограничною моделлю

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(LJ) = -RJ - \frac{1}{\rho}J + \frac{\rho_1}{\rho}U_1 + \ldots + \frac{\rho_N}{\rho}U_N, \\ \frac{d}{dt}(C_1U_1) = -\frac{\rho_1}{\rho}J + \frac{\rho_1\rho_2}{\rho}(U_2 - U_1) + \ldots + \frac{\rho_1\rho_N}{\rho}(U_N - U_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d}{dt}(C_NU_N) = -\frac{\rho_N}{\rho}J + \frac{\rho_N\rho_1}{\rho}(U_1 - U_N) + \ldots + \frac{\rho_N\rho_{N-1}}{\rho}(U_{N-1} - U_N), \end{cases}$$

де $\rho = \rho_1 + \ldots + \rho_N$, $\rho_i = 1/r_i$ - провідность неідеальних ключів. В наближенні ідеального N-позиційного перемикача, тобто при

$$(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N) \to \begin{cases} (\infty, 0, \ldots, 0), \\ (0, \infty, \ldots 0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (0, 0, \cdots, \infty) \end{cases} \quad (1)$$

сумісна границя цієї моделі існує і має вигляд системи диференціальних рівнянь (того ж порядку)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(LJ) = -RJ + \theta_1U_1 + \theta_2U_2 + \ldots + \theta_NU_N, \\ \frac{d}{dt}(C_1U_1) = -\theta_1 J, \\ \frac{d}{dt}(C_2U_2) = -\theta_2 J, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d}{dt}(C_NU_N) = -\theta_N J \end{cases} \quad (2)$$

з дискретним вектором керуючих параметрів $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$, де, за визначенням,

$$\theta_i = \lim \frac{\rho_i}{\rho_1 + \ldots + \rho_N} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \rho_i \to \infty, \\ 0, & \text{якщо } \rho_i \to 0. \end{cases}$$

При цьому

$$\lim \frac{1}{\rho_1 + \ldots + \rho_N} = 0, \quad \lim \frac{\rho_i \rho_j}{\rho_1 + \ldots + \rho_N} = 0 \quad (i, j = \overline{1, N};\ i \neq j),$$

де "lim" - довільна сумісна границя із списку (1).

В граничній моделі, як і повинно бути, відсутні всі члени, що відповідають за взаємодію конденсаторів як безпосередньо між собою, так і через навантаження. Тому її, виходячи, наприклад, з фізичної інтуїції, можна "відгадати". Але граничний перехід надає необхідний формалізм, який автоматично вирішує цю задачу.

Специфіка дослідження сингулярних випадків наближення ідеального ключа, як це установлюється на конкретних прикладах в розділі 1.5, полягає в тому, що побудова відповідної граничної моделі, тобто виродженої системи, взагалі кажучи, вимагає переходу до нових, більш відповідних координат в просторі станів вихідної системи. Поряд з цим важливу роль відіграє традиційна (в координатній теорії диференціальних рівнянь) техніка еквівалентних перетворень системи диференціальних рівнянь за допомогою побудови, наприклад, лінійних комбінацій деяких рівнянь вихідної системи. Геометрично це означає, що обчислювана границя - це границя не просто даної системи диференціальних рівнянь (у вихідному запису вона може не існувати), а граничне положення визначеного нею підмноговиду (в просторі 1-джетів кривих), який і розуміють в геометрії під "системою диференціальних рівнянь".

В розділі 1.6 будується і досліджується точна нелінійна двовимірна дискретна модель, яка описує динаміку послідовного розряду секцій ємкісного накопичувача на індуктивне навантаження в моменти перемикань. Для цього виявляється корисним мінімально фазове описування кожного з N режимів некерованого розряду у відповідній косокутній системі координат на площині $R^2(J,U)$. Тут U - напруга на різних конденсаторах: $U(t) = \theta_1(t)U_1(t)+\ldots+\theta_N(t)U_N(t)$, тобто функція $U(t)$ розривна.

