ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ім. І.ФРАНКА

На правах рукопису

ВИННИЦЬКИЙ БОГДАН ВАСИЛЬОВИЧ

СИСТЕМИ ЕКСПОНЕНТ І ЇХ УЗАГАЛЬНЕННЯ В ПРОСТОРАХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

(01.01.01 - математичний аналіз)

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

ЛЬВІВ - 1996

...чного аналізу Дрогобицького державного педагогічного інституту ім. І.Франка.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
професор Гольдберг А.А.,
доктор фізико-математичних наук,
професор Коробейнік Ю.Ф.,
доктор фізико-математичних наук,
професор Седлецький А.М.

Провідна організація: Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України ім. Я.С.Підстригача, м.Львів.

Захист відбудеться "19" квітня 1996 р. о 15-30 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д.04.04.01 при Львівському державному університеті ім.І.Франка за адресою: 290602, м.Львів, вул. Університетська, 1.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Львівського державного університету ім.І.Франка за адресою: м.Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розіслано "4" березня 1996 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Микитюк Я.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Предмет дослідження. Дисертація присвячена проблемі, яка в загальних рисах може бути описана так. Яким умовам повинна задовольняти підмножина U деякого лінійного топологічного простору T, щоб кожний елемент цього простору можна було в певному розумінні наблизити лінійними комбінаціями елементів множини U? Нас цікавлять в основному аналітичні аспекти цієї проблеми і ми розглядаємо конкретні множини U в конкретних просторах. Предметом нашого дослідження є умови повноти і властивості неповних систем виду

$$\left\{ e^{\lambda_n z} \right\},\ n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

$$\left\{ z^k e^{\lambda_n z} \right\},\ 0 \le k \le m_n - 1,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ m_n \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

в одному банаховому просторі $E^2[\mathcal{D}]$ (означення див. нижче), а також базиси і абсолютно зображувальні системи виду

$$\{f(\lambda_n z)\},\ n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

в просторі A_R, $0 < R \le +\infty$, функцій, аналітичних в крузі $\mathcal{K}_R=\{z: |z|<R\}$, з топологією, яка задається рівномірною збіжністю на кожному компакті із $\mathcal{K}_R$, де f - ціла функція і $\{\lambda_n\}$, $n\in\mathbb{N}$ - множина (різних) комплексних чисел. Властивості цих систем тісно пов'язані з багатьма проблемами теорії аналітичних функцій (описання нулів, інтерполяційні задачі, інтегральні зображення). Системи (1)-(3) відіграють важливу роль в різних розділах математики (теорії чисел, теорії інтегральних і диференціальних рівнянь, теорії нескінченних систем лінійних рівнянь) та її застосуваннях. Тому їх дослідженню присвячені багаточисельні роботи, серед яких відомі монографії В.Бернштейна, Н.Ле-

вінсона, Л. Шварц, А. Леонтьєва, С. Мандельбройта, М. Шеремети та інших. Проте ряд проблем залишаються відкритими, а результатів остаточного характеру є не так вже і багато. Це пояснюється досить складною залежністю між властивостями систем (1)-(3) та властивостями множини $\{\lambda_n\}$. Виявлення цієї залежності є актуальною проблемою і змістом більшості досліджень цих систем. В нашій роботі для декількох проблем повністю описаний зазначений вище взаємозв'язок.

Нехай $\mathcal{D}$ -довільна необмежена опукла n-кутна, $n\ge 2$, $n \in \mathbb{N}$, область, $\mathcal{D}^* = \mathbb{C} \setminus \bar{\mathcal{D}}$ і $E^2[\mathcal{D}]$ (відповідно $E^2_*[\mathcal{D}]$) - простір функцій f, аналітичних в $\mathcal{D}$ (аналітичних в $\mathcal{D}^*$), для яких

$$\sup \left\{ \int_{\gamma_0} |f(z)|^2 \, |dz| \right\} < +\infty , \qquad (4)$$

де супремум береться за всіма відрізками $\gamma_0 \subset \mathcal{D}$ ($\gamma_0 \subset \mathcal{D}^*$). Можна обмежитись відрізками, паралельними сторонам $\partial\mathcal{D}$. У випадку $\mathcal{D}=\mathcal{D}(\beta)$, де $\mathcal{D}(\beta)=\{ z: |\arg z -\pi|<\pi/2\beta \}$, $1\le\beta<+\infty$, можна розглядати тільки відрізки, які виходять із початку координат. Функції f із просторів $E^2[\mathcal{D}]$ і $E^2_*[\mathcal{D}]$) мають майже всюди (м. в.) на $\partial\mathcal{D}$ кутові граничні значення (їх також позначаємо через f(z) і, отже, f природним чином визначена м. в. на $\partial\mathcal{D}$), $f \in L^2(\partial\mathcal{D})$ і рівність

$$||f||=\left[\int_{\partial\mathcal{D}} |f(t)|^2 \, dt \right]^{1/2} \qquad (5)$$

визначає норму на кожному з них. Джерелом досліджень в перших двох розділах є добре відома теорема Мюнца-Саса і отриманий М. Джрбашяном і В. Мартіросяном [1] наступний її аналог: якщо $1<\beta<+\infty$, $1/\alpha+1/\beta=1$, $\mathbb{C}(\eta,\gamma)=\{z: \eta<\arg z<\gamma\}$, (λ_n) -послідовність різних комплексних чисел із $\mathbb{C}(-\pi/2\alpha;\ \pi/2\alpha)$ і $\varphi_n=\arg \lambda_n$, то для того щоб система (2) не була повною в $E^2[\mathcal{D}(\beta)]$, необхідно і досить, щоб

$$\sum_{|\lambda_n|\le 1} m_n |\lambda_n|^{\alpha} \cos \alpha\varphi_n < +\infty, \quad \sum_{|\lambda_n|> 1} m_n |\lambda_n|^{-\alpha} \cos \alpha\varphi_n < +\infty.$$

