

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

БРИТОВ Николай Александрович

ИССЛЕДОВАНИЕ КАЧЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВ
РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ
СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ
НАВЬЕ-СТОКСА-МАКСВЕЛЛА

01.01.02. - дифференциальные уравнения.

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Донецк - 1996

Работа выполнена в лаборатории математического моделирования и управления технологическими процессами Института прикладной математики и механики Национальной Академии Наук Украины.

Официальные оппоненты:

- доктор физико-математических наук, профессор Панков А.А.;
- доктор физико-математических наук, профессор Копачевский Н.Д.;
- доктор физико-математических наук, профессор Литвинов В.Г.

Ведущая организация:

- Российский государственный университет Дружбы народов им.П.Лумумбы

Защита диссертации состоится " ___ " _____ 1996 года в _____ часов на заседании Специализированного Совета Д.06.01.01 по присуждению ученой степени доктора физико-математических наук в Институте прикладной математики и механики НАН Украины по адресу: 340114, Донецк, ул. Р.Люксембург, 74.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института прикладной математики и механики НАН Украины

Автореферат разослан " ___ " _____ 1996 г.

ЛНБ ім. В. Стефаніка
АН України

Ученый секретарь
Специализированного Совета,
кандидат физ.-мат. наук

Марковский А.И.

ЛННБ України ім.В.Стефаніка



00740005 (G)

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Важным направлением теории нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными является исследование краевых задач для конкретных систем уравнений. Классическими примерами таких систем являются уравнения Навье-Стокса и Навье-Стокса-Максвелла. В них присутствуют основные "неприятности", которые возникают при исследовании краевых задач для систем квазилинейных уравнений. Эти системы не принадлежат к типу Коши-Ковалевской; дифференциальные операторы, образующие их главные части, не удовлетворяют условиям равномерной эллиптичности (они эллиптичны по Дуглису-Ниренбергу); уравнения содержат неограниченные нелинейности. Наконец, линейные операторы, отвечающие линеаризованным системам, вообще говоря, несамосопряженные, что не позволяет применять вариационные методы при исследовании вопросов бифуркации решений. С другой стороны, геометрические свойства нелинейности, этих систем позволяют в достаточно общей ситуации получать основные априорные оценки решений. Такая комбинация свойств систем позволяет разрабатывать для них эффективные методы исследования вопросов существования, единственности, устойчивости и регулярности решений. Теория начально-краевых задач для системы Навье-Стокса разработана достаточно удовлетворительно. Этого нельзя сказать о системе Навье-Стокса-Максвелла с точки зрения содержащихся в ней возможностей.

Исследования проблемы существования решений первой краевой задачи для системы уравнений Навье-Стокса-Максвелла велись, в основном, в направлении прямого обобщения результатов полученных для системы Навье-Стокса, которые подытожены в книге О.А. Ладыженской "Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости". - М.: Наука, 1971. - 204 с. Специфика системы Навье-Стокса-Максвелла при этом не учитывалась. Свойства решений системы Навье-Стокса-Максвелла первоначально были замечены в численных расчетах. Отмечалось, что влияние нелинейных слагаемых на поведение решения может быть существенно уменьшено при больших значениях числового параметра Хартмана. В 1968 году на VI Всесоюзном Рижском совещании по магнитной гидродинамике была сформулирована, как одна из наиболее приоритетных, проблема исследования пределов применимости линеаризации Стокса для системы Навье-Стокса-Максвелла при конечных

значениях параметра Рейнольдса и достаточно больших значениях параметра Хартмана. К сожалению, эта проблема в свое время не привлекла внимания широкого круга специалистов по дифференциальным уравнениям.

Вопрос о пределах применимости линеаризации Стокса упирается в получение предельных, в смысле зависимости от параметров Рейнольдса и Хартмана, априорных оценок решений первой краевой задачи для системы Навье-Стокса-Максвелла. Поэтому проблема линеаризации Стокса тесно связана с вопросами существования, единственности и устойчивости решений.

В диссертации рассматривается первая краевая задача в бесконечно длинном цилиндре для стационарной системы Навье-Стокса-Максвелла. Перпендикулярное сечение цилиндра - ограниченная, замкнутая, неодносвязная область с гладкой границей. Краевые условия и правые части системы предполагаются не зависящими от переменной, изменяющейся вдоль оси цилиндра. Наибольший интерес для исследования представляют два случая задачи: плоская задача (векторные поля ортогональны оси цилиндра) и краевая задача в "трубе" (решение системы Навье-Стокса коллинеарно, а системы Максвелла ортогонально оси цилиндра).

Теоремы существования решения первой краевой задачи для стационарной системы Навье-Стокса-Максвелла получены в работах В.А.Солонникова, Х.Э.Калиса, Э.Санчес-Паленсии, И.Ферсте. Они принципиально не отличаются от соответствующей теоремы для системы Навье-Стокса и друг от друга. Основное условие, при котором доказаны эти теоремы, заключается в возможности соленоидального продолжения внутрь области краевых значений решения. Это условие для системы Навье-Стокса ослабить не удастся. Отказ от него не позволяет доказать нелокальную в смысле значений параметра Рейнольдса теорему существования. Аналогичная ситуация имеет место и для теорем единственности решения.

Поведение решений первой краевой задачи для системы Навье-Стокса внутри области и вблизи ее границы исследовалось, в основном, с точки зрения их свойств гладкости. Зависимость локальных свойств решений от значений, входящих в уравнения числовых параметров, не исследовалось.

Важное место в качественной теории краевых задач для системы Навье-Стокса занимают вопросы устойчивости и бифуркации решений. Одним из следствий взаимодействия, входящих в эту систему векторных полей, является изменение в зависимости от ха-

рактера их взаимодействия, устойчивости решения. Это приводит к вопросу о получении достаточных условий тривиальности ядра первой краевой задачи для линеаризованной в окрестности двумерного решения стационарной системы Навье-Стокса-Максвелла.

Исследование вопросов бифуркации решений системы Навье-Стокса-Максвелла приводит к необходимости построения теории ветвления и бифуркации решений операторных уравнений, зависящих от двух и более числовых параметров. Непосредственное исследование задачи о точках бифуркации сопряжено с вычислением индекса решения в случае, когда 1 - собственное значение соответствующей линеаризованной задачи.

Наряду с линеаризацией Стокса для приближенного решения краевых задач для системы Навье-Стокса-Максвелла широко используется ее V_0 -редукция - первая итерация в процессе раздельного решения уравнений Навье-Стокса и Максвелла. В частной беседе с автором в 1975 году А.Б.Цинобер высказал мнение, что при достаточно больших значениях параметра Хартмана одновременно допустимы линеаризация Стокса и V_0 -редукция.

Уравнения, полученные в результате упрощения системы Навье-Стокса-Максвелла, остаются сложными как для аналитического, так и для численного исследования. В ряде случаев топологическую структуру векторных линий решений системы Навье-Стокса-Максвелла можно предсказать используя простейшую качественную информацию о свойствах решения, например количество и типы особых точек векторных полей, определяемых краевой задачей. Эту информацию для некоторых классов решений можно получить не решая соответствующей краевой задачи. Вопросы топологии двумерных решений краевых задач для системы Эйлера подробно рассмотрены в обзорной статье О.В.Трошкина "О топологическом анализе структуры гидродинамических течений" // УМН.- 1988.- Т.43.- № 4.- С. 129-158. В диссертации рассмотрены некоторые подходы к определению числа изолированных особых точек векторных полей, входящих в решение первой краевой задачи для системы Навье-Стокса-Максвелла.

