МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
Львівський державний університет
ім. Ів. Франка

На правах рукопису

КОЛІНЬКО
Марія Омелянівна

ЗАДАЧІ ФУР'Є ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ І ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ

01.01.02 – Диференціальні рівняння

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Львів – 1996

Робота виконана в Львівському державному університеті ім. Ів.Франка

Науковий керівник: кандидат фізико–математичних наук, доцент Лавренюк Сергій Павлович

Офіційні опоненти: доктор фізико–математичних наук, професор Каленюк Петро Іванович

Кандидат фізико–математичних наук, доцент Лавренчук Володимир Петрович

Провідна організація: Інститут прикладних проблем математики і механіки НАН України

Захист відбудеться 15 лютого 1996 р. о 15^{30} год. на засіданні Спеціалізованої ради Д.04.04.01 при Львівському державному університеті ім. І.Франка за адресою: 290602, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд.377.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Львівського державного університету ім. І.Франка (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розісланий 12 січня 1996 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Я.В.Микитюк

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Добре відомо, що псевдопараболічні рівняння описують багато різних фізичних процесів. Так, наприклад, вони описують процес перенесення вологи в грунті, фільтрацію рідини в середовищі з подвійною пористістю, передачу тепла в гетерогенному середовищі, дифузію в так званому тріщинуватому середовищі з поглинанням або частковим насиченням, процес застигання клею та інші.

Систематичне вивчення задачі Коші та мішаних задач для псевдопараболічних рівнянь і для більш широкого класу – рівнянь типу Соболєва-Гальперна, що описують вказані вище фізичні процеси, розпочалось у 50-х роках нашого століття і продовжується до тепер у роботах С.Л.Соболєва, С.А.Гальперна, Р.Е.Шовальтера, Т.В.Тінга, У.Рандела, У.Г.Форда, М.Бохма, Д.Колтона, І.Сувейка, М.Х.Шханукова, А.Г.Костюченка, Г.И.Ескіна, Х.Гаєвського та інших авторів.

Задачі Фур'є (або задачі без початкових умов) описують довготривалі процеси, тобто процеси, що на їх протікання в певний момент часу, достатньо віддалений від початкового, впливають лише крайові умови та внутрішні джерела.

Задачі Фур'є є добре дослідженими для параболічних рівнянь та систем. Ще в 30-х роках нашого століття А.М.Тихонов розв'язав задачу Фур'є для рівняння теплопровідності. Як виявилось, для коректності такої задачі потрібно лише вказати характер поведінки розв'язку при $t \to -\infty$. Для рівнянь теплопровідності клас коректності задачі без початкових умов визначається функціями експоненціального зростання при $t \to -\infty$, причому швидкість зростання залежить від коефіцієнтів рівняння.

Досить повно вивчені задачі Фур'є для лінійних параболічних систем. Єдиність розв'язку таких задач в класах обмежених розв'язків доведена в роботах М.Д.Мартиненка і Л.Ф.Бойко, А.І.Горшкова.

Лініні системи більш загального вигляду розглядались у роботах О.А.Олійник і Г.А.Іосіфяна, та інших авторів. Доведено єдиність розв'язку задачі Фур'є для таких систем в класах гладких функцій. Класи коректності задач Фур'є для параболічних і деяких інших еволюційних систем встановлені також С.Д.Івасишеним. Характеризуються ці класи певною гладкістю розв'язків і визначаються коефіцієнтами систем. Тому актуальним є знаходження класів коректності задачі Фур'є для еволюційних (у тому числі параболічних) систем, коефіцієнти яких – вимірні суттєво обмежені функції.

Досить цікавими для вивчення є також задачі без початкових умов для нелінійних та квазілінійних рівнянь і систем. Задача Фур'є для слабо нелінійних параболічних систем досліджена у роботах М.І.Матійчука і В.П.Лавренчука, С.П.Лавренюка і П.Я.Пукача. Задачі Фур'є для квазілінійних рівнянь та систем розглядались у роботах М.Накау, М.М.Бокала. Зауважимо, що досить вагомими є результати М.М.Бокала, щодо задачі Фур'є для квазілінійних та нелінійних параболічних рівнянь з монотонною просторовою частиною. Єдиність розв'язку таких задач доведена без обмежень на поведінку розв'язку при $t \to -\infty$. А існування розв'язку не вимагає обмежень на поведінку правої частини рівнянь.

Що до задач без початкових умов, які стосуються не параболічних, а псевдопараболічних рівнянь та систем типу Соболєва-Гальперна, то слід зазначити, що нам відома лише робота І.Т.Іскандерова і Н.К.Ахмедова. У цій роботі доведена єдиність розв'язку задачі Фур'є для деякого лінійного псевдопараболічного рівняння. Тому, на наш погляд, актуально ширше дослідити мало вивчений об'єкт – задачі Фур'є для рівнянь та систем типу Соболєва- Гальперна, зокрема, і для псевдопараболічних рівнянь.

Мета роботи полягає в побудові класів коректності задач Фур'є (задач без початкових умов) для лінійних та нелінійних систем Соболєва-Гальперна, зокрема, псевдопараболічних систем, а також для параболічних систем з вимірними за Лебегом коефіцієнтами.

Наукова новизна роботи полягає:

– у встановленні достатніх умов коректності задачі Фур'є для лінійних ситем типу Соболєва-Гальперна, які в окремих випадках близькі до непокращуваних;

– у побудові нелінійної псевдопараболічної системи, коректість задачі Фур'є для якої не залежить від поведінки розв'язку при $t \to -\infty$;

– у встановленні просторів коректності задачі Фур'є для лінійної параболічної ситеми та слабо нелінійного параболічного рівняння з другою похідною за часом і з вимірними за Лебегом коефіцієнтами.