Ми описуємо всі повні системи видів (1) і (2) в будь-якому просторі $E^2[\mathcal{D}]$, який містить принаймні одну функцію виду $F_\lambda(z)=e^{\lambda z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. При цьому суттєво нова ситуація виникає, коли $\mathcal{D}=\mathcal{D}_\sigma$, де $\mathcal{D}_\sigma=\{z: |\mathrm{Im}\, z|<\sigma,\ \mathrm{Re}\, z<0\}$, $0<\sigma<+\infty$ (інші можливі випадки подібні до $\mathcal{D}=\mathcal{D}_\sigma$ і $\mathcal{D}=\mathcal{D}(\beta)$). Отримання цього описання вимагало розвитку теорії просторів $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ (через $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ позначаємо простір функцій, аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+=\{z: \mathrm{Re}\, z>0\}$, для яких

$$\|f\|^p := \sup_{|\varphi|<\pi/2} \left\{\int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|}\,dr\right\} < +\infty\ ) \quad (6)$$

і, зокрема, описання послідовностей нулів, кутових граничних значень і отримання інтегральних зображень таких класів функцій. Проблема описання послідовностей нулів різних класів аналітичних функцій постійно привертала до себе увагу. Згадаємо в цьому зв"язку відомі результати Ф.Карлсона В.Фукса, П. Малявена і Л.Рубеля, а серед недавніх - результати А.Грішина і М.Содіна, Б.Хабібулліна, А.Сєдлецького та інших. Проте питання про повне описання послідовностей нулів аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій f, які задавольняють умову (6), а також наступну умову

$$|f(z)| \le c_1 \exp(\sigma|z|),\quad 0\le\sigma<+\infty,\quad z\in\mathbb{C}_+, \quad (7)$$

(тут і далі через c_1, c_2, ... позначаємо додатні сталі) у випадку $\sigma>0$ залишалось відкритим. Ми повністю розв"язуємо цю задачу. Добре відома теорема Пелі-Вінера має різні формулювання та різноманітні застосування. Вона з одного боку дає інтегральне зображення функцій з простору $H^2(\mathbb{C}_+)$ (через $H^p(\mathbb{C}_+)$, $0<p\le+\infty$, позначаємо простір Харді в півплощині $\mathbb{C}_+$), а з іншого - описує їх кутові граничні функції. Поширенню її першого аспекту на інші класи аналітичних функцій присвячені роботи Б. Левіна, М. Ліхта, М. Джрбашяна, М. Джрбашяна і В. Мартіросяна, Ю. Любарського, А. Седлецького та інших. Ми узагальнюємо теорему Пелі-Вінера на простори $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, причому обидва вказані вище її аспекти. Резюмовані вище результати разом із введеним нами поняттям перетворення Фур"є-Лапласа функцій із $E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ та встановленими для нього аналогами теореми про згортку і двоїстої формули застосовуємо до вивчення деяких властивостей рівняння згортки виду

$$\int_{\partial\mathcal{D}_\sigma} f\,(t+\tau)\,g(t)\,dt = 0,\ \tau\le 0,\ g\in E^2_*[\mathcal{D}_\sigma], \tag{8}$$

а також послідовностей експоненціальних поліномів

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{\nu_n} d_{k,n}e^{\lambda_k z},\ \nu_n\in\mathbb{N}, \tag{9}$$

та рядів Діріхле

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{\lambda_n z}. \tag{10}$$

А. Леонтьєв [2] показав, що кожну функцію $F\in A_R$, можна розкласти у збіжний в A_R, $0<R\le+\infty$, ряд Діріхле (10). Він припускав, що (λ_n) є послідовністю нулів деякої цілої функції порядку $\rho=1$ і для коефіцієртів d_n вказував певні формули. Пізніше Ю. Коробейнік (див. [3]) знайшов інший підхід до цієї проблеми. Він ввів поняття абсолютно зображувальної системи, одер-

жав критерій того, щоб задана система в деяких лінійних топологічних просторах була абсолютно зображувальною, і на основі цього описав всі абсолютно зображувальні системи виду (1) в просторі A_R та деяких інших просторах. Правда, цей підхід не дає формул для знаходження коефіцієнтів d_n ряду (10). В роботах А.Леонтьєва, Чан За Лика, В.Мусояна, Ю.Мельника, В.Шевцова, Ю.Коробейніка, А.Абаніна та інших (див.[3,4]) основні результати про абсолютно зображувальні системи виду (1) переносились на системи виду (3). При цьому, як правило, припускалось, що f-ціла функція, для якої (тут і далі $f_n=f^{(n)}(0)/n!$)

$$f_n \neq 0,\ n=0,1,2,\ldots, \tag{11}$$

і для деякого ρ, $0 < \rho < +\infty$, існує

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e\rho} |f_n|^{\rho/n} = s_0 \neq 0,\ \infty. \tag{12}$$

В зв"язку з цим виникло питання про істотність умови (12) і, зокрема, про можливість отримання основних фактів про абсолютно зображувальні системи виду (3) при виконанні лише однієї умови (11). Це питання природне, бо легко отримати наступне твердження. Для того щоб для цілої функції f існувала принаймні одна множина $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ така, що система (3) буде повною в просторі A_R, $0 < R \leq +\infty$, необхідно і досить, щоб виконувалась умова (11). Наші результати у відомій мірі дають відповідь на це питання, суть якої полягає в тому, що крім умови (11) на функцію f все ж потрібно накладати певні обмеження. Далі, система (1) не може утворювати базис в просторі A_R, але Ю.Казьмін [5] показав, що система (3), в якій $\lambda_n=q^{n-1}$, $|q|>1$, і f - ціла функція з тейлоровськими коефіцієнтами $f_n=q^{-n(n-1)/2}$, утворює базис в кожному просторі A_R, $1/|q|<R\leq1$, і, таким чином принаймні для $R \in (0;+\infty)$ базиси виду (3) в просторі A_R існу-

