

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
им. Б. И. ВЕРКИНА

На правах рукописи

Кузнецов Олег Владимирович

О локальных изометрических погружениях
двумерных римановых многообразий в E^4
с наперед заданным гауссовым кручением

Специальность 01.01.04
геометрия и топология

Автореферат диссертации на
соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук.

Харьков — 1995.

AB 34.399

Диссертация есть рукопись.

Работа выполнена в Харьковском государственном университете.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор
Аминов Ю. А.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор
Дискант В. И.

кандидат физико-математических наук
Масальцев Л. А.

Ведущая организация: Московский государственный университет им. М. А. Ломоносова,
г. Москва

Защита состоится «.....».....1995 г.

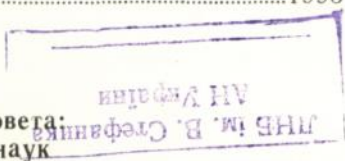
в часов на заседании специализированного ученого совета Д 02.35.01 при Физико-техническом институте низких температур НАН Украина им. Б. И. Веркина по адресу:

310164 г. Харьков, пр. Ленина, 47

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан «.....».....1995 г.

Ученый секретарь
специализированного ученого совета:
доктор физико-математических наук



В. П. КОТЛЯРОВ.

ЛНБ України ім. В. Стефаніка



00754385 (W)

Актуальность темы.

Тема работы относится к одному из важнейших разделов современной дифференциальной геометрии : геометрии подмногообразий евклидова пространства .

Проблема изометрических погружений двумерных поверхностей в евклидовы пространства является одной из старейших проблем геометрии "в целом ", однако интерес к ней не ослабевает и по настоящее время. В этом плане хорошо известны работы Александра А.Д., Погорелова А.В., Ефимова Н.В., Позняка Э.Г., Розендорна Э.Р., Шикина Е.В., Сабитова И.Х., Борисенко А.А., и многих других ученых. Особое место в названной проблеме занимает вопрос об изометрических погружениях в евклидовы пространства метрик отрицательной кривизны . Здесь прежде всего следует обратить внимание на работы Ефимова Н.В., в частности, на известную

теорему Ефимова Н.В. о непогружаемости в E^3 двумерных метрик отрицательной кривизны отделенной от нуля, а также на теоремы Позняка Э.Г. о погружениях двумерных метрик отрицательной кривизны; эти работы играют фундаментальную роль в теории изометрических погружений.

Шикиным Е.В., Кайдасовым Ж.Б., Туницким Д.В. рассмотрены различные типы областей отрицательной кривизны

реализуемых в E^3 , используя оригинальную методику "сглаживания", Розендорн Э.Р. построил поверхности

отрицательной кривизны в E^3 и замкнутую поверхность

отрицательной кривизны в E^4 . Им же исследован вопрос о зависимости регулярности поверхности отрицательной кривизны от регулярности гауссовой кривизны ее внутренней метрики .

Шикин Е.В. разбивает двумерные метрики на два непересекающихся класса : гиперболические , которыми он называет метрики конформные плоскости Лобачевского , и параболические - конформные евклидовой плоскости , и

доказывает, что погружаемые в E^3 метрики являются параболическими. Попов А.Г., рассматривая геометрические интерпретации односолитонного решения уравнения "синус -

Гордона", получил уравнения поверхностей в E^3 , являющихся погружениями бесконечных полос плоскости Лобачевского, ограниченных двумя геодезическими линиями. Названные погружения, как показано, представляют собой винтовые поверхности.

Как известно, внутренней геометрией поверхности постоянной отрицательной кривизны является геометрия Лобачевского. Согласно теореме Гильберта плоскость

Лобачевского L^2 невозможно изометрически погрузить в трехмерное евклидово пространство в виде регулярной

поверхности класса C^2 . Как показано в работе югославского математика Влануса Д. существует изометрическое погружение

L^2 в E^6 , Розендорн Э.Р. доказал существование изометрического

погружения L^2 в E^5 . Вопрос об изометрическом погружении L^2

в E^4 по настоящее время остается открытым, и в этом направлении работают многие математики. Так например, Сабитовым И.Х. показано, что плоскость Лобачевского можно