Методи досліджень. У роботі використовуються метод Гальоркіна, метод компактності, метод монотонності та метод штрафу. Ці методи дозволяють на основі апріорних оцінок гальоркінських наближень побудувати послідовності функцій, збіжні до розв'язків поставлених задач.

Наукова та практична цінність роботи. Робота має теоретичний характер і її результати сформульовані у вигляді теорем. Отримані результати можуть бути використані для подальшого розвитку теорії псевдопараболічних систем та систем типу Соболєва-Гальперна, а також при дослідженні фізичних процесів, пов'язаних з фільтрацією вологи в грунтах, в тріщинуватих середовищах і т.п.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на таких конференціях і семінарах:

- Всеукраїнська наукова конференція "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (Дрогобич, 1994 р.);
- спільний семінар Московського математичного товариства і семінар імені І.Г. Петровського (Москва, 1995 р.);
- Міжнародна конференція з нелінійних диференціальних рівнянь (Київ, 1995 р.);

– семінар з диференціальних рівнянь Чернівецького університету (керівник С.Д. Івасишен, Чернівці, 1995);

– Львівський міський семінар з диференціальних рівнянь (керівники Б.Й. Пташник, В.Я. Скоробагатько, С.П. Лавренюк, Львів, 1994–1995);

– семінар кафедри вищої математики Львівського сільськогосподарського інституту (керівник Ф.В. Семерак, 1995 р.).

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 8 робіт, перелік яких наведено в кінці автореферату.

Структура і об'єм дисертації. Дисертація складається з вступу, двох розділів і списку цитованої літератури. Робота викладена на 128 сторінках і включає список літератури, що містить 90 джерел.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обгрунтовується актуальність теми, дано короткий огляд результатів, що мають безпосереднє відношення до теми роботи, викладено зміст дисертації.

Перший розділ "Задача без початкових умов для однієї системи типу Соболєва-Гальперна" складається з трьох параграфів.

В параграфі 1.1 досліджується задача Фур'є для лінійної системи

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\left(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t\right) &\; + \\ +\sum_{|\alpha|=|\beta|\le p}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\left(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u\right) &\; + \\ +\sum_{|\alpha|\le p}C_\alpha(x,t)D^\alpha u &= F(x,t)\end{aligned} \tag{1}$$

з крайовими умовами Діріхле

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\right|_{S_T} = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{2}$$

Задача розглядається в області $Q_T = \Omega \times \Im_T$, $\Im_T = (-\infty, T]$, $T < \infty$, де Ω–обмежена область в $\mathcal{R}^n$ з межею $\partial\Omega \in C^p$. $S_T = \partial\Omega \times \Im_T$; ν–зовнішня нормаль до S_T.

Тут $p \geq m$, $m \geq 1$;

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad , \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n;$$
$$u = (u_1, \ldots, u_l) \quad , \qquad F = (f_1, \ldots, f_l);$$

$A_{\alpha\beta}$ $(|\alpha| = |\beta| \leq m)$, $B_{\kappa\sigma}$ $(|\kappa| = |\sigma| \leq p)$, C_θ $(\theta \leq p)$ – квадратні матриці розміру $l \times l$.

Вводиться простір $V^p_{\gamma,j}$, як замикання за нормою

$$\|u\|_{p,\gamma,j} = \left(\int\limits_{Q_T} \left(j \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u_t|^2 + \sum_{|\alpha|=p} |D^\alpha u|^2 \right) \varphi(t) dx\, dt \right)^{1/2},$$
$$\varphi(t) = e^{\gamma t}, \; j = 0, 1,$$

множини $C^\infty_\circ(Q_T)$ нескінченно диференційовних функцій з компактним носієм в Q_T, рівних нулю в околі S_T.
Аналогічно вводиться простір $V_{p,\omega,j}$ з функцією $\varphi(t) = |t|^\omega$.

Означення. Функцію $u(x,t)$, будемо називати узагальненим розв'язком задачі (1), (2) у просторі $V^p_{\gamma,0}$ якщо вона задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_T} \Big[- \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m} (A_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha \psi_t) - \gamma \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m} (A_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha \psi) -$$
$$- \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m} (A_{\alpha\beta t} D^\beta u, D^\alpha \psi) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq p} (B_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha \psi) +$$
$$+ \sum_{|\alpha|\leq p} (C_\alpha D^\alpha u, \psi) - (F, \psi) \Big] e^{\gamma t} dx\, dt = 0 \tag{3}$$

для кожної функції $\psi \in V^p_{\gamma,1}$ такої, що $\psi(T) = 0$.

Означення узагальненого розв'язку задачі (1), (2) в просторах $V^p_{\gamma,1}$, $V_{p,\omega,1}$ формулюється аналогічно.

Відносно матриць $A_{\alpha\beta}$, $(|\alpha| = |\beta| \le m)$; $B_{\kappa\sigma}$, $(|\kappa| = |\sigma| \le p)$ зроблено наступні припущення:

$$(A_i): \quad a_i(t) \int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha \omega|^2 dx \le$$

$$\le \int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} \left(\frac{\partial^i}{\partial t^i} \left(A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta \omega, D^\alpha \omega \right) \right) dx \le$$

$$\le a^i(t) \int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha \omega|^2 dx, \quad i = 0, 1, \quad t \in \Im_T;$$

$$(B_0): \quad b_0(t) \int_\Omega \sum_{|\alpha|=p} |D^\alpha \omega|^2 dx \le$$

$$\le \int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|\le p} \left(B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta \omega, D^\alpha \omega \right) dx \le$$

$$\le b^0(t) \int_\Omega \sum_{|\alpha|=p} |D^\alpha \omega|^2 dx, \quad t \in \Im_T,$$

для довільної $\omega(x) \in \left(\overset{\circ}{H^p}(\Omega) \right)^l$.