Стационарная краевая задача "в трубе" является классической в теории уравнений Навье-Стокса. Методами теории дифференциальных уравнений в частных производных она исследована О.А.Ладыженской. Известная теорема Ханта "A uniqueness theorem for magnetohydrodynamic duct flows" // Proc. Camb. Phil. Soc. -1969.- N 65.-P.319-322, утверждает, что стационарная двумерная краевая за-

дача для системы Навье-Стокса-Максвелла "в трубе" имеет единственное решение в классе двумерных решений.

Цель работы. Исследовать поведение решений первой краевой задачи для двумерной стационарной системы уравнений Навье-Стокса-Максвелла при неограниченном возрастании значений параметра Хартмана. Разработать технику, позволяющую исследовать вопросы устойчивости и бифуркации решений краевых задач с двумя числовыми параметрами.

Методы исследования. Метод энергетических априорных оценок решений краевых задач для систем квазилинейных уравнений с частными производными; методы исследования регулярности решений нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными; аналитические и топологические методы теории нелинейных вполне непрерывных операторов.

Теоретическая и практическая ценность исследования, его научная новизна. Все содержащиеся в диссертации результаты исследований оригинальны. Большинство из них не имеет аналогов в очерченной области исследований.

Получены мультипликативные неравенства для двух и трехмерных соленоидальных векторных полей, имеющих суммируемые с квадратом обобщенные по С.Л.Соболеву первые производные.

Разработана методика получения асимптотических по параметру Хартмана априорных оценок решений первой краевой задачи для системы Навье-Стокса-Максвелла. Методика пригодна для исследования двух и трехмерных краевых задач.

Исследовано глобальное и локальное поведение решений первой краевой задачи для системы уравнений Навье-Стокса-Максвелла при фиксированных значениях параметра Рейнольдса и неограниченно возрастающих значениях параметра Хартмана.

Получены нелокальные, в смысле значений числовых параметров, достаточные условия существования и единственности решения первой краевой задачи для системы Навье-Стокса-Максвелла. Эти условия не имеют нелокальных аналогов в теории системы Навье-Стокса.

Получены нелокальные условия тривиальности ядра, линеаризованной в окрестности некоторого плоского решения, трехмерной краевой задачи.

Получены неравенства, связывающие значения числовых параметров системы, при выполнении которых гарантируется допустимость V_0 -редукции системы Навье-Стокса-Максвелла. Установлены

априорные оценки норм погрешности приближенного решения. Выведены условия допустимости линеаризации Стокса первой краевой задачи для V_0 -редуцированной двумерной системы Навье-Стокса-Максвелла. Получены априорные оценки норм абсолютной и относительной погрешности.

Выписаны значения входящих в оценки и неравенства различные постоянные. Это позволяет применять полученные неравенства в практических расчетах.

Исследованы нелокальные условия единственности двумерного однокомпонентного решения краевой задачи в бесконечно длинных "трубах". Показано, что условие тривиальности ядра линеаризованной в окрестности однокомпонентного решения трехмерной краевой задачи в бесконечно длинной "трубе" совпадает с условием единственности этого решения.

Исследовано локальное строение спектра линейного вполне непрерывного оператора, зависящего от двух вещественных числовых параметров. Изучено локальное строение спектра и множества точек бифуркации нелинейного, дифференцируемого по Фреше вполне непрерывных операторов, зависящего от двух вещественных числовых параметров.

В достаточно общей ситуации вычислен индекс плоского решения первой краевой задачи для системы Навье-Стокса-Максвелла.

Апробация работы. Основные результаты докладывались на Республиканских конференциях по нелинейным граничным задачам для дифференциальных уравнений в частных производных (Донецк, 1983; 1991), I, II, III, VI Крымских осенних математических школах по эволюционным и спектральным задачам, I и II Школах-симпозиумах по методам математического моделирования в научных исследованиях (Донецк 1987; 1989), Международной конференции "Нелинейные граничные задачи" (Крым, 1993), Международной конференции "Нелинейные дифференциальные уравнения" (Киев, 1995); X, XI, XII Всесоюзных Рижских совещаниях по магнитной гидродинамике (Рига, 1981, 1984, 1987). С докладами по материалам диссертации автор выступал на научных семинарах в Институте механики МГУ; Российском университете Дружбы народов, Институте механики НАН Украины; Институте прикладной математики и механики НАН Украины, Институте физики АН Латвии, Институте механики сплошных сред РАН (Пермь), Рижском госуниверситете; Донецком госуниверситете, Симферопольском госуниверситете, Гомельском госуниверситете, Гомельском политехническом институте

и других организациях.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 18 статьях и 5 тезисах докладов. Принята к печати написанная по материалам диссертации монография "Mathematical problems of two-dimensional steady-state MHD-flows", издательство: World Federation Publishers Company, INC, Tampa, Florida, USA, (выход в свет в 1997г.).

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, семи глав, списка цитированной литературы, включающего 108 названий, и 3 рисунков. Общий объем работы 283 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Содержание диссертации. В диссертации рассматривается первая краевая задача для стационарной системы Навье-Стокса-Максвелла. Система записана в бескоординатной форме и в безразмерных величинах. Основные результаты получены для двумерных решений плоской краевой задачи, но многие из них, особенно это относится к седьмой главе, переносятся на трехмерный случай. В тексте автореферата громоздкие выражения для постоянных в формулировках теорем как правило не приводятся.

Первая глава - вводная. В первом параграфе формулируется начально-краевая задача и вводятся определения стоксова приближения и V_0 -редукции системы Навье-Стокса-Максвелла. Рассмотрены простейшие свойства решений, следующие из условий стационарности и двумерности. Во втором параграфе построено точное решение неоднородной осесимметричной краевой задачи в концентрическом круговом кольце. Предполагается ортогональность, входящих в задачу векторных полей. Эта задача содержит все числовые параметры, входящие в систему Навье-Стокса-Максвелла, и играет роль модельной для дальнейших исследований. Для ее решения получены необходимые в дальнейшем для сравнения двусторонние локальные и глобальные оценки, а также оценки погрешности V_0 -редукции и приближения Стокса.

Во второй главе содержатся вспомогательные результаты, необходимые для построения основных априорных оценок. В первом параграфе вводятся используемые в дальнейшем пространства функций и векторных полей и доказываются аналоги известных мультипликативных неравенств. Пусть D - замкнутая ограниченная область на плоскости. Ее граница S состоит из конечного числа замкнутых гладких контуров. В дальнейшем $L_p(D)(L_p(D))$ - пространство функций (векторных полей), интегрируемых со степенью p в

области D ; $W_p^m(D)$, $\mathbf{W}_p^m(D)$, соответственно, имеющих обобщенные по С.Л.Соболеву производные; $\|\cdot\|_p$ норма элемента из $L_p(D)$, причем, если $p = 2$ то индекс p опускается. Гильбертовы пространства $W_2^m(D)$, $\mathbf{W}_2^m(D)$ обозначаются $H^m(D)$ ($\mathbf{H}^m(D)$). Пространство соленоидальных, обращающихся в нуль на S векторных полей, имеющих в D суммируемые с квадратом обобщенные по Соболеву частные производные первого порядка обозначается $\mathbf{H}(D)$. Основные результаты параграфа содержатся в утверждениях:

Т е о р е м а 2.1. Пусть $q > 2$ и векторное поле $\mathbf{u}(u_1, u_2) \in \mathbf{H}(D)$. Тогда имеют место неравенства

$$\|u_1\|_q \leq 4\|u_1\|^{1-3\alpha}\|u_2\|^\alpha\|\nabla \times \mathbf{u}\|^{2\alpha}, \quad 2 < q \leq 6;$$

$$\|u_1\|_q \leq 2\beta\|u_2\|^{2/q}\|\nabla \times \mathbf{u}\|^{1-2/q}, \quad 6 < q < \infty$$

$$\alpha = 1/2 - 1/q, \quad \beta = \max(4, q/2).$$

Т е о р е м а 2.2. Пусть $q \geq 2$ и векторное поле $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{H}(D)$. Тогда имеет место неравенство

$$\|u_1\|_q \leq 4^\beta d^{1/2} (\|u_2\| + \|u_3\|)^\alpha \|\nabla \times \mathbf{u}\|^{1-\alpha},$$

$$\alpha = 1, 25(1 - 2/q), \quad \beta = (6 - q)/4q.$$

Во втором параграфе главы рассматривается применяющаяся при получении априорных оценок решений первой краевой задачи для систем Навье-Стокса и Навье-Стокса-Максвелла срезающая функция Хопфа и оценки для нее. Пусть $\rho(x)$ - расстояние от точки $x \in D$ до ближайшей компоненты S . "Срезающая" функция $\zeta(x)$ равна 1 при $0 < \rho(x) < \delta^2$ и нулю при $\rho(x) > \delta$, а в полосе $\delta^2 < \rho(x) < \delta$ определяется функцией

$$\chi(t) = -\frac{(1-t)^2}{(1-\delta)^2} + 2\frac{(1-t)^3}{(1-\delta)^3}.$$

Пусть векторное поле $\mathbf{U}_0(S) \in C_1^\alpha(S)$; ν, τ - соответственно, внешняя нормаль и единичный касательный вектор к S , $\kappa = \nu \times \tau$. Предполагается что поле $\mathbf{U}_0(S)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{S_i} \nu \cdot \mathbf{U}_0(S_i) dS_i = 0. \quad (+)$$

В этом случае поле U_0 продолжается во внутренность области D в виде $a = \nabla \times [\zeta(x)\psi_0(x)\kappa]$, где $\psi_0(x)$ - любая дважды дифференцируемая в D функция, удовлетворяющая краевым условиям:

$$\psi_0(S) = 0, \quad \kappa \times (\nabla \psi_0)|_S = U_0(S).$$

На основе выбранной $\zeta(x)$ получены эффективные оценки для L_p -норм поля a и L_2 -нормы поля $\nabla \times a$. Входящие в эти оценки постоянные оценены через значения векторного поля U_0 и геометрические характеристики области.

В третьей главе диссертации получены основные априорные оценки обобщенных решений двумерной первой краевой задачи для стационарной системы Навье-Стокса-Максвелла.

В первом параграфе подробно описан вывод эффективных глобальных априорных оценок полуднородной краевой задачи для редуцированной системы Навье-Стокса-Максвелла.

Пусть векторное поле $B^0 = B_d + \kappa b$ гармонично в D , причем векторное поле $B_d \neq 0$ компланарно плоскости D . Пусть B_d не обращается в нуль в $D \cup S$ и ограничено сверху

$$0 \leq \underline{m} \leq |B_d| \leq \bar{m} \quad \text{и} \quad \int_{S_0} |B_d \cdot \nu|^2 dS_0 > 0.$$

(S_0 - внешний контур S). Указанные требования называются условием (H). В дальнейшем

$$\beta_1 = |B_d|^{-1} B_d, \quad \beta_2 \perp \beta_1, \quad |\beta_2| = 1.$$

Т е о р е м а 3.1. Пусть граница $S \in C_\alpha^1$. Краевое значение решения - векторное поле $U_0(S) \in C_\alpha^2(S)$, $\nu \cdot U_0(S) \equiv 0$, $0 < \alpha < 1$; векторное поле B^0 удовлетворяет условию (H). Тогда для решения U первой краевой задачи для редуцированной системы Навье-Стокса-Максвелла и его функции тока ψ имеют место оценки:

$$\|\nabla \times U\| \leq C_\nabla H a^{1/2}; \quad \|U \times B_d\| \leq C_B(U_0, B_d, R, D, S) H a^{-1/2};$$

$$\|U\| \leq C; \quad \|\psi\| \leq d C_B H a^{-1/2} \quad C = C(U_0, B_d, R, D, S).$$

Здесь R - параметр Рейнольдса, Ha - параметр Хартмана.

Как показывает сравнение с точным решением, полученным в первой главе, первые две оценки не улучшаемы в смысле зависимости от параметра Ha . Оценки норм ψ и U вероятно не предельны.

Во втором параграфе аналогичные оценки получены для нередуцированной системы. Пусть тройка векторных полей $(\mathbf{U}, \mathbf{B}, \mathbf{E})$ - решение первой краевой задачи для нередуцированной системы. Для получения априорных оценок применен метод, который используется для трехмерной краевой задачи и при исследовании единственности и устойчивости решений. Сначала выводятся "прямые" оценки, в которых $\|\nabla \times \mathbf{U}\|$ и $\|\nabla \times \mathbf{B}\|$ оцениваются через $\|\mathbf{U} \times \mathbf{B}_d\|$. Затем, из уравнений Максвелла получается "обратная" оценка, в которой $\|\mathbf{U} \times \mathbf{B}_d\|$ оценивается через $\|\nabla \times \mathbf{U}\|$ и $\|\nabla \times \mathbf{B}\|$. Комбинирование "прямых" и "обратной" оценок дает искомые оценки решений. Основной результат второго параграфа содержится в следующем утверждении:

Т е о р е м а 3.2. Пусть граница $S \in C_\alpha^1$; векторное поле $\mathbf{U}_0(S) \in C_\alpha^2(S)$, $\nu \cdot \mathbf{U}_0(S) \equiv 0$, $0 < \alpha < 1$; векторное поле \mathbf{B}_0 удовлетворяет условию (H). Тогда для решений первой краевой задачи для системы Навье-Стокса-Максвелла имеют место оценки:

$$\|\nabla \times \mathbf{U}\| \leq C'_\nabla(\mathbf{U}_0, \mathbf{B}^0, R, R_m, D, S) H a^{1/2};$$

$$\|\nabla \times \mathbf{B}\| \leq C'_B(\mathbf{U}_0, \mathbf{B}^0, R, D, S) R_m H a^{-1/2}.$$

В третьем параграфе главы для редуцированной системы рассматривается неоднородная первая краевая задача при общих предположениях относительно краевых значений векторного поля \mathbf{U} . В отличие от предыдущих параграфов, здесь не получаются априорные оценки, пригодные при всех значениях параметров системы.