Навіть при спрощених припущеннях, коли, наприклад, ємкості і початкові напруги однакові, а кожна секція розряджується до нуля, дискретна модель (для безрозмірного струму I_k і безрозмірного часу (фази) Φ_k) виявляється нелінійною:

$$\begin{cases} I_{k+1} = X_k e^{-(\mathrm{ctg}\gamma)\varphi_{k+1}}, \\ \Phi_{k+1} = \Phi_k + \varphi_k, \end{cases}$$

де

$$X_k = \sqrt{1 + I_k^2 - 2 I_k \cos\gamma}, \quad \varphi_k = \arccos\{(I_k - \cos\gamma)/X_0\}$$
$$I_1 = \exp\left(-(\mathrm{ctg}\gamma)\cdot(\pi - \gamma)\right), \quad \Phi_1 = \varphi_1 = \pi - \gamma.$$

Проведено чисельно-аналітичне дослідження цієї моделі при різних значеннях кута втрат.

Розділ 1.7 називається "Постановка оберненої задачі динаміки в класі ковзних режимів і методи її розв'язку з використанням законів зберігання".

Реально задача полягає в синтезі всіх параметрів керованого ємкісного накопичувача (кількості секцій N, значень їх ємкостей $C_1,\ldots,C_N$, початкових напруг $U_1^0,\ldots,U_N^0$), які гарантують існування закону керування, що забезпечує заданий струм $J = J^*(t)$ у навантаженні на заданому проміжку часу $[0,T]$, коли навантаження є однією з обмоток токамака.

Загальна схема розв'язку цієї задачі відпрацьовується на спрощеному модельному прикладі - системі (2) при $N = 2$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(LJ) - RJ + \theta_1 U_1 + \theta_2 U_2, \\ \frac{d}{dt}(C_1 U_1) = -\theta_1 J, \\ \frac{d}{dt}(C_2 U_2) = -\theta_2 J, \end{cases}$$

причому задача ставиться одразу в класі ковзних режимів, що відповідає послабленим обмеженням на керування (θ_1, θ_2) у вигляді $\theta_1 + \theta_2 = 1$, $\theta_1 \geq 0$, $\theta_2 \geq 0$ (*relaxed controls*).

Нехай

$$U^*(t) = \frac{d}{dt}\left(LJ^*(t)\right) + RJ^*(t).$$

Задача, як показано, зводиться до того, щоб, маючи в розпорядженні параметри U_1^0, U_2^0, C_1, C_2, домогтися виконання обмеження

$$U^*(t) \in \mathrm{Co}\{U_1(t), U_2(t)\}, \quad t \in [0, T],$$

де функції $U_1(t), U_2(t)$ визначаються "в динаміці" системою нелінійних нестаціонарних диференціальних рівнянь, які включають $U^*(t)$, $J^*(t)$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(C_1 U_1) = -\frac{U_2 - U^*(t)}{U_2 - U_1} J^*(t), & U_1(0) = U_1^0, \\ \frac{d}{dt}(C_2 U_2) = -\frac{U^*(t) - U_1}{U_2 - U_1} J^*(t), & U_2(0) = U_2^0. \end{cases} \tag{3}$$

Внаслідок того, що *закони зберігання* (заряду та енергії), як це встановлюється в роботі, *мають місце і в класі ковзних режимів*, розв'язок даної системи може бути отриманий, притому в замкнутій аналітичній формі. Для цього (як і в аналізі сингулярних випадків) доречно перейти до нових координат

$$\begin{cases} U = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2, \\ V = U_2 - U_1. \end{cases} \qquad \left(\lambda_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}, \ \lambda_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)$$

Тоді система (3) приймає вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(CU) = -J^*(t), \\ \dfrac{d}{dt}(CV) = -J^*(t)\dfrac{U^*(t)-U_1}{V}, \end{cases} \quad \left(C = C_1 + C_2,\ \hat{C} = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\right)$$

звідки (для керувань-мір $\theta_1 = \left(U_2 - U^*(t)\right) \Big/ \left(U_2 - U_1\right)$ $\theta_2 = 1 - \theta_1$)

$$CU(t) = CU(0) - \int_0^t J^*(s)ds,$$

$$\frac{\hat{C}V^2(t)}{2} = \frac{\hat{C}V^2(0)}{2} - \int_0^t \left(U^*(s) - U(s)\right) J^*(s)ds.$$