Введені позначення:

$$c_0(\tau) = \sup_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|\le p} \|C_\alpha(x,t)\|^2, \quad \tau \in \Im_T;$$

$$c_1(\tau) = \sup_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|\le p} \|C_{\alpha t}(x,t)\|^2, \quad \tau \in \Im_T;$$

$$b_2(\tau) = \sup_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le p} \|B_{\alpha t}(x,t)\|^2, \quad \tau \in \Im_T,$$

тут $\|C_\alpha(x,t)\|$ – евклідова норма матриці C_α;

$$\inf_{\Im_T} b_0(t) = \bar{b_0};$$

$$\inf_{\Im_T}\sup_{\Im_\tau} a^0(t) = a_4;$$
$$\inf_{\Im_T} a_0(t) = \bar{a_0};$$
$$\inf_{\Im_T} c_i(t) = \bar{c_i};\ i = 0, 1;$$
$$\inf_{\Im_T} \max\{\sup_{\Im_\tau} a^1(t); 0\} = a_5;$$
$$\inf_{\Im_T}\sup_{\Im_\tau} a^1(t) = a_6;$$

$\gamma_p = \sum\limits_{i=0}^{p} \gamma_{i,p}$, де $\gamma_{i,p}$–сталі з нерівності Фрідріхса

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=i} |D^\alpha v|^2 dx \le \gamma_{i,p} \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=p} |D^\alpha v|^2 dx, \quad i = 0, \ldots, p, \tag{4}$$

залежні лише від Ω, i, p.

Сформульовано і доведено теорему.

Теорема 1. Нехай $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$, $A_{\alpha\beta} = A^*_{\alpha\beta}$; $A_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta t} \in L^\infty(Q_T)$, $(|\alpha| = |\beta| \le m)$; $B_{\kappa\sigma} \in L^\infty(Q_T)$, $(|\kappa| = |\sigma| \le p)$; $C_\theta \in L^\infty(Q_T)$ $(\theta \le p)$; виконуються умови (A_i) (при $i = 0, 1$) та (B_0).

Тоді, якщо

$$\omega_4 = 2\bar{b}_0 - a_5\gamma_{m,p} - 2\sqrt{\bar{c}_0\gamma_p\gamma_{0,p}} > 0,$$

то задача (1), (2) не може мати більше одного розв'язку в просторі $V^p_{\gamma,1}$, де

$$0 < \gamma < \frac{\omega_4}{a_4\gamma_{m,p}}.$$

Якщо ж $\omega_4 \le 0$, то задача (1), (2) не може мати більше одного розв'язку в просторі $V^p_{\gamma,1}$, де $\gamma = -\gamma_0$ і

$$\gamma_0 > \frac{\gamma_{0,m}\gamma_p\bar{c}_0}{2\bar{b}_0\bar{a}_0} + \frac{a_6}{\bar{a}_0}, \quad \gamma_0 \ge 0.$$

Подібним чином формулюється і доводиться теорема єдиності розв'язку задачі Фур'є (1), (2) в просторі $V_{p,\omega,1}$– функцій степеневого спадання при $t \to -\infty$ з показником, залежним від коефіцієнтів системи.

Для формулювання теореми існування розв'язку задачі (1), (2) введено додаткові позначення:

$$a_8 = \max\{a_5;\ \inf_{\Im_T} \max\{\sup_{\Im_\tau}(-a^1(t));\ 0\};$$
$$a_9 = \inf_{\Im_T} a_1(t).$$

Теорема 2. Нехай $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha},\ A_{\alpha\beta} = A^*_{\alpha\beta};\ A_{\alpha\beta},\ A_{\alpha\beta t} \in L^\infty(Q_T)$, $(|\alpha| = |\beta| \le m);\ B_{\kappa\mu} \in L^\infty(Q_T),\ (|\kappa| = |\mu| \le p);\ C_\theta \in L^\infty(Q_T)\ (|\theta| \le p)$; виконуються умови (A_i) (при $i = 0, 1$) та (B_0);

$$\int_{Q_T} |F|^2 e^{\gamma t} dx\, dt < \infty; \qquad \bar{a}_0 > 0.$$

Тоді, якщо $\omega_4 > 0$, то задача (1), (2) має розв'язок у просторі $V^p_{\gamma,0}$, де

$$0 < \gamma < \frac{\omega_4}{a_4 \gamma_{m,p}}.$$

Якщо ж $\omega_4 \le 0$, задача (1), (2) має розв'язок $u(x,t) \in V^p_{\gamma,0}$,

$$\text{де} \quad \gamma = -\gamma_0 \quad \text{і} \quad \gamma_0 > \frac{\gamma_{0,m}\gamma_p \bar{c}_0}{2\bar{a}_0 \bar{b}_0} + \frac{a_6}{\bar{a}_0}, \qquad \gamma_0 \ge 0.$$

Якщо, крім того $B_{\alpha\beta t} \in L^\infty(|\alpha| = |\beta| \le p)$, $C_{\kappa t} \in L^\infty(Q_T)\ (|\kappa| \le p)$;

$$\int_{Q_T} |F_t|^2 e^{\gamma t} dx\, dt < \infty;$$

$$\omega_6 = 2\bar{b}_0 - a_8 \gamma_{m,p} - 2\sqrt{\bar{c}_0 \gamma_p \gamma_{0,p}} > 0; \quad 0 < \gamma < \frac{\omega_6}{a_4 \gamma_{m,p}},$$

то задача (1), (2) має узагальнений розв'язок в просторі $V^p_{\gamma,1}$.