Пусть φ - решение задачи Неймана

$$\Delta \varphi = 0, \quad \nu \cdot \nabla \varphi|_S = \nu \cdot \mathbf{U}_0(S).$$

Т е о р е м а 3.3. Пусть граница $S \in C_\alpha^1$; векторное поле $\mathbf{U}_0(S) \in C_\alpha^2(S)$, $0 < \alpha < 1$ и не удовлетворяет условию ^(H) векторное поле \mathbf{B}_d удовлетворяет условию (H), а значения параметров R, H, a связаны следующим неравенством (d - диаметр области D)

$$H a \geq H a_0 = 3R(M_{\varphi_1} + 3RM_{\varphi_2}^2 d) \underline{m}^{-1}, \quad M_{\varphi_i} = \sup_{D \cup S} |\beta_i \cdot \nabla \varphi|.$$

Тогда для решений задачи имеют место априорные оценки:

$$\|\nabla \times \mathbf{U}\| \leq C_{\nabla 1}(\mathbf{U}_0, \mathbf{B}_d, R, D, S) H a^{1/2} + M_{\varphi_2} C_{\nabla 2}(\mathbf{U}_0, \mathbf{B}_d, R, D, S) H a,$$

$$\|U \times B_d\| \leq C_{w1}(U_0, B_d, R, D, S)Ha^{-1/2} + M_{\varphi 2}C_{w2}(U_0, B_d, R, D, S).$$

В случае, когда $M_{\varphi 2} = 0$ эти оценки нелучшаемы в смысле зависимости от параметра Хартмана.

В четвертом параграфе главы рассматривается двумерная трехкомпонентная краевая задача, в которой векторные поля имеют по три составляющие, зависящие от двух пространственных переменных. Эта задача является в некотором смысле промежуточной между и трехмерными. Принципиальное отличие этой задачи от рассмотренных выше состоит в присутствии в ней нетривиального векторного поля E . Методом "прямых" и "обратной" оценок получены априорные оценки решений, аналогичные приведенным в теореме 3.2. Получена априорная оценка L_2 - нормы поля E :

$$\|E\| \leq C_e(R, R_m, B^0, D)Ha^{s(1-2/p)}; \quad s = 0, 5 \frac{p(p+2)+4}{p(p+2)-4}, \quad p > 2.$$

В пятом параграфе рассматриваются периодические (или финитные) по переменной, меняющейся вдоль оси цилиндра, решения задачи с двумерными краевыми условиями для трехмерной системы Навье-Стокса-Максвелла в бесконечно длинном цилиндре. Пусть $2X_0$ - период (область финитности) решения.

Т е о р е м а 3.4. Пусть граница $S \in C_\alpha^1$; векторное поле $U_0(S) \in C_\alpha^2(S)$, $0 < \alpha < 1$ удовлетворяет условию $\nu \cdot U_0(S) = 0$, векторное поле B^0 удовлетворяет условию (H). Тогда имеют место априорные оценки

$$\|\nabla \times U\| \leq C_{\nabla 3}Ha^{1/2}; \quad \|\nabla \times b\| \leq R_m C_{b3}Ha^{-1/2};$$

$$\|U \times \beta_1\| \leq C_1; \quad \|E\| \leq R_m^{1/2} C_{e3};$$

$$C = C(R, R_m, B^0, D, X_0).$$

В шестом и седьмом параграфах главы исследуется поведение решений полуоднородной первой краевой задачи для редуцированной системы Навье-Стокса-Максвелла внутри области. Получены внутренние оценки L_2 - норм решения и его ротора:

Т е о р е м а 3.5. Если для функции тока ψ , отвечающей решению полуоднородной ($\nu \cdot U_0(S) \equiv 0$) краевой задачи для редуцированной системы Навье-Стокса-Максвелла выполняется оценка

$$\|\psi\| \leq C_\psi F_\psi(Ha), \quad Ha^{-3/2} \leq F_\psi(Ha) \leq Ha^{-1/2}, \quad (*)$$

то в любой внутренней подобласти D' области D для поля \mathbf{U} имеют место оценки

$$\|\nabla \times \mathbf{U}\| \leq C_2^* F_2(Ha); \quad \|\mathbf{B}_d \times \mathbf{U}\| \leq C_2^* F_2(Ha); \quad \|\theta \mathbf{U}\| \leq C_u^* F_u(Ha).$$

$$1 \leq F_\nabla(Ha) \leq Ha^{1/2}, \quad Ha^{-3/2} \leq F_2(Ha) \leq Ha^{-1/2},$$

$$Ha^{-3/4} \leq F_u(Ha) \leq 1.$$

В случае, когда глобальная оценка для функции ψ предельна, внутренние оценки тоже предельны.

Получены также оценки решения и функции ψ в норме пространства непрерывных функций.

Теорема 3.6. Если для функции ψ выполняется оценка (*) то имеет место глобальная оценка

$$\|\psi\|_\infty \leq M_\infty Ha^{\frac{3p-10}{16(p-1)}} F_\psi(Ha)^{\frac{p-2}{2(p-1)}} = M_\infty F_\psi^\infty(Ha),$$

$$Ha^{\frac{-2p+14}{16(p-1)}} \leq F_\psi^\infty(Ha) \leq Ha^{\frac{-p-2}{16(p-1)}}, \quad 2 < p < 3.$$

Для любой внутренней подобласти $D' \subset D$ имеет место оценка

$$\|\psi\|_\infty \leq \tilde{M}_\infty (F_u F_2)^{\frac{1}{2(p-1)}} (F_\nabla F_\psi)^{\frac{p-2}{2(p-1)}} = \tilde{M}_\infty \tilde{F}_\psi^\infty(Ha),$$

$$Ha^{-3\frac{2p-1}{8(p-1)}} \leq \tilde{F}_\psi^\infty(Ha) \leq Ha^{-\frac{1}{4(p-1)}}, \quad 2 < p < 3.$$

Эти оценки можно рассматривать как некоторый аналог принципа максимума для уравнения 4-го порядка, определяющего функцию ψ . При их получении использовалась глобальная оценка L_2 -нормы функции ψ .

Теорема 3.7. Если для функции ψ выполняется оценка (*), то в любой внутренней замкнутой подобласти $D' \subset D$ для составляющих поля $\mathbf{U} = \beta_1 U_1 + \beta_2 U_2$ имеют место оценки:

$$\|U_1\|_\infty \leq M_{u1}^\infty M_\infty F_{u1}^\infty(Ha), \quad \|U_2\|_\infty \leq M_{u2}^\infty M_\infty F_{u2}^\infty(Ha),$$

$$Ha^{-3(s-2)/8(s-1)} \leq F_{u1}^\infty(Ha) \leq Ha^{s/4(s-1)},$$

$$Ha^{-3(s-2)/4(s-1)} \leq F_{u2}^\infty(Ha) \leq Ha^{1/2(s-1)},$$

где $M_{u1}^\infty, M_{u2}^\infty$ - постоянные не зависящие от значений $Ha, s > 2$.

При получении этих оценок использовалась техника, применяемая при исследовании регулярности решений эллиптических систем и глобальная оценка L_2 -нормы функции ψ .

В последнем параграфе главы для полуоднородной краевой задачи для редуцированной системы получены глобальные оценки L_2 -норм решения и его ротора "снизу".

Т е о р е м а 3.8. Пусть $S \in C_1^\alpha$; $U_0 \cdot \nu_S = 0$; и выполняется условие (H). Пусть, кроме того,

$$\sum_{j=0}^n \int_{S_j} (\tau \cdot U_0)^2 [b^2 + (\nu \cdot B_d(S))^2] dS_j \neq 0. \quad (**)$$

Тогда имеют место оценки

$$\|\nabla \times U\| \geq C_\nabla(R, D, S, U_0) H a^{1/2}; \quad \|U\| \geq C_u(R, D, S, U_0) H a^{-1/2}.$$

Условие (**) является достаточным для "взаимодействия" векторных полей U и B_d , то есть для существования в D множества ненулевой меры на котором эти поля неколлинеарны.