ють. Деякі необхідні умови базисності системи (3) знайшов Ю.Коробейнік [6]. Питання про описання таких базисів залишалось відкритим. Наші результати дають описання всіх базисів виду (3) в кожному просторі A_R, $0<R\le+\infty$. Отримані факти про системи (3) дали нам змогу одержати деякі нові результати про нескінченні системи лінійних рівнянь з матрицею Вандермонда. Встановлення властивостей систем виду (3) в значній мірі спирається на отримані нами результати з теорії цілих функцій, які стосуються зв"язку між різними характеристиками цілих функкій, властивостей цілих функцій порядку $\rho<1$ та побудови цілих функцій із наперед заданими властивостями. Кожна із цих тем є предметом багатьох самостійних досліджень (див. [2,3, 7,16]). Проте відповідні доведення вимагали встановлення ряду нових співвідношень в нових формах і при нових умовах.

<u>Мета роботи</u>: 1) вивчення кутових граничних значень, послідовностей нулів та інтегральних зображень певних класів аналітичних функцій; 2) дослідження умов повноти систем експонент та властивостей неповних систем і рівнянь згортки; 3) описання базисів і абсолютно зображувальних систем виду (3) в просторі A_R; 4) дослідження властивостей цілих функцій і побудова цілих функцій із спеціальними властивостями.

<u>Методи дослідження.</u> Використовуються методи класичного аналізу, різні методи теорії аналітичних функцій. В перших двох розділах широко використовується теорія просторів Харді. В трьох останніх розділах розвинута спеціальна техніка отримання оцінок, основана на теорії максимального члена степеневого ряду.

<u>Наукова новизна.</u> В роботі повністю розв"язано декілька

актуальних задач і, зокрема, описано: а) послідовності нулів аналітичних у правій півплощині функцій, які задавольняють умови (6) і (7); б) кутові граничні функції тих аналітичних у правій півплощині функцій, які належать простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1<p\le 2$, $0\le\sigma<+\infty$; в) всі повні системи експонент в просторі $E^2[\mathfrak{D}_\sigma]$; г) всі базиси виду (3) в просторі A_R, $0<R\le+\infty$. Отримано інтегральне зображення функцій із простору $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Введено поняття перетворення Фур"є-Лапласа функцій із простору $E^2[\mathfrak{D}_\sigma]$ і встановлено для нього аналоги двоістої формули та теореми про згортку. Введено поняття цілоі функціі М-регулярного зростання, вказано умови, при яких ціла функція нульового порядку буде функцією М-регулярного зростання та побудовано цілі функціі М-регулярного зростання, які володіють рядом додаткових властивостей і максимум модуля яких має наперед задану швидкість зростання. У випадку $\lambda_n\to\infty$ описано всі абсолютно зображувальні системи виду (3) в просторі A_R і побудовано ефективні розклади функцій в ряди за цією системою. Знайдено достатні умови існування ненульового розв"язку деяких рівнянь згортки і достатні умови для того, щоб задана функція була розв"язком такого рівняння. Вивчено певні властивості неповних систем експонент і одержано оцінки індикаторів рядів Діріхле, а також деякі доповнення до відомих результатів, які стосуються повноти систем експонент з вагою в $L^2(\mathbb{R})$, зростання максисмума модуля цілих функцій, нескінченних систем лінійних рівнянь та інтерполяційних задач.

Теоретична і практична цінність. Робота має теоретичний характер. Результати можуть використовуватись при розв"язуванні рівнянь типу згортки, нескінченних систем лінійних рівнянь, дослідженню умов повноти систем експонент, вивченні асимптотичних властивостей рядів Діріхле, а також інтерполяційних задач. Результати можуть стати корисними для подальшого розвитку теорії базисів, теорії абсолютно зображувальних систем і деяких крайових задач. Теореми 3.1 і 4.9 вже використані Ю.Коробейніком [15].

Особистий внесок дисертанта. Основні результати дисертації отримані автором самостійно. Леми 2.4-2.6 та теореми 2.21-2.25 (вони в авторефераті не формулюються) одержані дисертантом в співавторстві з О.Шаповаловським і належать обом авторам в однаковій мірі.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались на республіканській конференції з теорії цілих і субгармонійних функцій, Харків, 1990 р., на міжнародній конференції, присвяченій 100-річчю народження С.Банаха, Львів, 1992 р., на міжнародній конференції, присвяченій пам"яті Ганса Гана, Чернівці, 1994 р., на семінарах у Львові (керівник проф. А.Гольдберг), в Ростові-на-Дону (керівник проф. Ю.Коробейнік), в Москві (керівник проф. Ю.Казьмін).

Публікації. По темі дисертації опубліковано 36 наукових праць. Основні результати дисертації містяться в роботах [18-39]

Структура і об"єм дисертації. Дисертація складається із вступу, п"яти розділів і списку літуратури з 225 назв. Загальний обсяг дисертації 300 сторінок.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі подано короткий історичний огляд теми роботи, загальна її характеристика та виклад основних результатів.

Розділ 1. Кутові граничні значення та інтегральні зображення деяких класів аналітичних функцій. В першій частині цього розділу наведено необхідні для подальшого використання відомості про простори Харді та деякі інші простори аналітичних функцій. Крім цього, тут в ряді лем вивчено властивості простору $E^2[\mathcal{D}]$. Вони цілком аналогічні властивостям простору Харді $H^2(\mathbb{C})$. Зокрема, $E^2[\mathcal{D}]$ - повний простір і його можна розглядати як замкнутий підпростір простору $L^2(\partial\mathcal{D})$, а простір $E^2_*[\mathcal{D}]$ є спряженим (сильно) до $E^2[\mathcal{D}]$. Відзначаємо також, що кожна функція $f\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ має м.в. на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення, $f(iy)e^{-\sigma|y|}\in L^p(\mathbb{R})$, і описуємо в теоремі 1.4 кутові граничні функції елементів простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. При цьому називаємо визначену м.в. на уявній осі функцію f_1 кутовою граничною функцією для функції $f\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, якщо кутові граничні значення f на уявній осі дорівнюють $f_1(iy)$ для м.в. $y\in\mathbb{R}$. Це описання стає змістовнішим, якщо домножити f_1 на цілу функцію $e^{i\sigma z}$ і сформулювати відповідний результат в асиметричній формі. Нехай $\mathbb{C}(\alpha,\beta)=\{z:\alpha<\arg z<\beta\}$, $0<\beta-\alpha<2\pi$ і $E^p_0[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$ - простір функцій, аналітичних в $\mathbb{C}(\alpha,\beta)$, для яких