Якщо ж $\omega_6 \le 0$, задача (1), (2) має розв'язок $u(x,t) \in V^p_{\gamma,1}$,

$$\text{де} \quad \gamma = -\gamma_0 \quad \text{і} \quad \gamma_0 > \frac{\gamma_{0,m}\gamma_p \bar{c}_0}{2\bar{a}_0 \bar{b}_0} + \frac{a_9}{\bar{a}_0}, \qquad \gamma_0 \ge 0.$$

Аналогічна теорема існування розв'язку задачі (1), (2) доводиться в просторі $V^p_{\omega,1}$.

Далі розглядається випадок $m > p$, $p \ge 0$, $F = F(x)$.
Для формулювання теорем єдиності і існування розв'язку задачі (1), (2) в цьому випадку додатково припускаємо, що для коефіцієнтів системи виконується умова

$$(B_1): \quad \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le p} \left(B_{\alpha\beta t}(x,t)D^\beta v, D^\alpha v\right) dx \le b_p^1 \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=p} |D^\alpha v|^2 dx,$$

майже для всіх $t \in (-\infty, T]$ і $v \in (\overset{\circ}{H}{}^p(\Omega))^N$.

Теорема 3. Нехай $A_{\alpha\beta}$, $C_\alpha(|\alpha| = |\beta| \le m)$, $B_{\kappa\sigma}$, $B_{\kappa\sigma t}(|\kappa| = |\sigma| \le p) \in L^\infty(Q_T)$; $F \in (L^2(\Omega))^N$; $B_{\kappa\sigma} = B_{\sigma\kappa}$, $B_{\kappa\sigma} = B^*_{\kappa\sigma}, (x,t) \in \bar{Q}_T$; виконуються умови (A_0), (B_0), (B_1) і, крім того, $b_p^1 \le 0$, $\bar{a}_0 > \sqrt{c_0\gamma_m}$. Тоді існує узагальнений розв'язок $u(x,t)$ задачі (1), (2) такий, що

$$u \in L^\infty((-\infty,T); (\overset{\circ}{H}{}^p(\Omega))^N), \quad u_t \in L^2((-\infty,T); (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N).$$

Зауваження. Теорема 3 залишиться справедливою, якщо права частина системи (1) є функцією t, тобто $F = F(x,t)$. Але відносно $F(x,t)$ потрібно припускати, що

$$\int\limits_{Q_T} |F_t(x,t)|^2\, dx\, dt < \infty.$$

Теорема 4. Нехай $C_\alpha \equiv 0$; $A_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta t}(|\alpha| = |\beta| \le m)$, $B_{\kappa\sigma}, (|\kappa| = |\sigma| \le p) \in L^\infty(Q_T)$; $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$, $A_{\alpha\beta} = A^*_{\alpha\beta}$, $(|\alpha| = |\beta| \le m)$, $(x,t) \in \bar{Q}_T$ і, крім того, виконуються умови (A_0), (B_0), $a^1(t) \le 0$.
Тоді задача (1), (2) не може мати більше одного узагальненого розв'язку в класі функцій $u(x,t)$ таких, що

$$u_t \in L^2_{loc}((-\infty,T]; (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N);$$

$$u \in L^\infty_{loc}((-\infty,T]; (\overset{\circ}{H}{}^p(\Omega))^N);$$

$$\int\limits_{\Omega_{t_k}} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u_t|^2 dx \to 0, \quad t_k \to -\infty,$$

для невиключних точок t_k функції $u_t(x,t)$.

У §1.2 досліджується задача Фур'є для лінійної системи Соболєва-Гальперна в нециліндричній області Q_T такій, що

$$Q_T \bigcap \{t = \tau\} = \Omega_\tau$$

є обмеженою областю в $\mathcal{R}^n$ для всіх $\tau \in \Im$, $\Im = (-\infty, T)$.

Розглядається система

$$\begin{aligned} u_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u_t) &\quad + \\ + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq p} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u) &= F(x,t) \end{aligned} \qquad (5)$$

з крайовими умовами

$$D^\alpha u = 0 \quad \text{на} \quad S_T, \quad |\alpha| \leq p-1, \qquad (6)$$

де $S_T = \bigcup\limits_{t\in\Im_T} \partial\Omega_t$.
Припускається, що $p \geq m$; $m \geq 1$.

Вводиться простір $W^p_m(Q_{t_1,t_2})$ – замикання простору нескінченно-диференційовних вектор-функцій $u = (u_1, \ldots, u_N)$ в $\bar{Q}_{t_1,t_2}$, рівних нулю в околі S_{t_1,t_2}, за нормою

$$\|u\|_{W^p_m(Q_{t_1,t_2})} = \left(\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left(\sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u_t|^2 + \sum_{|\alpha|=p} |D^\alpha u|^2 \right) dx\, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тут $Q_{t_1,t_2} = \bigcup\limits_{t\in(t_1,t_2)} \Omega_t$, $S_{t_1,t_2} = \bigcup\limits_{t\in(t_1,t_2)} \partial\Omega_t$.
Дослідження задачі проводиться в просторі $W^p_m(Q_T)$ функцій $u(x,t)$ таких, що $u \in W^p_m(Q_{t_1,T})$ для довільного $t_1 \in \Im$.