Подальший аналіз, детально проведений в роботі, грунтується на вивченні *першого моменту виходу* точки $U^*(t)$ на межу відрізка $\mathrm{Co}\{U_1(t), U_2(t)\}$ в припущенні $U^*(0) \in \mathrm{Int}\,\mathrm{Co}\{U_1^0, U_2^0\}$. Як у даному випадку, так і при довільному N враховується специфіка технологічних обмежень

$$C_k \le C_{\max}, \quad \left|U_k^0\right| \le U_{\max}^0 \quad (k \in \overline{1,N}).$$

Синтез зворотного зв'язку в класі керувань-мір при довільному N здійснюється однозначно шляхом *розкладання селектора*

$$U^*(t) \in \mathrm{Int}\,\mathrm{Co}\{U_1(t), \ldots, U_N(t)\}$$

в опуклу комбінацію найближчих точок. Цим підкреслюється важливість випадку $N = 2$.

Глава 2 має назву "Концепція близькості N-позиційних керувань в топології ковзних режимів, принцип порівняння і модифікований апроксимаційний алгоритм". Одна з її цілей - кількісна оцінка відхилення в задачі апроксимації ковзних режимів з врахуванням ефекту некомутативності рухів. Відсутність такої оцінки в теорії Л.Янга - Дж.Варга - Р.В.Гамкрелідзе, з одного боку, і неприйнятність для її знаходження відомих якісних методів класичної механіки, диференціальної геометрії і теорії груп Лі, з іншого боку, вимагали розробки елементів нового математичного апарату з залученням нових, більш адекватних ключових ідей.

В даній главі з цією метою вводяться і обгрунтовуються дві ідеї, які враховують специфіку систем з N-позиційним керуванням: *супервізорна концепція керованого багатовимірного часу*, і на її грунті - *концепція близькості N-позиційних керувань в топології ковзних режимів.*

Математично адекватна концепція керованого багатовимірного супервізорного часу запозичена безпосередньо з техніки - сучасної обчислювальної техніки, де вона застосовується на програмно-апаратному рівні для забезпечення протікання процесів у *режимі розділеного часу.* Матеріально вона впроваджена у вигляді контрольно-вимірювального пристрою типу системи N датчиків часу, яка працює (у темпі реального часу) за принципом *N-позиційного "шахматного" годинника*: в поточний момент t датчик $Д_i$ показує нагромаджений до моменту t повний час $t_i = t_i(t)$ активної роботи i-ї підсистеми. При цьому "швидкість ходу", тобто похідна $\dot{t}_i(t)$, є керованою і може набувати тільки два значення: ноль або одиниця. Така ж ідея застосовується в спортивній статистиці і, що суттєво, в модифікованому апроксимаційному алгоритмі, де здійснюється безперервний контроль (моніторинг) за виконанням обмежень в кожний поточний момент часу t.

Простором станів цієї реальної керованої системи є простір часткових часів $R^N(t_1,...,t_N)$, а вектором стану - вектор $\bar{t} = (t_1,...,t_N)$. Близьке поняття - багатовимірний час - існує в теорії диференціальних рівнянь і зовнішніх форм (рівняння Пфаффа, теорема Фробеніуса, теорема Рашевського - Чжоу). Однак супервізорний час має одну суттєву відміну: в ньому кожне t_i розглядається *як* *функція поточного часу* t, тобто мова йде про траєкторію $\vec{t} = \vec{t}(t)$ деякої керованої системи в просторі часткових часів, причому виконуються обмеження

$$t_1(t) + \ldots + t_N(t) = t, \quad t_i(t) \geq 0 \quad (t \geq 0).$$

Точне визначення різноманітних таких траєкторій таке.

Нехай $U = \{u_1, \ldots, u_N\}$ - скінченний алфавіт і $u(\cdot) : [0,T] \to U$ - довільне кусково-стале керування. Тоді для $t \in [0,T]$

$$t_i(t) = \operatorname{mes}\{s \in [0,t] : u(s) = u_i\} \quad i = \overline{1,N},$$

тобто в поточний момент $t \in \operatorname{Dom} u(\cdot)$ i-а компонента суперbegin{}ізорного часу $t_i(t)$ є повний час витримки значення u_i при керуванні $u(\cdot)$, реалізованому до моменту t (майбутні значення $u(\cdot)$ можуть бути невідомі). Звідси випливає, що

$$\frac{dt_i(t)}{dt} = \theta_i(u(t)), \quad t_i(0) = 0 \quad \left(i \in \overline{1,N}\right) \tag{4}$$

де, за визначенням, $\theta_i(u_j) = \delta_{ij}$, $i, j \in \overline{1,N}$.