$$||f||:=\sup_{\alpha<\varphi<\beta}\left\{\int_0^{+\infty}|f(\tau e^{i\varphi})|^p d\tau\right\}<+\infty,\ 0<p<+\infty.$$

Відомо, що функції f із цього простору мають м. в. на $\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)$ кутові граничні значення і $f\in L^p(\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta))$.

Теорема 1.2. Для того щоб визначена м. в. на уявній осі функція f_1 така, що $f_1(iy)\in L^p(0;+\infty)$, $1<p\le 2$, і $f_1(iy)e^{2\sigma y}\in L^p(-\infty;0)$, $0\le\sigma<+\infty$, була кутовою граничною функцією для деякої аналітичної в $\mathbb{C}_+$ функції f, для якої $f\in E^p_0[\mathbb{C}(0;\pi/2)]$ і $f(z)\cdot e^{-2i\sigma z}\in E^p_0[\mathbb{C}(-\pi/2;0)]$, необхідно і досить, щоб знайшлась така функція f_2, що $f_2(z)e^{-2i\sigma z}\in E^p_0[\mathbb{C}(-\pi/2;0)]$, $f_3(iy)):=f_1(iy)+f_2(iy)\in L^p(-\infty;0)$ і для м. в. $\tau\le 0$ виконується

$$\int_0^{+\infty} f_1(iy)e^{i\tau y}dy + \frac{1}{i}\int_0^{+\infty} f_2(x)e^{\tau x}dx + \int_{-\infty}^{0} f_3(iy)e^{i\tau y}dy = 0.$$

У випадку p=1 доводимо тільки необхідність, а у випадку σ=0 (тоді [8] простір $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ співпадає з простором Харді $H^p(\mathbb{C}_+)$) із теореми 1.2 отримуємо відоме твердження (для p=2 воно належить Р.Пелі і Н.Вінеру [9]) про те, що функція $f_1 \in L^p(\partial\mathbb{C}_+)$ буде кутовою граничною функцією для деякої функції $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ тоді і тільки тоді, коли її обернене перетворення Фур'є дорівнює нулю м. в. на від'ємному промені дійсної осі (воно справедливе, якщо $1 \le p \le 2$).

В ході доведення теореми 1.2 знайдена формула (вона є узагальненням формули Пуасона для півплощини), яка дає можливість знаходити гармонійну в півплощині $\mathbb{C}_+$ функцію, що має експоненціальне зростання і приймає задані значення на $\partial\mathbb{C}_+$.

Теорема 1.6. Рівність

$$g(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} G(w)e^{-zw}dw,\ G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+),\ 0<\sigma<+\infty, \qquad (13)$$

задає топологічне (тобто гомеоморфне) відображення простору $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ на $E^2_*[\mathcal{D}_\sigma]$ і справедлива двоїста формула

$$G(w)=\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{\partial\mathcal{D}_\sigma} g(z)e^{zw}dz,\ w \in \mathbb{C}_+. \qquad (14)$$

Теорема 1.7. Клас $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0<\sigma<+\infty$, співпадає з множиною аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій Φ, які допускають зображення

$$\Phi(w)=\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{\partial\mathcal{D}_\sigma} k(z)e^{zw}dz, \qquad k \in L^2(\partial\mathcal{D}_\sigma).$$

На останню теорему можна дивитись як на узагальнення теореми Р. Пелі і Н. Вінера [9] про інтегральне зображення функцій із простору $H^2(\mathbb{C}_+)$.

Нехай $L^2_\sigma(\mathbb{R})$ - клас цілих функцій експоненціального типу $\sigma_0\le\sigma$, $0<\sigma<+\infty$, квадрат модуля яких є сумовним на дійсній осі, $T^2_\sigma(\mathbb{C}_-)$ - множина всіх точок F виду $F=(F_1,F_2,F_3)$, де $F_2\in L^2_\sigma(\mathbb{R})$, $F_1(z)=f_1(z)e^{i\sigma z}$, $F_3(z)=f_3(z)e^{-i\sigma z}$, $f_1\in H^2(\mathbb{C}_-)$, $f_3\in H^2(\mathbb{C}_-)$, $F_1(z)+F_2(z)+F_3(z)\equiv 0$ для $z\in\mathbb{C}_-$ і $\mathbb{C}_-=\mathbb{C}(\pi/2;3\pi/2)$. Нехай, крім цього, l_1, l_3 і l_2 - сторони $\partial\mathcal{D}_\sigma$ (відповідно півпрямі із нижньої і верхньої півплощин та відрізок уявної осі), орієнтація яких узгоджена з додатним обходом $\partial\mathcal{D}_\sigma$.

Теореми 1.10 - 1.12. Рівності

$$F_j(z)=\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int\limits_{l_j} f(w)e^{-zw}dw,\ f\in E^2[\mathcal{D}_\sigma],\ j=1,2,3, \qquad (15)$$

задають взаємно однозначне відображення простору $E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ на $T^2_\sigma(\mathbb{C}_-)$, справедлива двоїста формула

$$f(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}F_1(iy)e^{iyw}dy+\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)e^{wx}dx-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}F_3(iy)e^{iyw}dy,$$

$w\in\mathcal{D}_\sigma$, і для всіх $\tau\le 0$, $f\in E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ і $g\in E^2_*[\mathcal{D}_\sigma]$ виконується

$$\int\limits_{\partial\mathcal{D}_\sigma} f(w+\tau)g(w)dw = i\int\limits_0^{+\infty}F_1(iy)G(iy)e^{i\tau y}dy - i\int\limits_{-\infty}^{0}F_3(iy)G(iy)e^{i\tau y}dy +$$

$$+\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)G(x)e^{\tau x}\,dx, \qquad (16)$$

де функція G визначена рівністю (14).