изометрически погрузить в E^4 в виде кусочно аналитической поверхности. Такое погружение найдено в виде обобщенной поверхности вращения. В работах Розендорна Э.Р., Кадомцева С.Б., Лумисте Ю.Г., Аминова Ю.А. данная проблема рассматривалась с несколько иной точки зрения, здесь указаны некоторые классы поверхностей отрицательной кривизны

в E^4 , которые заведомо не могут реализовывать плоскость L^2 . Кадомцев С.Б. указал два таких класса. Первый класс характеризуется условием: любое внутреннее вращение вокруг одной фиксированной точки поверхности индуцировано

некоторым движением в E^4 , второй класс - условием, что любое внутреннее смещение вдоль любой геодезической из произвольной ее точки в другую ее точку индуцировано

некоторым движением в E^4 . Аминов Ю.А. доказал, что плоскость

Лобачевского невозможно погрузить в E^4 в виде функционально вырожденной поверхности. Лумисте Ю.Г. указал в E^4 еще два класса:

А. Поверхности с $K=-1$, имеющие правильную вещественную сопряженную сеть, у которой направление вектора нормальной кривизны вдоль любой линии одного семейства параллельно вдоль этой же линии в нормальной связности поверхности.

Б. Поверхности с $K=-1$ и плоской нормальной связностью, т.е. с сопряженной ортогональной сетью, у которой векторы нормальной кривизны линий одного семейства имеют в точках любой линии другого семейства одинаковую длину. Розендорном Э.Р. доказано, что плоскость Лобачевского нельзя

реализовать в классе геликоидальных поверхностей в E^4 .

В диссертационной работе рассматриваются изометрические погружения поверхностей с заданным гауссовым кручением. Такой выбор темы исследования связан с тем, что гауссово кручение является единственным инвариантом нормальной связности поверхности, аналогичным кривизне касательной связности, т.е. гауссовой кривизне.

Гауссовым кручением χ поверхности называется удвоенное произведение полуосей эллипса нормальной кривизны. Его геометрический смысл следующий. Возьмем на поверхности

$F^2 \subset E^4$ замкнутый контур, который ограничивает односвязную область G . Вдоль указанного контура перенесем параллельно в нормальной связности единичный нормальный вектор \bar{n} . Пусть $\Delta\phi$ означает угол между начальным положением вектора \bar{n} и положением, полученным в результате параллельного переноса

Тогда $\Delta\phi$ равен интегралу от гауссова кручения по области G .

Изучение изометрических погружений двумерных поверхностей в E^4 с заданным гауссовым кручением является частью общей проблемы изометрических погружений двумерных поверхностей в евклидовы пространства. Погружения двумерных поверхностей с заданным кручением χ рассматривались Аминовым Ю.А. и другими.

Аминовым Ю.А. исследован вопрос о реализации двумерной метрики $dS^2 = du^2 + G(u,v)dv^2$ в E^4 в виде аналитической поверхности, гауссово кручение которой есть заданная аналитическая функция $\chi(u,v)$.

Им же рассмотрены изометрические погружения пространства Лобачевского L^2 в E^4 с полями главных направлений, получена система дифференциальных уравнений, которая полностью описывает данные погружения.

Кроме изометрических погружений гиперболической плоскости с заданным гауссовым кручением, интересна также смежная с ней проблема погружения обычной евклидовой плоскости L^2 с данным, например, нулевым гауссовым кручением. В этом направлении нужно обратить внимание на работы Аминова Ю.А., а также бразильских ученых Dajczer M., Tojeiro R.

Цель работы состоит в

1. Исследовании локальных изометрических погружений двумерных метрик $dS^2 = du^2 + G(u,v)dv^2$ в E^4 с данным гауссовым кручением $\chi(u,v)$, в предположении, что функции $B(u,v)$ и $\chi(u,v)$ обладают конечным классом регулярности.
2. Рассмотрение изометрических погружений с полями главных направлений некоторых областей плоскости Лобачевского L^2 в E^4 , получаемых с помощью односолитонного решения

уравнения " синус - Гордона " : $\varphi_{xx} - \varphi_{yy} - (1 - \alpha^2) \sin \varphi \cos \varphi$, (*).