Вирішальним виявляється той факт (лема 1 розділу 2.1), що відповідність $u(\cdot) \mapsto \vec{t}(t)$ є *взаємно однозначною* (з точністю до значень $u(\cdot)$ в моменти перемикань).

Виникає ситуація, коли існують дві множини X і Y, одна з яких, наприклад Y, є метричним простором з відстанню d_Y, причому між ними існує взаємно однозначна відповідність $F: X \to Y$. Тоді на X (навіть якщо на X існує деяка відстань d_X) додатково може бути введена відстань, запозичена з Y:

$$d_F(x_1, x_2) = d_Y\left(F(x_1), F(x_2)\right)$$

В даному випадку на множині всіх кусково-сталих N-позиційних керувань $\{u(\cdot)\}$ може бути введена відстань, запозичена з простору відповідних шляхів $\{\vec{t}(\cdot)\}$.

З системної точки зору два керування $u(\cdot)$, $u^*(\cdot)$ природно вважати близькими, якщо їм відповідають *близькі за відхиленням* шляхи $\bar{t}(\cdot)$, $\bar{t}^*(\cdot)$ в $R^N(t_1,\dots,t_N)$. Тобто мова йде про відстань

$$d_S\left(u(\cdot),\, u^*(\cdot)\right) = \max_{0\le t\le T} \sum_{i=1}^{N} \left| t_i(t) - t_i^*(t) \right|, \qquad (5)$$

яка визначає універсальну системну концепцію близькості N-позиційних керувань.

Це саме є *концепція близькості N-позиційних керувань в топології ковзних режимів.* А щоб переконатися в цьому, треба довести, що в даній метриці обидва простори - кусково-сталих і вимірних (за Лебегом) керувань $u(\cdot)$ із значеннями в U виявляються *неповними*, а їх поповненням є *простір керувань-мір*. Цей факт установлено в розділі 2.2, де керування-міри визначаються як похідні границь фундаментальних послідовностей розв'язків системи (4), коли їх збіжність визначається як збіжність за відхиленням, тобто в метриці, яка використовується в правій частині (5).

Далі за допомогою *гладкої гомотопії в класі ковзних режимів* при мінімальних вимогах до гладкості векторних полів доводиться супервізорна теорема порівняння в класі ковзних режимів, яка є узагальненням і розвитком однієї конструкції В.І.Арнольда, що була використана їм в доведенні достатності (тобто важкої частини) відомої інфінітезимальної умови комутативності течій ("Математические методы классической механики" гл. 8, § 39.Д). В цій теоремі виключно примітивна (первісна) система (4) відіграє роль *універсального об'єкта* - універсальної комутативної системи порівняння для класу динамічних систем з N-позиційним керуванням, тобто систем

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)), \qquad (6)$$

де $t \in R$, $x = (x^1, \ldots, x^n) \in R^n$, з кусково-сталим або вимірним керуванням $u(t)$ зі значеннями у скінченному алфавіті $U = \{u_1, \ldots, u_N\}$.

Супервізорна теорема порівняння стверджує, що якщо розглянути два відхилення $r(t) = x(t) - x^*(t)$, $\vec{\rho}(t) = \vec{l}(t) - \vec{l}^*(t)$, то існує точне інтегральне комутаторне зображення $r(t)$, за допомогою якого $r(t)$ виражається через $\vec{\rho}(s)$ $(0 \le s \le t)$, причому має місце властивість неперервності: при $r(0) \to 0$ із рівномірної збіжності $\vec{\rho}(\cdot)$ до нуля випливає рівномірна збіжність $r(\cdot)$ до нуля.

На справді ця теорема справедлива не тільки для звичайних керувань $u(t)$, $u^*(t)$, але (за деяких умов) і для довільних керувань-мір вигляду $\vec{\theta}(t,x)$, $\vec{\theta}^*(t,x)$, і саме в такому, більш загальному формулюванні вона доводиться в роботі. Тим самим охоплюється випадок апроксимації ковзних режимів $x(t)$, які відповідають (при синтезі зворотного зв'язку в класі керувань-мір) керуванням-мірам $\vec{\theta}(t,x)$.