Четвертая глава посвящена традиционным в теории краевых задач вопросам существования, единственности и устойчивости решений. В первом параграфе главы неоднородная первая краевая задача для редуцированной системы Навье-Стокса-Максвелла сведена к эквивалентной системе нелинейных интегральных уравнений. Операторы, входящие в эту систему, вполне непрерывны в пространстве L_p при $2 < p$.

На основе априорной оценки, приведенной в теореме 3.3, получено нелокальное в смысле значений параметров R и Ha достаточное условие разрешимости неоднородной первой краевой задачи для редуцированной системы Навье-Стокса-Максвелла. Это условие не имеет нелокальных аналогов в теории уравнений Навье-Стокса.

Во втором параграфе на основании априорных оценок, полученных в предыдущей главе, доказаны нелокальные теоремы единственности двумерных решений рассматриваемых краевых задач в классе двумерных же решений. Эти условия также не имеют аналогов в теории уравнений Навье-Стокса.

Т е о р е м а 4.1. Пусть S удовлетворяет условию Ляпунова, $U_0 \in C_\alpha^2(S)$, а поле B^0 удовлетворяет условию (H). Тогда, если значения параметров R, Ha удовлетворяют неравенству

$$4q\mu^2 Ha > \{[M_{\varphi 1} + 0,75M_{\varphi 2}^2 R d(0,5 - q)^{-1}]^2 +$$

$$\begin{aligned}
& +32qR\overline{m}m^{-1}d^{1,5/p-1/4}\{0,125(1+2/p)(3(0,5- \\
& -q)^{-1}(7p-2)^{-1}pR\overline{m}m^{-1}d^{1,5/p-1/4})^{(p+2)/(p-2)}o \\
& o(C_{w_1}Ha^{-1/2} + M_{\varphi_2}C_{w_2})^{16/(p-2)}(C_{\nabla_1}Ha^{1/2} + \\
& + M_{\varphi_2}C_{\nabla_2}Ha)^{8(p-2)/(p+2)} + p^{-p}(24(p-1)^{-1}p(0,5- \\
& -q)^{-1}R\overline{m}m^{-1}d^{1,5/p-1/4})^{p-1}d^{5/2-p/4}(C_{w_1}Ha^{-1/2} + \\
& + 9M_{\varphi_2}C_{w_2})^{(p+2)/4}(C_{\nabla_1}Ha^{1/2} + M_{\varphi_2}C_{\nabla_2}Ha)^{(3p-2)/4}\}. \\
& 2 < p < 10/3, \quad 0 < q < 0,5,
\end{aligned}$$

то решение неоднородной первой краевой задачи для редуцированной системы Навье-Стокса-Максвелла единственно.

Условие единственности решения полуоднородной задачи следует из этой теоремы при $M_{\varphi_1} = M_{\varphi_2} = 0$.

В третьем и четвертом параграфах рассматривается полуоднородная краевая задача для двумерной нередуцированной системы (соответственно плоский и трехкомпонентный случаи). Условия единственности решения плоской задачи имеют вид:

$$Ha \geq C_{h_2}(D, S, U_0)R^4, \quad R_m \leq C_{r_2}(D, S, U_0, R)Ha^{-1/2}.$$

Показано, что условие единственности решения двумерной трехкомпонентной краевой задачи совпадают с условиями единственности соответствующей плоской задачи.

В пятом параграфе выводятся условия единственности двумерного решения полуоднородной краевой задачи для нередуцированной системы Навье-Стокса-Максвелла в классе трехмерных решений, которые финитны или периодичны по переменной, изменяющейся вдоль оси цилиндра. Они имеют вид:

$$Ha \geq C_{h_3}(D, S, U_0)R^4, \quad R_m \leq C_{r_3}(D, S, U_0, R)Ha^{-1/2}.$$

Доказательства теорем единственности основаны на сравнении "прямых" и "обратной" оценок невязок решений и используют не слишком быстрый рост L_2 - норм решений соответствующих краевых задач по параметру Хартмана.

В шестом и седьмом параграфах главы рассмотрены условия тривиальности ядра линеаризованной в окрестности плоского двумерного решения краевой задачи для трехмерной системы Навье-Стокса-Максвелла. Предполагается, что векторное поле $\mathbf{V} \neq 0$, а

ядро состоит из финитных или периодических по переменной, изменяющейся вдоль оси цилиндра, векторных полей. Основным результатом содержится в утверждении.

Теорема 4.2. Пусть S удовлетворяет условию Ляпунова, поле $U_0(S) \in C_\alpha^2(S)$ и $U_0(S) \cdot \nu = 0$. Пусть векторное поле B^0 удовлетворяет условию (H). Тогда для любого наперед заданного значения параметра R и $Ha > Ha_0$, $R_m < R_{m0}(Ha)$, где

$$Ha_0 = C_h(D, S, U_0)R^2, \quad R_m \leq C_{rm}(D, S, U_0, R)Ha^{-1/2},$$

линеаризованная в окрестности плоского двумерного решения краевая задача имеет только тривиальное решение.

В восьмом параграфе главы исследуется случай $B_d \equiv 0$. При этом решения системы Навье-Стокса не зависят от параметра Ha .

Теорема 4.3. Для любого наперед фиксированного значения числа R и $Ha > Ha_0$, где $Ha_0 = C_{h1}(D, S, U_0)X_0R^{2r/(r-3)}R_m^{3/2}$ и $r \geq 3$, линеаризованная в окрестности плоского двумерного решения краевая задача имеет только тривиальное решение.

В последнем параграфе главы рассмотрен абстрактный аналог интегральных уравнений, полученных в начале главы. Для нелинейного операторного уравнения с однородным вполне непрерывным однородным получено достаточное условие разрешимости.

В пятой главе рассматриваются вопросы связанные с приближенными решениями первой краевой задачи для системы Навье-Стокса-Максвелла и с определением топологической структуры этих решений. В первом параграфе главы исследуются условия допустимости B_0 -редукции двумерной системы Навье-Стокса-Максвелла с полуоднородными краевыми условиями.

Теорема 5.1. Пусть S удовлетворяет условию Ляпунова, поле $U_0(S) \in C_\alpha^2(S)$ и $U_0(S) \cdot \nu = 0$. Пусть векторное поле B_d удовлетворяет условию (H) и $Ha \geq Ha_0$ где Ha_0 определяется из условия $Ha^{3/2} \geq C_{ho}(D, S, U_0)R^4$. Тогда для невязки δu решений краевой задачи для редуцированной и нередуцированной систем Навье-Стокса-Максвелла имеют место оценки

$$\|\nabla \times \delta u\| \leq R_m C_{\nabla u} Ha^{0,5+\gamma}; \quad \|\delta u\| \leq R_m C_u Ha^\gamma;$$

$$\|\delta u \times B_d\| \leq R_m C_{2u} Ha^{-0,5+\gamma}; \quad C = C((R, D, S)).$$

где γ - сколь угодно малое положительное число.

Второй параграф посвящен вопросам применимости линеаризации Стокса для редуцированной системы Навье-Стокса-Максвелла при фиксированных значениях параметра Рейнольдса и неограниченно возрастающих значениях параметра Хартмана. Краевые условия предполагаются полуоднородными.