Для формулювання основного результату цього розділу введено позначення:

$$\begin{aligned} \rho_0(t) &= \frac{2b^0_p(t)}{\gamma_{p,m}(t)} - a_{m,1}(t); \\ \rho_1(t) &= \gamma_{p,m}(t) + a^1_m(t); \end{aligned}$$

Доведено твердження.

Теорема 5. Нехай для коефіцієнтів системи (5) виконуються умови (A_0), (A_1), (B_0); $B_{\alpha\beta}$, $A_{\kappa\gamma}$, $A_{\kappa\gamma t} \in L^{\infty}_{loc}(\bar{Q}_T)$, ($|\alpha| = |\beta| \le p$,) ($|\kappa| = |\gamma| \le m$;) ρ_0, ρ_1, $f_0 \in L^{\infty}_{loc}(\bar{\Im})$, $\frac{\rho_0}{\rho_1} \in L^{1}_{loc}(\bar{\Im})$, $\rho_1(t) \ge 0$, $t \in \Im$; $\rho_0(t) > 0$, $t \in \Im$ $a^0_m(T) \ge 0$. Тоді задача (5), (6) не може мати більше одного узагальненого розв'язку в класі функцій $u(x,t) \in W^p_m(Q_T)$ таких, що існує послідовність точок $\{t_k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = -\infty$ і

$$\int\limits_{\Omega_{t_k}} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x,t_k)|^2 dx \le \frac{\varepsilon(t_k)}{\rho_1(t_k)} \exp\Big(\int\limits_{t_k}^{T} \frac{\rho_0(t)dt}{\rho_1(t)}\Big),$$
$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon(t_k) = 0. \tag{7}$$

Наведено приклад, який підтверджує точність отриманого результату.

В §1.3 досліджується задача Фур'є для нелінійної псевдопараболічної системи в циліндричній області $Q_T = \Omega \times (-\infty, T)$, $T < \infty$.

Розглядаєтья система вигляду

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(u) \;&\equiv\; u_t + \sum_{1\le|\alpha|=|\beta|\le l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u) + \\ &+ \sum_{1\le|\alpha|\le l} H_\alpha(x,t) D^\alpha u - \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t) u_{x_i t})_{x_i} + \mathcal{B}(u) + G(x,t)u = \\ &= \sum_{|\alpha|\le 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t),\end{aligned} \tag{8}$$

де

$$\mathcal{B}(u) = -\sum_{i=1}^{n} (C_i(x)\theta_i)_{x_i},$$

$C_i(x) = diag\{c^i_1(x), \ldots, c^i_N(x)\}$, $i = 1, \ldots, n$;
$\theta_i = colon(|u_{1,x_i}|^{p-2} u_{1,x_i}, \ldots, |u_{N,x_i}|^{p-2} u_{N,x_i})$, $i = 1, \ldots, n$; $p > 2$;
$l \ge 1$, $A_{\alpha\beta}$, B_{ij}, H_α, G –квадратні матриці розміру $N \times N$;

$u = colon(u_1, \ldots, u_N)$; $F_\alpha = colon(f_{1\alpha}, \ldots, f_{N\alpha})$, $|\alpha| \le 1$

. з крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\right|_{S_T} = 0, \quad i = 0, \ldots, l-1. \tag{9}$$

Через V позначається рефлексивний банахів простір

$$V = (\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega))^N.$$

з нормою

$$\|u\|_V = \|u\|_{(\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N} + \|u\|_{(\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega))^N}.$$

Припускається, що для коефіцієнтів системи (8) виконуються відповідно умови (A), (B), (C), (G), якщо :

(A) : $A_{\alpha\beta}(x,t) \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \le |\alpha| = |\beta| \le l;$

$$\int_\Omega \sum_{1 \le |\alpha| = |\beta| \le l} (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta w, D^\alpha w) dx \ge a_0 \int_\Omega \sum_{|\alpha| = l} |D^\alpha w|^2 dx,$$

$a_0 > 0, \forall w \in (\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N;$

(B) : $B_{ij}(x,t), B_{ijt}(x,t) \in L^\infty(Q_T);$

$B_{ij}(x,t) = B_{ji}(x,t); \quad B_{ij}(x,t) = B^*_{ij}(x,t),$

$i, j = 1, \ldots, n;$ майже для всіх $(x,t) \in Q_T;$

$$\sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)\xi_i, \xi_j) \ge b_0 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2, \quad b_0 > 0,$$

для всіх $\xi_i \in \Re^N$ і майже для всіх $(x,t) \in Q_T;$

(C) : $C_i(x) \in L^\infty(\Omega), \; i = 1, \ldots, n; \; c^i_k(x) \ge c_0 > 0,$

майже для всіх $x \in \Omega; j = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, N;$

(G) : $G(x,t) \in L^\infty(Q_T);$

$(G(x,t)\xi, \xi) \ge g_0(t)|\xi|^2, \; g_0 \in L^\infty(-\infty, T).$

для всіх $\xi \in \Re^N$ і майже для всіх $(x,t) \in Q_T;$

Введено позначення :

$$\begin{aligned} h_0(t) &= \sup_{Q_t} \sum_{1\le|\alpha|\le l} \|H_\alpha(x,\tau)\|^2; \\ h_1 &= \inf_{(-\infty,T)} h_0(t); \\ g_1(t) &= \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad g_0(t)\ge 0, \\ g_0(t), & \text{якщо} \quad g_0(t)<0. \end{cases} \\ g_2 &= \inf_{(-\infty,T)} \sup_{(-\infty,t)} g_1(\tau). \end{aligned}$$

Далі сформульована і доведена теорема, яка дає гарантію єдиності розв'язку задачі (8), (9) без обмежень на його поведінку при $t\to-\infty$.