3. Рассмотрение изометрических погружений гиперболической плоскости L^2 в E^4 с полями главных направлений, которые строятся с помощью произвольного решения уравнения (*), и описание погружаемых при этом областей плоскости Лобачевского.

Научная новизна

Все результаты являются новыми .

Методы исследований :

методы дифференциальной геометрии , высшей алгебры , методы теории дифференциальных уравнений в частных производных .

Практическое и теоретическое значение .

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы при изучении подмногообразий евклидова пространства. Материалы работы могут быть полезны для чтения спецкурсов по дифференциальной геометрии и основаниям геометрии .

Апробация работы .

Результаты работы докладывались и обсуждались на семинаре ХГУ " Геометрия подмногообразий " (руководитель - проф. Аминов Ю.А.), на семинаре кафедры геометрии ХГУ (руководитель - проф. Борисенко А.А.) , на " Семинаре по геометрии " в целом " МГУ" (руководители - проф. Позняк Э.Г., Сабитов И.Х. , Розендорн Э.Р.) а также на международной научной конференции " Лобачевский и современная геометрия " (г. Казань, 1992 г.).

Публикации.

По теме диссертации опубликована статья в Украинском геометрическом сборнике, один тезис на конференции а также статья в журнале "Математическая физика, анализ, геометрия". (Список прилагается).

Объем и структура работы .

Работа носит теоретический характер и состоит из введения и трех глав . Объем работы - 66 страниц машинописного текста , список литературы содержит 96 наименований.

Содержание работы и основные результаты .

В первой главе вводятся основные геометрические объекты, изучаемые в работе, даются необходимые сведения из теории дифференциальных уравнений. Вводятся вектор нормальной кривизны, эллипс нормальной кривизны, гауссовао кручение поверхности. Рассматриваются уравнения Гаусса-Кодацци - Риччи, задающие необходимые условия существования в E^4 двумерной поверхности F^2 , формулируется теорема Бонне . Далее рассматриваются системы квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка. Даются определения эллиптической и гиперболической систем, приводится формулировка теоремы А.Дуглиса о существовании решения гиперболической системы квазилинейных уравнений в некоторой области .

Вторая глава посвящена исследованию вопроса о существовании локального изометрического погружения двумерной метрики $ds^2 = du^2 + B^2(u,v)dv^2$ в виде поверхности $F^2 \subset E^4$ с заданным гауссовым кручением.

Основным результатом второй главы является теорема П.И.: Двумерная метрика $ds^2 = du^2 + B^2(u,v)dv^2$ класса C^5 локально

реализуется в E^4 в виде поверхности F^2 класса C^4 , гауссово кривление которой есть заданная функция $\chi(u, v)$ класса C^3 .

В третьей главе рассматриваются изометрические погружения областей плоскости Лобачевского L^2 с полям главных направлений. Ранее было показано, что такие погружения описываются системой четырех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \omega_x &= -\varphi_y - \frac{\sin \varphi \cos \omega (\alpha \sin \theta + 1)}{\cos \theta}; \\ \omega_y &= -\varphi_x - \frac{\sin \omega \cos \varphi (\alpha \sin \theta + 1)}{\cos \theta}; \end{aligned} \quad (\text{III.3.})$$

$$\begin{aligned} \theta_x &= \sin \varphi \sin \omega (\sin \theta + \alpha); \\ \theta_y &= \cos \varphi \cos \omega (\sin \theta + \alpha); \end{aligned} \quad (\text{III.4.})$$

а также уравнением второго порядка на функцию $\varphi(x, y)$:

$$\varphi_{xx} - \varphi_{yy} = (1 - \alpha^2) \sin \varphi \cos \varphi. \quad (\text{III.5.})$$

В первом параграфе настоящей главы строятся метрики, погружаемые в E^4 с полями главных направлений, которые получаются из (III.3.) - (III.5.) при подстановке в качестве $\varphi(x, y)$ односолитонного решения уравнения (III.5.), описывающие области гиперболической плоскости, отвечающие этим погружениям. Доказана теорема III.1.:

Для каждого односолитонного решения $\varphi(x, y)$ уравнения (III.5.) можно построить изометрическое погружение областей плоскости Лобачевского L^2 в E^4 . При этом погружаются полосы ограниченные :

а) орициклом и некоторой его эквидистантой, т.е. двумя орициклами, если $|\alpha| > 1$;

б) двумя эквидистантами геодезической линии, если $0 \leq |\alpha| < 1$

Ширина указанных полос ограничена снизу числами $\ln \left| \frac{\alpha \operatorname{ch} k}{\alpha \operatorname{ch} k - 1} \right|$,

$\frac{1}{2} \left| \ln \operatorname{cth}^2 k \right|$ для случаев а) и б) соответственно.

В ходе доказательства теоремы III.1. решение $\omega(x, y)$ и $\theta(x, y)$ получены в явном виде :

$$\omega(x, y) = -\operatorname{arctg}(\operatorname{cthk} \operatorname{sh} z),$$

$$\theta(x, y) = \operatorname{arccos} \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 k \operatorname{ch}^2 z - 1}{\alpha^2 \operatorname{ch}^2 k \operatorname{ch}^2 z - 1}} - \operatorname{arccos} \sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 \operatorname{ch}^2 k \operatorname{ch}^2 z - 1}}$$

или, если $0 \leq |\alpha| < 1$, возможны два значения $\omega(x, y)$:

$$\omega_1(x, y) = -\operatorname{arctg}(\operatorname{tgk} \operatorname{sh} z) + \operatorname{arctg}(\operatorname{shk} \operatorname{ch} z);$$

$$\omega_2(x, y) = -\operatorname{arctg}(\operatorname{tgk} \operatorname{sh} z) - \operatorname{arctg}(\operatorname{shk} \operatorname{ch} z),$$

которым соответствует угол $\theta = \pi + \operatorname{arccos} \sqrt{1 - \alpha^2}$
где через z обозначены выражения :

$$z = x \sqrt{\alpha^2 - 1} \operatorname{chk} + y \sqrt{\alpha^2 - 1} \operatorname{shk} + \delta_1, \text{ если } |\alpha| > 1$$

$$\text{или } z = x \sqrt{1 - \alpha^2} \operatorname{shk} + y \sqrt{1 - \alpha^2} \operatorname{chk} + \delta_2, \text{ если } 0 \leq |\alpha| < 1.$$

В параграфе 2 строятся погружения L^2 , соответствующие произвольному решению уравнения (III.5.), при этом доказываются следующие теоремы :

Теорема III.2.1. Для любой функции $\varphi(x, y)$, удовлетворяющей уравнение (III.5.), существует решение системы (III.3.) - (III.4.), а значит изометрическое погружение некоторой области плоскости Лобачевского L^2 в E^4 с плоской нормальной связностью. При этом:

если $\sin \theta + \alpha \neq 0$, то погружаются "прямоугольники" ограниченные дугами орициклов $\theta(\xi, \eta) = \theta_1 = \operatorname{const}$ и $\theta(\xi, \eta) = \theta_2 = \operatorname{const}$ длины $\sqrt{2} R \sin^2 \varepsilon$ и дугами геодезических, ортогональных названным орициклам

и имеющих длину равную $\ln \left| \frac{\sin \theta_1 + \alpha}{\sin \theta_2 + \alpha} \right|$.

Величина R зависит от начальных условий :

$\varphi_i(\xi, 0) = \varphi_1(\xi)$, $\varphi_n(0, \eta) = \varphi_2(\eta)$, $\theta(0, 0) = \theta_0$, $\omega(0, 0) = \omega_0$, а именно:

$$R = -\varepsilon + \min \{R_1, C_1\}, \quad R_1 = \frac{\frac{\pi}{2} - \varepsilon - |\theta_0|}{2(1+|\alpha|)}, \quad C_1 = \min \left\{ \frac{\omega_0 - \varepsilon}{C}, \frac{\frac{\pi}{2} - \varepsilon - |\theta_0|}{C} \right\},$$

$$= \left\{ a_1 + |\alpha^2 - 1| \cdot R_1 + \frac{1 + |\alpha|}{\sin \varepsilon} \right\}$$

$$a_1 = \max_{\xi^2 + \eta^2 \leq R_1^2} \{ |\varphi_1(\xi)|, |\varphi_2(\eta)| \}, \quad \xi = \frac{x+y}{2}, \quad \eta = \frac{x-y}{2}.$$