Т е о р е м а 5.2. Пусть S удовлетворяет условию Ляпунова, поле $U_0(S) \in C_\alpha^2(S)$ и $U_0(S) \cdot \nu = 0$. Пусть векторное поле B_d удовлетворяет условию (H) и

$$Ha > Ha_0 = C_{st}(R, D, S)R^{2q/(q-4)}, \quad q > 4.$$

Тогда для невязки δu решений краевой задачи для редуцированной системы Навье-Стокса-Максвелла и ее линеаризации Стокса имеют место оценки ($\alpha = 2/q$)

$$\|\nabla \times \delta u\| \leq C_{\nabla st} R H a^\alpha, \quad \|\delta u \times B_d\| \leq C_{bst} R H a^{\alpha-1},$$

$$\|\delta u\| \leq C_{ust} R H a^{-1/2+\alpha/2}, \quad C = C(D, S, U_0)$$

Как показывает пример, приведенный в первой главе, первые две оценки, в силу произвольности $\alpha < 1$, близки к предельным (в смысле зависимости от Ha), в которых $\alpha = 0$. Получение аналогичных оценок в более сильных нормах представляется проблематичным, поскольку уже $\|\delta U\|_H = \|\nabla \times \delta U\|$ не стремится к нулю при $Ha \rightarrow \infty$. Однако, в силу оценки "снизу", полученной в параграфе 3.6., стремиться к нулю норма относительной погрешности:

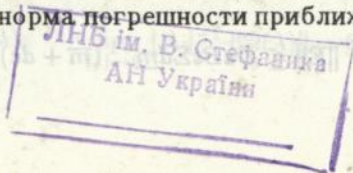
$$\|\nabla \times \delta u\| \|\nabla \times u\|^{-1} \leq C_{\nabla st}(D, S, U_0) R H a^{\alpha-0.5}.$$

В третьем параграфе получены условия одновременной применимости редукции системы Навье-Стокса-Максвелла и линеаризации Стокса для редуцированной системы.

Т е о р е м а 5.3. Если для любых наперед заданных значений R и ϵ значения Ha, R_m удовлетворяют условиям

$$Ha \geq R^4 C_{hst}(D, S, U_0), \quad R_m \leq \epsilon (2C_{ust} H a^7)^{-1},$$

где $C_{hst}(D, S, U_0)$ - некоторая постоянная, то возможно одновременное применение редукции системы Навье-Стокса-Максвелла и ее стоксовой линеаризации. При этом L_2 - норма погрешности приближенного решения не превосходит ϵ .



В четвертом параграфе рассмотрен пример точного решения неоднородной краевой задачи, в котором векторные поля имеют особую точку типа "седло" кратности 2. При сколь угодно малых возмущениях краевых значений эта особая точка распадается, образуя устойчивые конфигурации векторных линий решения. Показано, что использование редуцированной системы Навье-Стокса-Максвелла не позволяет определить эти конфигурации.

Пятый параграф посвящен вопросам определения топологической структуры векторных линий решения плоской краевой задачи для системы Навье-Стокса-Максвелла. Структурой решения называется набор чисел, в который включены: связность области D и число особых точек каждого типа (с указанием кратностей и направлений обхода) для векторных полей U, V_d . Структура решения называется устойчивой топологически, если все особые точки устойчивы топологически в обычном понимании этого термина.

Т е о р е м а 5.4. Пусть P_0 - некоторая точка множества значений числовых параметров системы Навье-Стокса-Максвелла и решение $\{U_0(P_0), V_0(P_0)\}$ первой краевой задачи имеет в D только изолированные особые точки, индексы которых отличны от нуля, а линеаризованная в окрестности этого решения краевая задача имеет только тривиальное решение. Тогда можно указать окрестность точки P_0 , в которой структура решения (U_0, V_0) устойчива топологически.

Указан способ определения топологической структуры решения векторного поля V_d , основанный на свойствах нулей обобщенных аналитических функций.

В шестой главе рассматриваются решения краевой задачи в бесконечно длинной "трубе". Векторные поля имеют вид: $U = ux$, $V = V_d + bx$. В первом параграфе получены неулучшаемые глобальные априорные оценки L_2 - норм решений задачи.

Т е о р е м а 6.1. Пусть граница S - кусочно гладкая и поле V_d не вырождается в $D \cup S$. Тогда для обобщенного решения имеют место априорные оценки (Σ - площадь D):

$$\|\nabla u\| \leq Eu\Sigma d^{1/2} \underline{m}^{-1} [(\bar{m} + de)d + Ha^{-1}]^{1/2} Ha^{-1/2};$$

$$\|\nabla b\| \leq EuBt\Sigma d^{1/2} \underline{m}^{-1} [(\bar{m} + de)d + Ha^{-1}]^{1/2} Ha^{-3/2};$$

$$\|E\| \leq EuBt\Sigma \underline{d} \underline{m}^{-1} (\bar{m} + de)^{1/2} [(\bar{m} + de)d + Ha^{-1}]^{1/2} Ha^{-1};$$

$$\|u\| \leq Eu\Sigma d\bar{m}^{-2} [(\bar{m} + de)d + Ha^{-1}] Ha^{-1}, \quad \epsilon = \int_S \nu \times \mathbf{B}_d S$$

На основании этих оценок во втором параграфе главы исследовано локальное поведение решений внутри области.

Теорема 6.2. Пусть u - обобщенное решение краевой задачи в "трубе". Тогда в любой внутренней замкнутой подобласти $D' \subset D$ имеет место оценка

$$\sup_{D \cup S} \text{esse } |u| \leq M_\infty Ha^{\frac{3s-4}{s-1}}; \quad s = rq, \quad q \in [2/r, p_1].$$

В последнем параграфе главы рассматриваются вопросы единственности и устойчивости решений.

Теорема 6.3. Пусть граница S - кусочно гладкая, а поле \mathbf{B}_d не вырождается в $D \cup S$ и число Ha удовлетворяет неравенству

$$Ha > 16\Sigma^{4/3} d\bar{m}^{-2} (1 + Bt)^3 Eu^{4/3} \left(1 + Eu\Sigma d^{3/4} \bar{m}^{-1/2}\right)^{4/3},$$

Тогда решение краевой задачи в "трубе" единственно в классе трехмерных финитных или периодических по переменной, изменяющейся в направлении оси "трубы", решений.

Эта теорема является обобщением отмеченной выше теоремы единственности Д.Н.Ханта. Показано, что условия тривиальности ядра линеаризованной в окрестности двумерного решения трехмерной задачи совпадают с условиями единственности этого решения.

Целью седьмой главы является разработка аппарата исследования множества точек бифуркации решений первой краевой задачи для редуцированной системы Навье-Стокса-Максвелла. Основные теоремы главы относятся к спектральной теории вполне непрерывных операторов в банаховых пространствах.