Теорема 6. Нехай для коефіцієнтів системи (8) виконуються умови (A), (B), (C), (G) і, крім того, $H_\alpha(x,t)\in L^\infty(Q_T), 1\le|\alpha|\le l$;

$$\sum_{i,j=1}^n \left(B_{ijt}(x,t)\xi_i,\xi_j\right)\le b^1(t)\sum_{i=1}^n|\xi_i|^2,\ b^1(t)\in L^\infty(-\infty,T)$$

для всіх $\xi_i\in\Re^N$ і майже всіх $(x,t)\in Q_T$;

$$a_0-\sqrt{h_1\gamma_{l,0}\sum_{j=1}^l\gamma_{l,j}}-\frac{1}{2}\gamma_{l,1}\inf_{(-\infty,T)}\sup_{(-\infty,t)}b^1(\tau)>\gamma_{l,0}g_2.$$

Тоді задача (8), (9) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.

Тут також доводиться теорема існування розв'язку мішаної задачі для (8) з початковою умовою $u(x,t_0)=0$, де $t_0\in(-\infty,T]$-довільне фіксоване.

Наступна теорема демонструє умови існування розв'язку задачі (8), (9) без обмежень на поведінку $F(x,t)$ при $t\to-\infty$.

Теорема 7. Нехай для коефіцієнтів системи (8) виконуються умови (A), (B), (C), (G) і, крім того, $l>1$; $\partial\Omega\in C^l$; $H_\alpha(x,t)\in L^\infty(Q_T)$, $1\le|\alpha|\le l$; $F_\alpha(x,t)\in L^\infty_{loc}((-\infty;T];(L^2(\Omega))^N)$, $|\alpha|\le 1$. Тоді існує узагальнений розв'язок $u(x,t)$ задачі (8), (9), причому

$$u\in L^\infty_{loc}((-\infty;T];V),\quad u_t\in L^2_{loc}((-\infty;T];(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N).$$

У випадку $l = 1$ отримано умови існування розв'язку (8), (9). Важливою в цьому випадку є вимога до $F(x,t)$:

$$\int\limits_{Q_T} \sum_{|\alpha|\le 1} |F_\alpha(x,t)|^2 \exp(\gamma_0 t)dxdt < \infty.$$

де γ_0 – залежить від коефіцієнтів системи.

Другий розділ "Задачі без початкових умов для параболічних рівнянь і систем" складається з двох параграфів.

У §2.1 досліджується задача Фур'є для лінійної еволюційної системи

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u) + \sum_{|\alpha|\le m} G_\alpha(x,t) D^\alpha u +$$
$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u_t) + \sum_{|\alpha|\le l} C_\alpha(x,t) D^\alpha u_t = F(x,t) \quad (10)$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned} D^\alpha u\Big|_S &= 0, \quad |\alpha| \le m-1; \\ D^\beta u_t\Big|_S &= 0, \quad 1 \le |\beta| \le l-1. \end{aligned} \quad (11)$$

Задача розглядається в нециліндричній області Q, такій що $Q\bigcap\{t=\tau\} = \Omega_\tau$; $\partial Q \bigcap \{t=\tau\} = S_\tau$, $S = \bigcup\limits_{\tau\in(-\infty,T]} S_\tau$. Припускається, що для всіх $\tau \in (-\infty, T]$ множина Ω_τ є обмеженою областю в $\Re^n$ і $\Omega^*_\tau \subset \Omega$, де $\Omega \subset \Re^n$–обмежена область, а Ω^*_τ – проекція Ω_τ на площину $t = 0$.

Дослідження проводяться у випадку $m \ge l$.

Стосовно коефіцієнтів матриці C_α вимагається

$$(C_0): \qquad (C_0(x,t)\xi,\xi) \ge c_0^0(\Omega_t)|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \Re^n,\ (x,t) \in Q.$$

Вводяться, також, позначення :

$$a_i = \inf_{(-\infty,T)} \sup_{(-\infty,t)} a_i(\Omega_\tau), \quad i = 0,1;$$

$$
\begin{aligned}
a^1 &= \inf_{(-\infty,T)} \sup_{(-\infty,t)} a^1(\Omega_\tau); \quad b_0 = \inf_{(-\infty,T)} \sup_{(-\infty,t)} b_0(\Omega_\tau);\\
b_i^1(Q_t) &= \max_{j=0,\dots,l} \max_{|\beta|=j} \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|=j} \left\| \frac{\partial^i B_{\alpha\beta}(x,\tau)}{\partial t^i} \right\|, \ i=0,1;\\
b_i^2(Q_t) &= \max_{j=0,\dots,l} \max_{|\alpha|=j} \sup_{Q_t} \sum_{|\beta|=j} \left\| \frac{\partial^i B_{\alpha\beta}(x,\tau)}{\partial t^i} \right\|, \ i=0,1;\\
b_i^k(Q) &= \inf_{(-\infty,T)} b_i^k(Q_t), \ i=0,1; \ k=1,2;\\
g_i(Q_t) &= \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|\le m} \left\| \frac{\partial^i G_\alpha(x,\tau)}{\partial t^i} \right\|^2;\\
g_i(Q) &= \inf_{(-\infty,T)} g_i(Q_t), \ i=0,1;\\
c_0^0 &= \inf_{(-\infty,T)} \sup_{(-\infty,t)} c_0^0(\Omega_\tau);\\
c_i(Q_t) &= \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|\le l} \left\| \frac{\partial^i C_\alpha(x,\tau)}{\partial t^i} \right\|^2, \ i=0,1;\\
c_2(Q_t) &= \sup_{Q_t} \sum_{1\le|\alpha|\le l} \|C_\alpha(x,\tau)\|^2;\\
c_i(Q) &= \inf_{(-\infty,T)} c_i(Q_t), \qquad i=0,1,2;\\
\gamma_{k,j} &= \inf_{(-\infty,T)} \sup_{(-\infty,t)} \gamma_{k,j}(\Omega_\tau);\\
\gamma_{m,j}^k(\Omega_t) &= \sum_{s=j}^{k} \gamma_{m,s}(\Omega_t); \quad \gamma_{m,j}^k = \sum_{s=j}^{k} \gamma_{m,s}.
\end{aligned}
$$

Теореми єдиності розв'язку задачі (10), (11) сформульовані окремо для випадку $m=l$ та $m>l$.