Визначене рівністю (15) відображення простору $E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ на

$T^2_\sigma(\mathbb{C}_-)$ називаємо перетворенням Фур"є-Лапласа функцій із $E^2[\mathcal{D}_\sigma]$.

Розділ 2. Нулі функцій, аналітичних в півплощині, і апроксимаційні властивості систем експонент. Нехай (λ_n) - довільна послідовність точок із $\mathbb{C}_+$, $\varphi_n=\arg\lambda_n$ і Λ_+ - клас аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій $f\not\equiv 0$, які мають нулі в усіх точках λ_n (якщо m членів послідовності (λ_n) дорівнюють λ_n, то вважаємо, що в точці λ_n функція f має нуль, кратності $k\geq m$). Нехай, далі,

$$s(t)=\sum_{1<|\lambda_n|\leq t}\cos\varphi_n, \qquad S_0(t)=\sum_{1<|\lambda_n|\leq t}\operatorname{Re}\lambda_n\,|\lambda_n|^{2},$$

$$S(t)=\sum_{1<|\lambda_n|\leq t}\left[\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{t^2}\right]\cos\varphi_n.$$

Теорема 2.1. Для того щоб існувала функція $f\in\Lambda_+$, яка задовольняє умову (7), необхідно і досить, щоб виконувались наступні дві умови

$$\sum_{|\lambda_n|\leq 1}\operatorname{Re}\lambda_n<+\infty, \tag{17}$$

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\left[S(r)-\frac{\sigma}{\pi}\ln r\right]<+\infty. \tag{18}$$

Теорема 2.4. Для того щоб існувала функція $f\in\Lambda_+\cap H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0<p<+\infty$, $0\leq\sigma<+\infty$, необхідно і досить, щоб виконувались умови (17) і (18).

Функцію S в теоремах 2.1 і 2.4 не можна, взагалі кажучи, замінити функцією S_0. Таку заміну можна зробити, якщо $s(t)=O(t)$, $t\to+\infty$. Але останнє ще не випливає із (18). У випадку $\sigma=0$ теореми 2.1 і 2.4 перетворюються в добре відомі твердження про описання послідовностей нулів функцій із просторів Харді $H^p(\mathbb{C}_+)$.

$0<p\le+\infty$. У випадку $\lambda_n>0$, $\lambda_n-\lambda_{n-1}\ge h>0$ (тоді умова (17) зайва і $S(r)=S_0(r)+O(1)$) теорему 2.1 довів В. Фукс [10]. Ж.-П. Кахан [11] зауважив, що теорема В. Фукса залишається справедливою, якщо $\lambda_n>0$ і $n=O(\lambda_n)$, $n\to\infty$.

Теорема 2.5. Нехай (λ_n) - послідовністть різних комплексних чисел із $\mathbb{C}_+$. Тоді для того щоб система (1) не була повною в просторі $E^2[\mathfrak{D}_\sigma]$,$0<\sigma<+\infty$, необхідно і досить, щоб виконувались умови (17) і (18).

Зауважимо, що якщо $\lambda_n\notin\mathbb{C}_+$, то $e^{\lambda_n z}\notin E^2[\mathfrak{D}_\sigma]$. Тому теорема 2.5 описує всі повні системи виду (1) в просторі $E^2[\mathfrak{D}_\sigma]$, а описання повних систем виду (2) міститься в теоремі 2,9. Для її формулювання потрібні деякі позначення.

Нехай $\mathfrak{D}$ - довільна опукла необмежена n-кутна область, $n\in\mathbb{N}$. Простір $E^2[\mathfrak{D}]$ містить принаймні одну функцію виду $F_\lambda(z)=e^{\lambda z}$, $\lambda\in\mathbb{C}$, тоді і тільки тоді, коли виконується наступна умова: 1) $\mathfrak{D}$ лежить в деякому куті, величина якого є меншою за π, тобто коли $\mathfrak{D}$ є відмінною від півплощини і смуги. Межа такої області складається із півпрямих l_1, l_n і, можливо, відрізків $l_2, l_3, \dots l_{n-1}$ (їх нумерація і орієнтація узгоджена з додатнім обходом $\partial\mathfrak{D}$). Через π/β, $1\le\beta\le+\infty$, позначимо величину кута між l_1 і l_n, а у випадку $l_1 \parallel l_n$ через 2σ позначимо відстань між l_1 та l_n. Нехай $1/\alpha + 1/\beta = 1$ (якщо $\beta=+\infty$, то вважаемо, що $\alpha=1$). Візьмемо на l_1 і l_n по одній точці так, щоб відрізок b_0, який їх з"єднує, утворював рівні кути з l_1 і l_n. Позначимо через $\vec{b}$ одиничний вектор, який лежить на серединному перпендикулярі до b_0 і напрямлений в сторону необмеженої частини $\mathfrak{D}$, а через φ_* $0\le\varphi_*<2\pi$, - величину кута між додатнім напрямом дійсної осі і вектором $\vec{b}$,вимірюваного від цієї осі в додатному напрямі. Якщо умова 1) виконується, то $\{e^{\lambda_n z}\} \subset E^2[\mathcal{D}]$ тоді і тільки тоді, коли послідовність (λ_n) задовольняє наступну умову : 2) $|\varphi_n - \pi + \varphi_*| < \pi/2\alpha$. Тому про повноту систем (1) і (2) в просторі $E^2[\mathcal{D}]$ є сенс говорити тільки у випадку виконання умов 1) та 2).