В первом параграфе исследовано локальное строение спектра линейного оператора $F(\lambda_1, \lambda_2)$, отображающего банахово пространство E в себя, вполне непрерывного в топологии E и зависящего от двух вещественных числовых параметров. Пара $(\lambda_{10}, \lambda_{20})$ называется характеристической точкой оператора F , если 1 - собственное значение оператора $F(\lambda_{10}, \lambda_{20})$. Предполагается, что в окрестности точки $\lambda = 0$ оператор F допускает представление

$$F(\lambda) = \Phi_0 + \lambda_1 \Psi + \lambda_2 \Psi + \Omega(\lambda), \quad \lim_{|\lambda| \rightarrow 0} |\lambda|^{-1} \|\Omega(\lambda)\| = 0.$$

Пусть $e_1, e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1m_1}; e_2, e_{21}, e_{22}, \dots, e_{2m_2}; \dots; e_k, e_{k1}, e_{k2}, \dots, e_{km_k}$ - базис корневого подпространства L_0 оператора Φ_0 , а e_1, e_2, \dots, e_k - базис его собственного подпространства. Линейные функционалы $\varphi_1, \varphi_{11}, \varphi_{12}, \dots, \varphi_{1m_1}; \varphi_2, \varphi_{21}, \varphi_{22}, \dots, \varphi_{2m_2}; \dots; \varphi_k, \varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \dots, \varphi_{km_k}$ биортогональны к базисным элементам L_0 .

Теорема 7.1. Пусть 1 - собственное значение оператора Φ_0 и хотя бы один из коэффициентов формы $\sigma(\lambda) = \det \mathcal{U}(\lambda)$, где $\mathcal{U}(\lambda)$ - матрица с элементами

$$\mathcal{U}_{qs} = \sum_{i=1}^2 \lambda_i [\delta_{m_q 0} \varphi_q + (1 - \delta_{m_q 0}) \varphi_{qm_q} (P \Psi_i e_s)]; \quad q, s = 1, 2, \dots, k.$$

а $\delta_{a,b}$ - символ Кронекера, отличен от нуля. Тогда справедливы такие утверждения:

а) если форма $\sigma(\lambda)$ знакоопределена, то характеристическая точка $(0, 0)$ оператора $\Phi(\lambda)$ изолирована;

б) если форма $\sigma(\lambda)$ знаконеопределена, p - число вещественных линейных биномов, входящих в разложение $\sigma(\lambda)$ на вещественные множители с нечетными степенями, то существуют $\varepsilon_0 > 0$ и не менее p пар непрерывных при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ функций $(\lambda_1^{(r)}(\varepsilon), \lambda_2^{(r)}(\varepsilon))$, $r = 1, 2, \dots, p$ таких, что $\lambda_{1,2}^{(r)}(0) = 0$, и $|\lambda^{(r)}(\varepsilon)| < \varepsilon_0$;

в) размерности собственных подпространств, отвечающих числам $\lambda^r(\varepsilon)$, одинаковы и не превосходят $k = p + 1$.

Во втором параграфе исследовано строение множества точек бифуркации нелинейного вполне непрерывного оператора $\Phi(\lambda) : E \rightarrow E$, зависящего от двух вещественных числовых параметров. Пусть через точку $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0)$ проходит p характеристических кривых l_1, l_2, \dots, l_p . Эти кривые делят открытый круг достаточно малого радиуса $\rho_0 > 0$ на $2p$ открытых секторов Σ_i ($i = 1, 2, \dots, 2p$). Очевидно, индексы нулевой точки полей $u - \Phi(\lambda)u$ одинаковы для всех $\lambda \in \Sigma_i$. Эти общие индексы обозначаются $\gamma_i, \bar{\gamma}_i$.

Теорема 7.2. Пусть для всех $\lambda \in l_i, |\lambda| < \rho$ корневые подпространства оператора $\Phi'(0, 0)$ совпадают с собственными и среди чисел $\gamma_i, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_p$ имеются различные. Тогда точка $(0, 0)$ - является точкой бифуркации оператора $\Phi(\lambda)$ и его спектр сплошной.

В третьем параграфе, теоремы, доказанные в первых двух параграфах, формулируются в терминах первой краевой задачи для редуцированной системы Навье-Стокса-Максвелла. В качестве приложения намечен подход к решению задачи о бифуркации трехмер-

ного решения двумерной краевой задачи в двумерное при неограниченном возрастании значений параметра Хартмана.

В четвертом параграфе главы вычислен индекс решения первой краевой задачи для редуцированной системы Навье-Стокса-Максвелла. Доказано, что если корневое подпространство, отвечающее характеристической точке линеаризованной в окрестности некоторого решения задачи, совпадает с собственным, то индекс решения равен единице.

Основные положения, вынесенные на защиту. Важнейшие научные результаты, полученные в диссертации, формулируются следующим образом.

1. Получены априорные оценки решений первой краевой задачи для стационарной редуцированной системы Навье-Стокса-Максвелла при общих предположениях относительно их краевых значений. Эти оценки не имеют нелокальных аналогов в теории первой задачи для системы Навье-Стокса. Для случая полуднородного краевого условия оценки двусторонние и неулучшаемы.

2. Разработана техника получения глобальных априорных оценок решений полуднородной первой краевой задачи для системы Навье-Стокса-Максвелла. На ее основе получены неулучшаемые оценки решений двумерных плоской и трехкомпонентной краевых задач с полуднородными краевыми условиями.

3. Получены внутренние и локальные асимптотические (При больших значениях параметра Хартмана) оценки решений первой краевой задачи для стационарной редуцированной системы Навье-Стокса-Максвелла. Получена оценка меры пограничного слоя решения.

4. Доказана новая, не имеющая нелокального в смысле значения параметров системы аналога в теории уравнений Навье-Стокса, теорема существования решения при общих предположениях относительно краевых значений. Доказаны нелокальные теоремы единственности двумерных решений в классах двумерных и трехмерных решений. Получены достаточные условия, связывающие значения параметров системы, при выполнении которых решение плоской двумерной краевой задачи не бифурцирует в трехмерное финитное или периодическое решение.

5. Получены условия допустимости V_0 -редукции системы Навье-Стокса-Максвелла и априорные оценки норм погрешности приближенного решения. Решена проблема применимости линеаризации Стокса для двумерной редуцированной системы Навье-Стокса-Мак-

свелла при конечных значениях параметра Рейнольдса и достаточно больших значениях параметра Хартмана. Исследована возможность одновременного применения V_0 -редукции системы и линеаризации Стокса. Получены доступные для применения в практических расчетах априорные оценки норм абсолютной и относительной погрешностей.

6. Для решений краевой задачи в бесконечно длинных "трубах" получены неуплощаемые глобальные и локальные априорные оценки решений. Получено условие единственности двумерного решения в классе трехмерных решений.

7. Доказана теорема о строении спектра линейного вполне непрерывного оператора, гладко зависящего от двух вещественных числовых параметров. Установлено строение множества точек бифуркации нелинейного, дифференцируемого по Фреше вполне непрерывного оператора, зависящего от двух числовых параметров. Полученные теоремы переформулированы в терминах полуоднородной краевой задачи для V_0 -редуцированной системы Навье-Стокса-Максвелла. Доказано, что если 1 - собственное значение линеаризованной в окрестности некоторого решения краевой задачи, и отвечающее ему корневое подпространство совпадает с собственным, то индекс этого решения равен единице.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Бритов Н.А. Априорные оценки, существование и единственность двумерных и осесимметричных безындукционных решений краевых задач магнитной гидродинамики // Магнит. гидродинамика.- 1988.- N 4.- С.81-85.

2. Бритов Н.А. О некоторых условиях разрешимости и единственности решения двумерной краевой задачи магнитной гидродинамики // Киев.- Наукова думка.- в кн.: Нелин. граничн. задачи.- вып. 2.- 1990.- С.6-19.