Розглянемо опуклення системи (6), тобто систему

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{N} \theta_i X_i(t,x), \tag{7}$$

де $X_i(t,x) = f(t,x,u_i)$, $\sum_{i=1}^{N} \theta_i = 1$, $\theta_i \ge 0$ $\left(i \in \overline{1,N}\right)$ Припускається, що векторні поля $X_i(t,x)$ визначені і неперервно диференційовані по сукупності змінних в області $\Gamma \subset R^{n+1}(t, x^1, \ldots, x^n)$ і що

$$\left(x_0 + \lambda\left(x_0^* - x_0\right), 0\right) \in \Gamma \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Нехай $x(t)$, $x^*(t)$ $(0 \in [0,T])$ - розв'язки системи (7), які відповідають узагальненим керуванням $\vec{\theta}(t,x)$, $\vec{\theta}^*(t,x)$ (вимірним по t і неперервно диференційованим по x) і задовольняють початковим умовам $x(0)=x_0$, $x^*(0)=x_0^*$. Тоді визначені складні функції часу

$$\vec{\xi}(t)=\vec{\theta}(t,x),\ \vec{\xi}^*(t)=\vec{\theta}^*(t,x),$$

яким відповідають шляхи в просторі часткових часів

$$\vec{\tau}(t)=\int_0^t\vec{\theta}(s,x(s))ds,\qquad \vec{\tau}^*(t)=\int_0^t\vec{\theta}^*(s,x(s))ds.$$

Розглянемо відхилення $r(t)=x(t)-x^*(t)$, $\vec{\rho}(t)=\vec{\tau}(t)-\vec{\tau}^*(t)$. Тут $r(0)=r_0=x_0^*-x_0$, $\rho_i(0)=0$, $\dot{\rho}_i(t)=\vec{\xi}(t)-\vec{\xi}^*(t)$ $\left(i\in\overline{1,N}\right)$ Побудуємо гладку гомотопію, яка з'єднує розв'язки $x(t)$, $x^*(t)$ *в класі ковзних режимів* (при цьому $x(t)$ і $x^*(t)$ можуть відповідати звичайним керуванням). Визначимо її як однопараметричну сім'ю розв'язків $x(t,\lambda)$ задачі

$$\frac{dx(t,\lambda)}{dt}=\sum_{i=1}^N\xi_i(t,\lambda)X_i\big(t,x(t,\lambda)\big),\qquad x(0,\lambda)=x_0(\lambda),\tag{8}$$

де $\xi_i(t,\lambda)=\vec{\xi}^*(t)+\lambda\dot{\rho}_i(t)$, $x_0(\lambda)=x_0^*+\lambda r_0$ $(0\le\lambda\le 1,\ i\in\overline{1,N})$. Маємо $x(t,0)=x^*(t)$, $x(t,1)=x(t)$, отже,

$$r(t)=x(t)-x^*(t)=\int_0^1 x'_\lambda(t,\lambda)d\lambda,\qquad \big(x'_\lambda(0,\lambda)=r_0\big)$$

Використовуючи рівняння у варіаціях

$$\frac{dx'_\lambda(t,\lambda)}{dt}=L(t,\lambda)x'_\lambda(t,\lambda)+\sum_{i=1}^N X_i\big(t,x(t,\lambda)\big)\dot{\rho}_i(t),\tag{9}$$

де $L(t,\lambda)=\sum_{i=1}^N\xi_i(t,\lambda)DX_i\big(t,x(t,\lambda)\big)$, $DX_i=\left[\dfrac{\partial X_i^\alpha}{\partial x^\beta}\right]\left(\alpha,\beta\in\overline{1,n}\right)$, запишемо $x'_\lambda(t,\lambda)$ в інваріантному вигляді (формула Коші)

$$x'_\lambda(t,\lambda) = \Phi(t,\lambda)\, x'_\lambda(0,\lambda) + \int_0^t \Phi(t,\lambda)\Phi^{-1}(s,\lambda) \sum_{i=1}^N X_i(s,x(s,\lambda))\,\dot\rho_i(s)ds.$$