Теорема III.2.2. Если $\sin \theta + \alpha \neq 0$ то:

а) функция $\omega(x, y)$ удовлетворяет уравнению "синус-Гордона":

$$\omega_{xx} - \omega_{yy} = (\alpha^2 - 1) \sin \omega \cdot \cos \omega. \quad (111.2.11.)$$

б) для любой функции $\omega(x, y)$, являющейся решением уравнения (111.2.11.) в круге $\rho \leq R_3 - \varepsilon$, существует единственная функция $\varphi(x, y)$, удовлетворяющая (111.5.) такая, что будут выполняться (111.3.) - (111.4.).

Радиус R_3 зависит от начальных условий:

$$\omega_\xi(\xi, 0) = \omega_1(\xi), \quad \omega_\eta(0, \eta) = \omega_2(\eta), \quad \varphi(0, 0) = 0, \quad \text{константы } R_4 \text{ и}$$

является решением неравенства: $2(1 - \alpha^2)\rho^2 + 2a_2\rho + \varepsilon - \varphi_0 < 0$

$$\text{где } a_2 = \max_{\xi^2 + \eta^2 \leq R_4^2} \{ |\omega_1(\xi)|, |\omega_2(\eta)| \}, \quad 0 < \varphi_0 \leq \frac{\pi}{4}$$

*Основные положения диссертации
опубликованы в работах:*

1. Кузнецов О.В. О локальных изометрических погружениях двумерных метрик в E^4 с заданным гауссовым кручением // Укр.геом.сб. 1992 . Вып. 35, с. 38 - 46.
2. Кузнецов О.В. Изометрические погружения некоторых областей плоскости Лобачевского L^2 в E^4 с нулевым гауссовым кручением // Межд.научн.конф. " Лобачевский и современная геометрия . " Казань , 1992, тезисы докл., ч.1, с.47.
3. Кузнецов О.В. Изометрические погружения некоторых областей плоскости Лобачевского L^2 в E^4 с нулевым гауссовым кручением //Математическая физика. анализ, геометрия,- 1994.-т.1, №3/4, с.462-468.

О.Кузнецов

Кузнецов О.В.

Про локальні ізометричні занурення двовимірних

ріманових многовидів в E^4 з наперед заданим гаусовим скрутом. Рукопис. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за фахом 01.01.04.- Геометрія і топологія. Харківський інститут низьких температур ім. Б.І.Веркіна НАН України. Харків 1995.

Дисертація присвячена дослідженню локальних ізометричних занурень двовимірних ріманових метрик в E^4 з наперед заданим гаусовим скрутом, а також дослідженню деяких ізометричних занурень областей площини Лобачевського L^2 в E^4 з нульовим гаусовим скрутом.

Основні результати дисертації полягають в твердженнях, де визначається гладкість заданих метрик і скруту $\chi(u, v)$, а також вид областей площини Лобачевського, які занурюються; вказуються розміри цих областей.

Kuznetsov O.V.

An local isometric immersions of two dimensional

Riemannian manifolds into E^4 , that have specifed Gaussian torsion. Handwriting. This is for Candidats of science degree (Ph.D.) in Phisics and mathematics, speciality 01.01.04 - Geometry and topology. Kharkov. Lenin av. 47. Kharkov 1995.

The dissertation considers local isometric immersions of two dimensional Riemannian manifolds into E^4 , that have specifed Gaussian torsion $\chi(u, v)$, and concerns the immersions of certain domains of Lobachevsky's plane L^2 into E^4 , which have flat normal connection.

The basic results of this work are contained the regular class of immersions, the regular class of the torsion $\chi(u, v)$, and tupes of the domains, which are immersed.

Ключові слова:

ізометричні занурення, гауссова кривина, гаусовий скрут, ріманова метрика.

Зак. № 696. т. 100

445603

AB 34.399

AB 34.399