3. Бритов Н.А. Течение между пористыми вращающимися цилиндрами в радиальном магнитном поле // Магнит. гидродинамика.- 1979.- N 3.-С.135-137.

4. Бритов Н.А. Эффективные априорные оценки решений первой краевой задачи магнитной гидродинамики // Киев.- Наукова думка.- в кн.: Нелин. граничн. задачи.- вып.3.- 1991.- С.13-16.

5. Бритов Н.А., Прохоров И.Г. Исследование качественных свойств трехкомпонентных двумерных течений жидкого металла в

магнитном поле на модели Навье-Стокса-Максвелла // Киев.- Наукова думка.- в кн.: Теория и моделир. управл. систем.- 1991.- С.97-102.

6. Бритов Н.А. Об одном классе уравнений с однородными операторами // Киев.- Наукова думка.- в кн.: Математ. физика.- 1978.- вып 24.- С.82-84.

7. Бритов Н.А. Про єдиність та стійкість розв'язків Стокса дво-вимірної крайової задачі магнітної гідродинаміки // Сімферополь.- у кн.: Спектр. і еволюц. задачі (тези доповідей).- 1991.- С.158.

8. Бритов Н.А. Об условию тривиальности ядра линеаризованной первой краевой задачи для системы уравнений магнитной гидродинамики // Украин. матем. журнал.- 1995.- N 2.- С.168-173.

9. Бритов Н.А. О поведении плоских безындукционных магнитогидродинамических течений в цилиндрах при наложении магнитного поля // Магнит. гидродинамика.- 1989.- N 2.- С. 51-54.

10. Бритов Н.А. О точках бифуркации одной системы нелинейных интегральных уравнений // Киев.- Наукова думка.- в кн.: Математ. физика.- 1979.- вып 25.- С.113-116.

11. Бритов Н.А. Двумерные МГД-течения в сильных магнитных полях // Магнит. гидродинамика.- 1979.- N 3.- С.10-16.

12. Бритов Н.А. Энергетическая теория стационарных двумерных МГД-течений в сильных магнитных полях // Тезисы XII совещ. по магнит.гидродинам.- Саласпилс.- 1987.- т.1.- С.163-166.

13. Бритов Н.А. О приближении Стокса для двумерных безындукционных магнитогидродинамических течений // Прикл. математ. и механика.- 1991.- т.54.- вып.5.- С.780-795.

14. Бритов Н.А. Безындукционное приближение не позволяет определить топологическую структуру магнитного поля // Магнит. гидродинамика.- 1983.- N 3.- С.136-138.

15. Бритов Н.А. Плоские МГД-структуры. Топологический подход. // Магнит. гидродинамика.- 1982.- N 1.- С.3-8.

16. Бритов Н.А. Вычисление устойчивой структуры магнитного поля для некоторых плоских МГД-течений // Магнит. гидродинамика.- 1983.- N 2.- С.133-134.

17. Бритов Н.А. Исследование управляющего воздействия магнитного поля на однокомпонентный поток металла // Киев.- Наукова думка.- в кн.: Теория и моделир. управл. систем.- 1989.- С.110-115.

18. Бритов Н.А. О трехмерном аналоге теоремы Ханта для некоторых магнитогидродинамических течений в трубах // Магнит. гидродинамика.- 1989.- N 3.- С.28-32.

19. Бритов Н.А. Спектр линейного вполне непрерывного оператора, зависящего от двух параметров // Киев.- Наукова думка.- в кн.: Матем. физ. и нелин. мех.- 1985.- С.56-60.

20. Бритов Н.А. Про спектр і точки біфуркації цілком неперервного оператора, залежного від двох кількісних параметрів // Київ.-1991. - у кн.: Спектр. і еволюц. задачі. -С.25.

21. Бритов Н.А. Спектр и точки бифуркации вполне непрерывного оператора, зависящего от двух параметров // Киев.- Наукова думка.- в кн.: Нелин. граничн. задачі.- вып.4.- 1992.- С.6-19.

22. Бритов Н.А. Об индексе решения двумерной краевой задачи гидродинамики // в кн.: Республ. конф. по нелин. задачам матем. физики. - 1983. С.18.

23. Бритов Н.А. До обчислення індексу розв'язків першої крайової задачі магнітної гідродинаміки // Симферополь.- 1993.- у кн.: Спектр. и эволюц. задачі.- вып.3.- С.124.

Бритов Н.А. Исследование качественных свойств решений первой краевой задачи для стационарной системы уравнений Навье-Стокса-Максвелла.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, 1995, рукопись.

Защищаются 23 работы, содержащие исследования первой краевой задачи для двумерной стационарной системы Навье-Стокса-Максвелла. Получены глобальные, внутренние, локальные априорные оценки и доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости решений. Получены условия допустимости а также априорные оценки норм погрешности линеаризации Стокса и \mathbf{V}_0 -редукции системы. Исследовано множество точек бифуркации вполне непрерывного оператора, зависящего от двух числовых параметров. В важном частном случае вычислен индекс решения.

Britov N.A. The investigation of the quality properties of solutions of the first boundary value problem for steady-state Navier-Stokes-Maxwell equations.

Thesis for Degree of Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, the speciality 01.01.02 - Differential Equations, Institute of Applied Mathematics and Mechanics NAS Ukraine, Donetsk, 1995, manuscript.

23 papers, of containing researches of the first boundary value problem for two-dimensional steady-state Navier-Stokes-Maxwell system are defended. Are received global, internal and local a priori estimates and the theorems of the existence, uniqueness and stability of solutions are proven. Conditions of admissibility and a priori estimates of errors of Stokes linearization and \mathbf{V}_0 -reduction of the system are obtained. A structure of bifurcation points set of the quite continuous operator dependent from two numerical parameters is investigated. In one significant case an index of the solution is calculated.

Ключові слова: крайова задача, розв'язок, існування, єдиність, стійкість, априорна оцінка, \mathbf{V}_0 -редукція, наближення Стокса, спектр, бифуркація, індекс.

Кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры физико-математических наук, Институт механики и математики НАН Украины, Киев, Украина.

is investigated. In one significant case an index of the solution is calculated of the quite continuous operator dependent from two numerical parameters reduction of the system are obtained. A structure of bifurcation points set admissibility and a priori estimates of errors of Stokes linearization and the existence, uniqueness and stability of solutions are proven. Conditions of are received global, internal and local a priori estimates and the theorem of two-dimensional steady-state Navier-Stokes-Maxwell system are defended. 22 paper of containing researches of the first boundary value problem for and Mechanics NAS Ukraine, Donetsk, 1995 manuscript.

Thesis for Degree of Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, the specialty 01.01.03 - Differential Equations, Institute of Applied Mathematics and Mechanics NAS Ukraine, Donetsk, 1995 manuscript.

Prilozhenie 1. The investigation of the quality properties of solutions of the first boundary value problem for steady-state Navier-Stokes-Maxwell equations.

Замовлення № 83 робота, розроблена на кафедрі фізики та математики Київського національного університету імені Шевченка, Київ, Україна.

Принят Н.А. Нескорова в качестве кандидата физико-математических наук в Институт механики и математики НАН Украины, Киев, Украина. Диссертация содержит работу по специальности 01.01.03 - дифференциальные уравнения. Работа выполнена в Киевском национальном университете имени Шевченка.

AAE. HE 2A

442749

AB 34.066

BUK 111