Теорема 8. Нехай $m=l$ і для коефіцієнтів системи (10) виконуються умови (A_0), (A_1), (B_0), (C_0) $A_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta t}$, $B_{\alpha\beta}(|\alpha|=|\beta|\le m)$, G_κ, $C_\kappa(|\kappa|\le m) \in L^\infty(Q)$; $A_{\alpha\beta}(x,t)=A_{\beta\alpha}(x,t)$, $A_{\alpha\beta}(x,t)=(A_{\alpha\beta}(x,t))^*$ і існує набір додатніх $\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ при якому система

$$
\lambda a_0 - a^1 - \lambda b_0^1(Q)\gamma_{m,0}^l\delta_1 - \frac{\sqrt{g_0(Q)}\gamma_{m,0}^m}{\delta_2} - \frac{\lambda\sqrt{c_0(Q)}\gamma_{m,0}^l}{\delta_3} + \lambda^3\gamma_{m,0} > 0,
$$

$$2b_0 - \frac{\lambda b_0^2(Q)\gamma_{l,0}^l}{\delta_1} - 2\sqrt{c_2(Q)\gamma_{l,1}^l\gamma_{l,0}} -$$
$$-\lambda\sqrt{c_0(Q)}\gamma_{l,0}\delta_3 + (2c_0^0 - 3\lambda - \delta_2\sqrt{g_0(Q)})\gamma_{l,0} > 0$$

має розв'язок $\lambda > 0$.

Тоді задача (10), (11) не може мати більше одного узагальненого розв'язку в класі функцій $u(x,t)$ таких, що

$$\int\limits_{\Omega_t}\Big(|u_t|^2 + \sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^2\Big)dx = o(1)\exp(-\lambda t), \tag{12}$$

коли $t \to -\infty$.

Аналогічна теорема єдиності розв'язку задачі (10), (11) для $m > l$ доводиться далі, в припущенні, що область Q не розширюється при зростанні t.

Теорема існування узагальненого розв'язку доводиться у загальному випадку $m \geq l$.

Теорема 9. *Якщо виконуються умови на коефіцієнти системи, описані в теоремі 8 в області* $\Pi = \Omega \times (-\infty, T)$ *і, крім того* $\partial\Omega \subset C^{m-1,1}$; *межа* S *області* Q *така, що якщо* $t \in (-\infty, T]$, $v \in H_0^m(\Omega)$ *і* $v = 0$ *майже всюди в* $\Omega \setminus \Omega_t$, *то* $v \in H_0^m(\Omega_t)$; *області* Ω_t, $t \in (-\infty, T]$ *однозв'язні;* $\int\limits_Q |F(x,t)|^2 e^{\lambda t}dx\,dt < \infty$, *де* λ – *додатній розв'язок системи*

$$\lambda a_0(\Omega) - a^1(\Omega) - \lambda b_0^1(\Pi)\gamma_{m,0}^l(\Omega)\delta_1 - \frac{1}{\delta_2}\sqrt{g_0(\Pi)}\gamma_{m,0}^l(\Omega) -$$
$$-\frac{1}{\delta_3}\lambda\sqrt{c_0(\Pi)}\gamma_{m,0}^l(\Omega) + \lambda^3\gamma_{m,0}(\Omega) > 0,$$
$$2b_0(\Omega) - \frac{1}{\delta_1}\lambda b_0^2(\Pi)\gamma_{l,0}^l(\Omega) - 2\sqrt{c_2(\Pi)\gamma_{l,1}^l(\Omega)\gamma_{l,0}(\Omega)} - \lambda\sqrt{c_0(\Pi)}\gamma_{l,0}(\Omega)\delta_3 +$$
$$+(2c_0^0(\Omega) - 3\lambda - \delta_2\sqrt{g_0(\Pi)})\gamma_{l,0}(\Omega) > 0.$$

Тоді існує узагальнений розв'язок $u(x,t)$ *задачі (10), (11) з поведінкою (12).*

У §2.2 отримано умови існування і єдиності розв'язку задачі Фур'є для нелінійного параболічного рівняння четвертого порядку

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} D^{\alpha}(a_{\alpha\beta}(x)D^{\beta}u) + c(x)u_t - \sum_{i,j=1}^{n}(g_{i,j}(x)u_{x_i t})_{x_j} +$$

$$+ \quad h(x)|u|^{p-2}u = f_0(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial f_i(x,t)}{\partial x_i} \tag{13}$$

з крайовими умовами

$$u\big|_{S_T} = 0, \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x)D^{\beta}u\nu^{\alpha}\big|_{S_T} = 0 \tag{14}$$

в області $Q_T = \Omega \times (-\infty, T)$, $T < 0$, де Ω–обмежена область в $\Re^n$ з межею $\partial\Omega \subset C^2$.