Теорема 2.9. Нехай (λ_n) - послідовність різних комплексних чисел, $\Delta_n = \varphi_n - \pi + \varphi_*$ і виконуються вказані вище умови 1) та 2). Тоді для того щоб система (2) не була повною в $E^2[\mathcal{D}]$, необхідно і досить, щоб у випадку $\beta = +\infty$ (тобто у випадку $l_1 \| l_n$) виконувались наступні дві умови

$$\sum_{|\lambda_n| \le 1} m_n |\lambda_n| \cos\Delta_n < +\infty,$$

$$\overline{\lim_{\tau \to +\infty}} \left[\left(\sum_{1 < |\lambda_n| \le r} m_n \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{\tau^2} \right) \cos\Delta_n \right) - \frac{\sigma}{\pi} \ln \tau \right] < +\infty,$$

а у випадку $1 < \beta < +\infty$, наступні дві умови

$$\sum_{|\lambda_n| \le 1} m_n |\lambda_n|^{\alpha} \cos\alpha\Delta_n < +\infty, \tag{19}$$

$$\sum_{|\lambda_n| > 1} m_n |\lambda_n|^{-\alpha} \cos\alpha\Delta_n < +\infty. \tag{20}$$

Попередні результати дають можливість отримати нові факти про повноту системи

$$\left\{ e^{-t + (\lambda_n - 1/2) \ln t} \right\}, \ n \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

в $L^2(0;+\infty)$. Добре відомо, що система $\{e^{-t}t^n\}$, $n\in\mathbb{N}$, є повною в $L^2(0;+\infty)$. В. Фукс [12] узагальнив це твердження довівши, фактично, що якщо послідовність (λ_n) додатних чисел задовольняє умову $\lambda_n-\lambda_{n-1}\ge h>0$, $n\ge 2$, то для того щоб система (21) не була повною в $L^2(0;+\infty)$, необхідно і достить, щоб

$$\int_1^{+\infty}(\exp(2S(\tau))/\tau^2)d\tau<+\infty. \tag{22}$$

Наступне твердження доповнює цей результат В. Фукса.

Теорема 2.10'. Нехай (λ_n) - послідовність різних комплексних чисел із $\mathbb{C}_+$. Якщо система (21) не є повною в $L^2(0;+\infty)$, то виконуються умови (17) і (18) для $\sigma=\pi/2$. Якщо виконуються умови (17) і (18) для деякого $\sigma<\pi/2$, то система (21) не є повною в $L^2(0;+\infty)$.

На основі теорем 1.6 та 1.10-1.12 в теоремі 2.12 показуємо, що якщо система (2) не є повною в $E^2[\mathcal{D}_\sigma]$, то кожна функція $f\in E^2[\mathcal{D}_\sigma]$, яка належить замиканню лінійної оболонки системи (2), є розв'язком деякого рівняння (8), в якому $g\neq 0$, проте відмічаємо, що не кожний розв'язок із $E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ такого рівняння належить, взагалі кажучи, замиканню лінійної оболонки його розв'язків виду (2). Вказуємо (теорема 2.15) також достатні умови для того, щоб рівняння (8) мало ненульовий розв'язок $f\in E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ і доводимо (теорема 2.14), що рівняння (8) має ненульовий розв'язок $f\in E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ тоді і тільки тоді, коли сім'я функцій $\{G(z)e^{z\tau}\}$, $\tau\le 0$, де G визначена рівністю (14), не є повною в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

Теорема 2.17. Для того щоб функція $f\in E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ була розв'язком рівняння (8) достатньо, щоб функції $\Phi_1(iy)$ і $\Phi_3(iy)$, $y \in \mathbb{R}$, були відповідно кутовими граничними функціями таких аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій P_1 і P_3, що $P_1 \in E_0^1[\mathbb{C}(0;\pi/2)]$, $P_1(z)e^{-2i\sigma z} \in E_0^1[\mathbb{C}(-\pi/2;0)]$, $P_3 \in E_0^1[\mathbb{C}(-\pi/2;0)]$, $P_3(z)e^{2i\sigma z} \in E_0^1[\mathbb{C}(0;\pi/2)]$ і $P_1(z)+P_3(z)+\Phi_2(z)\equiv 0$ для $z \in \mathbb{C}_+$, де $\Phi_j=F_jG$, $F=(F_1,F_2,F_3)$ - перетворення Фур'є - Лапласа функції f і функція G визначена рівністю (14).

Якщо б теорему 1.2 вдалось довести і у випадку p=1, то тоді можна було б стверджувати, що умови теореми 2.17 є також необхідними і ця теорема була б хорошою основою для подальшого аналізу рівняння (8).

Далі в теоремах 2.18 і 2.19 показуємо, що якщо (λ_n) - послідовність різних комплексних чисел із $\mathbb{C}_+$, система (1) не є повною в $E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ і послідовність (9) збігається в $E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ до F, то існують скінченні границі $\lim\limits_{n\to\infty} d_{k,n}=d_k$, $k \in \mathbb{N}$, і $F \equiv 0$ тоді і тільки тоді, коли всі $d_k=0$. На основі цього отримуємо наступне твердження.

Теорема 2.20. Нехай (λ_n) - послідовність різних комплексних чисел із $\mathbb{C}_+$, $0<\sigma<+\infty$, $\mathcal{D}_\sigma(\tau)=\{z: |\mathrm{Im}\, z|<\sigma,\ \mathrm{Re} z<\tau\}$, $\mathcal{D}_\sigma^0=\{z: |\mathrm{Im}\ z|<\sigma\}$. Якщо виконуються умови (17) і (18), а послідовність (9) збігається в $E^2[\mathcal{D}_\sigma(\tau)]$ для будь-якого $\tau \in \mathbb{R}$ до функції F, обмеженої в $\mathcal{D}_\sigma^0$, то $F\equiv 0$.