Тут $\Phi(t,\lambda)$ - фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння, що відповідає (9), $\Phi(0,\lambda) = E$. Але похідна $\dot\rho_i(\cdot)$ може не збігатися ні до якої границі, коли $\rho_i(\cdot)\to 0$ (характеристична властивість ковзних режимів). Природний подальший крок - обчислення інтеграла "частинами". І саме у цій операції виникають *дужки Лі* $[X_i, X_j]$ (в координатному запису $[X_i, X_j] = DX_i \cdot X_j - DX_j \cdot X_i$). Її багатократне застосування дозволяє генерувати дужки Лі якої завгодно "довжини", причому не у груповій (теорія Лі), а в *напівгруповій* ситуації, яка більш адекватна концепції керування. Зперше цей механізм був використаний в [3] у контексті доведення супервізорної теореми порівняння.

Нехай $\omega_{ij}(s,\lambda) = \xi_i(s,\lambda)\rho_j(s) - \xi_j(s,\lambda)\rho_i(s)$, $\partial X_i = \partial X_i/\partial t$. Опускаючи аргумент $(s,x(s,\lambda))$ векторних полів ∂X_i, $[X_i, X_j]$, після елементарних викладок знаходимо *інваріантне комутаторне інтегральне зображення*

$$x'_\lambda(t,\lambda) = \Phi(t,\lambda)\, x'_\lambda(0,\lambda) + \sum_{i=1}^N X_i(t,x(t,\lambda))\rho_i(t) -$$

$$- \int_0^t ds\, \Phi(t,\lambda)\Phi^{-1}(s,\lambda) \left\{ \sum_{i=1}^N \partial X_i \rho_i(s) - \sum_{i<j} \omega_{ij}(s,\lambda)\Big[X_i, X_j\Big] \right\}.$$

Внаслідок обмеженості векторних полів $X_i(t,x)$ на компактних множинах області Γ всі розв'язки $x(t,\lambda)$ $(t\in[0,T],\ \lambda\in[0,1]$ будуть проходити в деякій компактній множині $\Pi\subset\Gamma$. Введемо залежні від компакта Π оціночні константи

$$A_i = \|X_i\|,\quad A'_i = \|\partial X_i\|,\quad L_i = \|DX_i\|,\quad C_{ij} = \Big\|\Big[X_i\ X_j\Big]\Big\|,$$

де $\|Z\| = \max|Z(t,x)|$ по всіх $(t,x)\in\Gamma$; L_i залежить від системи координат; $i\in\overline{1,N}$.

Нехай також $L = \max\{L_1, \ldots, L_N\}$.

Теорема порівняння. *При вище згаданих припущеннях*

$$r(t) = \int_0^1 d\lambda \Phi(t,\lambda) r_0 + \int_0^1 d\lambda \sum_{i=1}^N X_i(t, x(t,\lambda))\rho_i(t) -$$

$$- \int_0^1 d\lambda \int_0^t ds \Phi(t,\lambda)\Phi^{-1}(s,\lambda) \left\{ \sum_{i=1}^N \partial X_i \rho_i(s) - \sum_{i<j} \omega_{ij}(s,\lambda)\left[X_i, X_j\right] \right\}.$$

$$|r(t)| \le \sum_{i=1}^N A_i |\rho_i(t)| + e^{Lt}\left\{ |r_0| + \sum_{i=1}^N A_i' \int_0^t |\rho_i(s)| ds + \sum_{i<j} C_{ij} S_{ij}^t \right\},$$

де $S_{ij}^t = \int_0^1 d\lambda \int_0^t ds |\omega_{ij}(s,\lambda)|$.

Наслідки теореми: достатня умова комутативності рухів (причому, у нестаціонарному варіанті)

$$\left[X_i, X_j\right] = \partial X_i - \partial X_j,$$

яка в літературі установлюється якісним шляхом, і комутаторна мажорантна оцінка їх непереставності у випадку довільних C^1-гладких векторних полів [7]. Дана теорема також зводить задачу апроксимації ковзних режимів $x(t)$ до апроксимації відповідних шляхів $\bar{t}(t)$.