Тут

$\nu^{\alpha} = \nu_1^{\alpha_1}, \ldots, \nu_n^{\alpha_n}$, $\quad \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – одинична зовнішня нормаль до S_T; $\quad p > 2$.

На коефіцієнти рівняння (13) накладено умови:

$$a_0 \sum_{|\alpha|=2} \eta_{\alpha}^2 \le \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x)\eta_{\alpha}\eta_{\beta},\ a_0 > 0,\ \eta \in \Re^{\frac{n(n+1)}{2}}; \tag{15}$$

$$c_0 \le c(x) \le c^0; \tag{16}$$

$$0 < h_0 \le h(x); \tag{17}$$

$$g_0 \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le g^0 \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i^2,\ g_0 > 0,\ \xi \in \Re^n. \tag{18}$$

Припускається, що існують додатні розв'язки λ наступних нерівностей:

$$\begin{cases} a_0 - \gamma_1\lambda g^0 > 0, \\ (\frac{a_0}{\gamma_1} - \lambda g^0)\frac{1}{\gamma_0} + \lambda^2 - c^0\lambda > 0, \\ \frac{2\lambda(p-2)h_0}{p} > 0, \\ \frac{2g_0}{\gamma_1} + 2(c_0 - 2\lambda) > 0, \\ \gamma_1(g^0 + \gamma_0 c^0)^2 - 4a_0\gamma_0 > 0. \end{cases} \tag{19}$$

Теорема 10. Нехай виконуються умови (15)–(19) і, крім того,

$$\int_{Q_T} \sum_{i=0}^{n} f_i^2(x,t) e^{2\lambda t} dx dt \le M_1,$$

де M_1–деяка стала.

Тоді існує узагальнений розв'язок $u(x,t)$ задачі (13), (14) такий, що

$$u \in L^\infty((-\infty,T); H_0^2(\Omega)), \qquad u_t \in L^\infty((-\infty,T); L^2(\Omega)).$$

Теорема 11. Якщо виконуються умови тереми існування і, крім того,

$$\begin{gathered} g_0 - c_0\gamma_0 > 0 \\ \text{та} \quad p - 2 \le \frac{2}{n-2}, \qquad \text{якщо } n > 2, \end{gathered}$$

то задача (13), (14) не може мати більше одного узагальненого розв'язку в класі функцій $u(x,t)$, таких, що

$$\int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} |u_{x_i}|^2 dx \to 0, \quad \text{при} \quad t \to -\infty.$$

<u>**Основні результати дисертації опубліковані в роботах:**</u>

1. Бас (Колинько) М.О., Лавренюк С.П. Задача Фурье для одной эволюционной системы не разрешимой относительно производной по t// Деп. в ГНТБ Украины, N2133-Ук 93.- 29с.
2. Бас (Колинько) М.О., Лавренюк С.П. К единственности решения задачи Фурье для одной псевдопараболической системы// Деп. в ГНТБ Украины, N1192-Ук 95.- 8с.
3. Бас (Колинько) М.О., Лавренюк С.П. Задача Фурье для одной эволюционной системы не разрешимой относительно производной по t// Деп. в ГНТБ Украины, N1190-Ук 95.- 10с.
4. Бас (Колінько) М.О., Лавренюк С.П. Задача Фур'є для однієї нелінійної псевдопараболічної системи// Деп. в ГНТБ Украины, N2017-Ук 95.- 46с.
5. Бас (Колінько) М.О., Лавренюк С.П. Задача Фур'є для однієї еволюційної системи з другою похідною по часу// Деп. в ГНТБ Украины, N2018-Ук 95.- 26с.
6. Бас (Колінько) М.О. Задача Фур'є для одного нелінійного параболічного рівняння // Деп. в ГНТБ Украины, N2018-Ук 95.- 22с.
7. Бас (Колінько) М.О., Лавренюк С.П. Про задачу Фур'є для однієї еволюційної системи не розв'язаної відносно похідної по t// Тези всеукраїнської наукової конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь", Дрогобич, 1994, с.13.
8. M.Bas (Kolinko), S.Lavrenjuk. Foureir problem for some parabolic sistems// Thesis of international conference "Nonlinear differential equations", Kiev, 1995, p.11.

Kolinko M.O. Fourier problems for parabolic and pseudo-parabolic equations and systems

Thesis on search of the scientific degree of candidate of physical and mathematical sciences, speciality 01.01.02 – differential equations. Lviv State University, Lviv, 1996.

Submitted are 8 scientific papers which contain theortical investigations into the problem with initial conditions missing from there (Fourier problem), with it being applied for Sobolev-Halpern type systems, including the pseudoparabolic systems, and for a some kind of parabolic systems and equations. The sufficient conditions for existence and uniqueness of the generalized solutions (in the sense of integral identity), which are sometimes enough to the unimprovable ones are stated.

Колинько М.Е. Задачи Фурье для параболических и псевдопараболических уравнений и систем.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. Львовский государственный университет, Львов, 1996.

Защищается 8 научных работ, которые содержат теоретические исследования задачи без начальных условий (задачи Фурье) для систем типа Соболева-Гальперна, в том числе псевдопараболических систем, и для некоторого класса параболических систем и уравнений. Установлены достаточные условия существования и единственности обобщенных решений (в смысле интегрального тождества), которые в отдельных случаях близки к неулучшаемым.

Ключові слова: *задача Фур'є, параболічні рівняння, псевдопараболічні рівняння, системи Соболева-Гальперна.*

Підписано до друку 21.12.95 р. Формат 60×84/16.
Ум. друк. арк. 1. Зам. 2/45. Тираж 100 прим.
Віддруковано з оригінал-макету в СП "Малти-К".