Ми відзначаємо також, що якщо принаймні одна із умов (17) і (18) не виконується, то можна побудувати послідовність (9), яка збігається в $E^2[\mathcal{D}_\sigma(\tau)]$ для будь-якого $\tau \in \mathbb{R}$ до функції $F\not\equiv 0$, обмеженої в $\mathcal{D}_\sigma^0$. На теорему 2.20 можна дивитись як на узагальнення добре відомого результату Л. Шварца [13]: якщо

$0<\lambda_n\uparrow+\infty$ і $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n<+\infty$, то сума збіжного в $\mathbb{C}$ ряду Діріхле (10) може бути обмеженою на дійсній осі тільки у випадку $F\equiv 0$. Вкажемо також на близькі результати Дж.Андерсона (1968 р.) і В.Мартиросяна (1989 р.). В теоремі 2.22, яка з однієї сторони доповнює інший відомий результат Л.Шварца, а з іншої - узагальнює деякі результати А.Леонтьєва, В.Сороківського, А.Гольдберга і Й.Островського та О.Шаповаловського, які стосуються оцінок індикаторів рядів Діріхле (10), вказуємо умови, при яких для абсолютно збіжного на дійсній осі ряду (10) із оцінки $|F(x)|\le\gamma(x)$, $x\ge x_0$, випливає, що $\sum_{n=1}^{\infty} |d_n\exp(\lambda_n x)| \le \gamma((1+o(1))x)$, $x\to+\infty$, де γ - неспадна додатна функція на $(-\infty;+\infty)$.

Розділ 3. Спеціальні властивості цілих функцій. В § 3.1 наведені необхідні для наступних розділів відомості про максимум модуля, максимальний член, мажоранту Ньютона цілої функції f і встановлено ряд співвідношень між зростанням $M_f(r)=\max\{|f(z)|: |z|=r\}$ і поведінкою її тейлоровських коефіцієнтів f_n. Нагадаємо, що якщо $\hat{f}$ - мажоранта Ньютона цілої функції f, то $|f_n|\le\hat{f}_n$, $\varkappa_n(\hat{f})\nearrow+\infty$ і якщо $0<\varkappa_n(f)\nearrow+\infty$, то $|f_n|=\hat{f}_n$ для всіх $n\ge 0$, де $\varkappa_n(f)=|f_{n-1}/f_n|$. Нехай f і g - цілі функції,

$$q_f^g=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\ \frac{\alpha_f^{-1}(\ln^+ M_g(r))}{r}, \quad \eta_f^g=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ |g_n/f_n|^{1/n},$$

де α_f^{-1}- функція, обернена до функції $\alpha_f(r)=\ln M_f(r)$. Число q_f^g, яке називають f - типом цілої функції g, можна також визначити як точну нижню межу тих чисел q, для яких при $r\ge r_0(q)$ виконується $M_g(r) \le M_f(qr)$. Л.Нахбін показав, що якщо $f_n>0$ і $\varkappa_n(f)\nearrow+\infty$, то для будь-якої цілої функції g виконується $q_f^g=\eta_f^g$ (див.[14]). Ми з"ясовуємо істотність умов цього твердження.

Теорема 3.1. Нехай ціла функція f задовольняє умову (11), (δ_n) - обмежена послідовність дійсних чисел і f^*- ціла функ - ція з тейлоровськими коефіцієнтами $f^*_n=|f_n|\exp(n\delta_n)$. Для того щоб для кожної цілої функції g виконувалась рівність $q^g_f=\eta^g_f$, не обхідно і досить, щоб для деякої збіжної до нуля послідовності (δ_n) послідовність $(\varkappa_n(f^*))$ була неспадною:

$$0<\varkappa_1(f^*)\le\varkappa_2(f^*)\le\ldots . \qquad (23)$$

Для того щоб умови $\eta^g_f=0$, $0<\eta^g_f<+\infty$, $\eta^g_f=+\infty$ були еквівалентними відповідно умовам $q^g_f=0$, $0<q^g_f<+\infty$, $q^g_f=+\infty$, необхідно і досить, щоб умова (23) виконувалась для деякої обмеженої послідовності (δ_n).

Зазначимо, що (23) виконується для деякої обмеженої (збіжної до нуля) послідовності (δ_n) тоді і тільки тоді, коли для деякої обмеженої (збіжної до нуля) послідовності (δ_n) функція f^* буде мажорантою Ньютона функції f.

Нехай $m_g(r)=\min\{|g(z)|: |z|=r\}$, $n_\lambda(t)=\sum\limits_{|\lambda_n|\le t} 1$,

$$N_\lambda(r)=\int_0^r \frac{n_\lambda(t)-n_\lambda(0)}{t}\,dt+n_\lambda(0)\ln r .$$

Послідовність (x_n) додатних чисел називаємо майже спадною, якщо $(\forall\alpha>1)\ (\exists k_0\in\mathbb{N})\ (\forall k\ge k_0)(\forall n\ge k)$: $x_n\le\alpha x_k$. Цілу функцію L називаємо цілою функцією М-регулярного зростання, якщо знайдеться така множина $E_0\subset[0;+\infty)$ нульової відносної міри, що при $r\to+\infty$ і $r\notin E_0$, рівномірно по $\varphi\in[0;2\pi]$ виконується $|L(re^{i\varphi})|=M_L((1+o(1))r)$. В § 3.2 встановлено ряд нових співвідношень між $N_\lambda(r)$, $m_L(r)$ та $M_L(r)$ для цілих функцій виду

$$L(z)=(\lambda_1-z)\prod_{n=2}^{\infty}(1-z/\lambda_n), \tag{24}$$

які мають порядок зростання $\rho_1<1$, а також доведена наступна теорема, яка стикається з деякими результатами А. Гольдберга і Й. Островського (1973р.), А. Гольдберга і М. Заболоцького (1983р.) та інших (див. [7]), але має трохи інший характер.