В модифікованому апроксимаційному алгоритмі, який не спирається на поняття модуляції, вихід $u(t)$ генерується у вигляді "слова-черги" $W = (u_{i_1}, s_1)\ldots(u_{i_m}, s_m)$, де u_{i_1} - поточне значення виходу, якому ще тривати s_1, а ідентифікація заздалегідь невідомого, нового значення $u_{i_{m+1}}$ здійснюється по досягненні однієї з компонент $t_i(t)$ свого порогового значення τ_i. Накопичення часу $s_m = t_{i_m}(t)$ останньої літери слова на цьому припиняється і робиться скинення $t_{i_m}(t) = 0$. По мірі обслуговування першого елемента черги він вилучається з неї. У випадку трьохпозиційного керування робота алгоритму ілюструється серією рисунків, отриманих внаслідок обчислювальних експериментів з використанням комп'ютерної графіки в форматі файлів PLT.

Закінчення містить огляд всієї роботи, висновки, постановки нових задач і теорему про гарантовані мажорантні оцінки непереставності матрицевих експонент e^{As}, e^{Bt} з використанням звичайних і логарифмічних матрицевих норм.

Теорема. *Елементарне відхилення*

$$e^{As}e^{Bt} - e^{Bt}e^{As}$$

має такі властивості.

1. *Нехай A, B - дійсні або комплексні матриці порядку n; s, t - дійсні або комплексні змінні; $\|\cdot\|$ - довільна матрицева норма, підпорядкована нормі векторів. Тоді при всіх s, t*

$$e^{As}e^{Bt} - e^{Bt}e^{As} = st\int_0^1 d\alpha\int_0^1 d\beta\, e^{As\alpha}e^{Bt\beta}[A,B]e^{Bt(1-\beta)}e^{As(1-\alpha)},$$

$$\left\|e^{As}e^{Bt} - e^{Bt}e^{As}\right\| \le |st|\left\|[A,B]\right\|e^{\|A\||s|+\|B\||t|}.$$

2. *Якщо s, t - дійсні, тоді при $s \ge 0$, $t \ge 0$*

$$\left\|e^{As}e^{Bt} - e^{Bt}e^{As}\right\| \le |st|\left\|[A,B]\right\|e^{\mu[A]s+\mu[B]t},$$

де $\mu[A]$ - логарифмічна норма матриці A $(-\|A\| \le \mu[A] \le \|A\|)$

$$\mu[A] = \lim_{\tau\to+0}\frac{\|E+\tau A\|-1}{\tau} = \lim_{\tau\to+0}\frac{\ln\left\|e^{A\tau}\right\|}{\tau}.$$

3. *Якщо матриці A, B дійсні і кососиметричні, а $\|\cdot\|_2$ - матрицева норма, підпорядкована евклідовій нормі векторів, тоді при будь-яких дійсних s, t*

$$\left\| e^{As}e^{Bt} - e^{Bt}e^{As} \right\|_2 \le |st| \left\| [A, B] \right\|_2 .$$

Основні результати дисертації сформульовані в пункті "Наукова новизна". Вони одержані особисто автором і опубліковані в роботах:

1. Руденко А.В. О моделировании електрических цепей, коммутируемых идеальными ключами // Автоматика. - 1985. - № 6. - С. 25-32.

2. Руденко А.В. Упрощенная дискретная модель разряда коммутируемого емкостного накопителя на индуктивную нагрузку // Кибернетика и вычисл. техника. - 1986. - Вып. 71. - С. 95-100.

3. Руденко А.В. Об аппроксимации скользящих режимов в системах с ограничениями на частоту переключений // Кибернетика и вычисл. техника. - 1987. - Вып. 75. - С. 44-48.

4. Руденко А.В. О некоторых моделях сравнения в исследовании систем с переключениями режимов // Сложные системы управления. - Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН УССР, 1987. - С. 64-70.

5. Руденко А.В. Прикладная концепция близости N-позиционных управлений в топологии скользящих режимов // Там же. - 1989. - С. 72-78.

6. Руденко А.В. Коммутаторные интегральные представления и конструктивные мажорантные оценки ефекта некоммутативности движений. Елементарное отклонение // Кибернетика и вычисл. техника. - 1993. - Вып. 99. С. 14-37.

7. Руденко А.В. Алгоритм синтеза N-позиционных управлений с фиксированными минимально допустимыми интервалами между переключениями // Там же. - 1994. - Вып. 101. - С. 16-25.

8. Руденко А.В. Стратификации и клетки достижимости свободного произведения $R*R$, проблема пополнения и конструктивные оценки некоммутирующих потоков // VI Всесоюз. конф. "Качественная теория дифференциальных уравнений", Иркутск, 1-3 июля 1986 г.: Тез. докл. - Иркутск, 1986. - С. 164-165.

9. Руденко А.В. Вопросы аппроксимации обобщенных управлений в системах с переключениями режимов // Всесоюз. науч.-техн. конф. "Актуальные проблемы моделирования и управления системами с распределенными параметрами", Одесса, 8-10 сент. 1987 г.: Тез. докл. - Киев: Изд-во Киевск. ун-та, 1987. - Кн. II. - С. 221.

10. Руденко А.В. Концепция близости N-позиционных управлений в топологии скользящих режимов, принцип сравнения и модифицированный аппроксимационный алгоритм // Науч. школа-семинар "Моделирование и исследование устойчивости физических процессов", Киев, 22-24 мая 1990 г.: Тез. докл. - Киев: О-во "Знание" УССР, 1990. - С. 52-53.

11. Чикрий А.А., Руденко А.В. Об аппроксимации скользящих режимов в системах N-позиционного управления с ограничениями на частоту переключений // Межгос. науч. конф. "Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация", Минск, 7-9 дек. 1993 г.: Тез. докл. - Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1993. - С. 81.

12. Руденко О.В. Конструктивні мажорантні оцінки непереставності матрицевих експонент // Симпоз. "Питання оптимізації обчислень", Київ, 22-24 лист. 1993 р.: Тези доп. - Київ, 1993. - С. 150-151.

Руденко А.В. Разработка математических моделей, геометрических методов исследования и алгоритмов управления динамическими системами с переключениями режимов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.01 - теоретические основы информатики и кибернетики (математическая кибернетика), Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины. Киев, 1995.

Защищается рукопись на основе 12 научных работ, в которых сформулированы и разработаны: 1) принцип совместных предельных переходов {ключи неидеальные} --> {ключи идеальные} в дифференциальных уравнениях электрических цепей с предварительно введенными неидеальными ключами как средство математического определения и построения моделей таких цепей в приближении идеальных ключей; 2) прикладная концепция близости *N*-позиционных управлений в топологии скользящих режимов. К основным результатам относятся: супервизорная теорема сравнения, основанная на понятии "*N*-позиционных шахматных часов", и новый алгоритм аппроксимации управлений-мер, параметрами которого являются фиксированные минимально допустимые интервалы между переключениями (модификация ШИМ-алгоритма Р.В.Гамкрелидзе).

Rudenko A.V. Development of mathematical models, geometric research methods and control algorithms for mode-switch dynamical systems. Candidate of Phys. & Math. Sci. Thesis, speciality 01.05.01 - theoretical foundations of informatics and cybernetics (mathematical cybernetics). Glushkov Institute of Cybernetics, NAS of Ukraine, Kiev, 1995.

Defended is the manuscript based on 12 scientific works where are strictly formulated and elaborated: 1) the principle of joint limit transitions {nonideal switches} -> {ideal ones} in differential equations of electrical circuits containing preliminary introduced nonideal switches as a tool both for mathematical definition and for construction of ideal switches approximation models; 2) applied concept of proximity of *N*-position controls in sliding mode topology. The main results involve a supervisory comparison theorem based on a notion of "*N*-position chess-clock", and a new algorithm (modification of R.V.Gamkrelidze, puls-width modulation one) of a relaxed controls approximation with given minimaly feasible intervals between switches as parameters.

Ключові слова: електричні кола з ключами, наближення ідеальних перемикань, сумісна границя, *N*-позиційне керування, ковзний режим, закони зберігання, керування-міри, супервізорний час, некомутативність рухів, дужки Лі, апроксимація, оцінки, алгоритм.

Підп. до друку 22.11.95. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк. Ум. друк. арк. 1,39. Ум. фарбо-відб. 1,51. Обл.-вид арк. 1,0. Зам. 862. Тираж 100 прим.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40