Теорема 3.3. Якщо для кожного $\rho>0$ послідовність $(n/|\lambda_n|^{\rho})$ є майже спадною, то ціла функція (24) є цілою функцією М-регулярного зростання. Якщо $\arg\lambda_n=\mathrm{const}$, то для того щоб ціла функція виду (24) була функцією М-регулярного зростання, необхідно і досить, щоб для кожного $\rho>0$ послідовність $(n/|\lambda_n|^{\rho})$ була майже спадною.

Зазначимо, що існують цілі функції М-регулярного зростання нульового порядку, для яких послідовність $(n/|\lambda_n^{\rho}|)$ не є майже спадною для кожного $\rho>0$. Звернемо також увагу на розміщення виразу $1+o(1)$ в означенні М-регулярного зростання та в наступному твердженні.

Теорема 3.7. Для будь-якої цілої трансцендентної функції f існує ціла функція L така, що : а) L має нескінченну множину нулів $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ і всі її нулі прості; б) $M_L(r)=M_f((1+o(1)r)$, $r\to+\infty$; в) L є функцією М-регулярного зростання; г) $|\lambda_n| = =(1+o(1))\varkappa_n(\hat{f})$, $n\to\infty$; д) $|\lambda_n L'(\lambda_n)| = M_L((1+o(1))|\lambda_n|)$, $n\to\infty$; е) множина $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ лежить поза наперед заданою множиною $E_{0,1}\subset[0;+\infty)$ нульової відносної міри.

При доведенні теореми 4.16 ми будуємо сім"ю цілих функцій $L=L_{F,R}$, які залежать від числа $R\in(0;+\infty]$ і функції $F\in A_R$, але нам не вдалось знайти змістовне відірване від теореми 4.16 формулювання відповідного результату. Теорема 3.7 відповідає випадку $R=1$ і F деяка функція із A_1. Зауважимо, що нас не задовольняють співвідношення виду $\ln M_L(r)=(1+o(1))\ln M_f(r)$ або $\ln M_L(r)=\ln M_f(r)+O(\ln r)$ при $r\to\infty$.

Розділ 4. Абсолютно зображувальні системи. Слідом за Ю. Коробейніком назвемо систему (3) абсолютно зображувальною в просторі A_R, якщо кожну функцію $F\in A_R$ можна розкласти в ряд (не обов"язково єдиним чином)

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z), \tag{25}$$

регулярно збіжний в крузі $\mathcal{K}_R$, тобто такий, що $\sum_{n=1}^{\infty}|d_n|M_f(r|\lambda_n|)<+\infty$ при $r\in[0;R)$. Нехай $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ - множина (різних) комплексних чисел таких, що $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$ і f-ціла трансцендентна функція. Скажемо, що $f\in\pi_R$ ($f\in P_R$, $f\in B_R$), якщо існує множина $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ така, що система (3) буде повною (абсолютно зображувальною, базисом) в просторі A_R. Нехай $f\in\pi_R$ ($f\in P_R$, $f\in B_R$). Скажемо, що $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\in\Lambda_f[\pi_R]$ ($(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\in\Lambda_f[P_R]$, $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\in\Lambda_f[B_R]$), якщо система (3) є повною (абсолютно зображувальною, базисом) в A_R. Для кожного $R\in(0;+\infty]$ маємо $\pi_R\supset P_R\supset B_R$. Далі, нехай $A'_R[f]$ і $A^{\circ}_R[f]$ - множини цілих функцій g, для яких відповідно виконується $\varlimsup\limits_{n\to\infty}|g_n/f_n|^{1/n}<R$, $(\exists R_0=R_0(g)\in(0;R))(\exists r_0=r_0(g)<+\infty)(\forall r\geq r_0)$: $M_g(r)\leq M_f(R_0 r)$. Легко встановити, що для кожного $R\in(0;+\infty]$ клас π_R складається із цілих функцій f, які задавольняють умову (11).

Теорема 4.9. Для того щоб $f\in P_\infty$ ($f\in P_R$, $0<R<+\infty$) необхідно і досить, щоб f задовольняла умову (11) і для деякої обмеженої (збіжної до 0) послідовності (δ_n) виконувалась умова (23).

Із цієї теореми 4.9 випливає, що класи π_R і P_R не співпадають.

Теорема 4.13. Нехай $f\in P_R$, $0<R\le+\infty$. Тоді для того щоб $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\in\Lambda_f[P_R]$, необхідно і досить, щоб

$$(\forall R_1\in(0;R))\ (\exists R_0\in(0;r))\ (\exists c_0\in(0;+\infty))\ (\forall g\in A_R{}^{\circ}[f]):$$

$$\sup_{r\ge 0}\left\{\frac{M_g(r)}{M_f(R_0 r)}\right\}\le c_0\sup_{n\ge 1}\left\{\frac{|g(\lambda_n)|}{M_f(R_1|\lambda_n|)}\right\}.$$

У випадку, коли f задовольняє додаткову умову (12), теорема 4.13 доведена Ю.Коробейніком (див.[3]). Доведення теорем 4.9 і 4.13 спираються на деякі загальні результати Ю.Коробейніка [3]. Зазначимо, що Ю.Коробейнік [15] пізніше показав, використовуючи деякі свої інші результати та нашу теорему 3.1, що теорема 4.9 залишається в силі, якщо під $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ розуміти довільну зліченну множину $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$ (не обов"язково вимагати, щоб $\lambda_n\to\infty$ при $n\to\infty$).

Якщо $f\notin A_R$, $0<R\le+\infty$, то не кожну функцію $F\in A_R$ можна розкласти в ряд (25), регулярно збіжний в крузі $\mathcal{K}_R$. Але деякі функції $F\in A_R$ можуть бути розкладені і в цьому випадку.

Теорема 4.14. Нехай f - довільна ціла функція, яка задовольняє умову (11). Тоді існує множина $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ така, що кожну функцію $F\in A'_{\infty}[f]$ можна розкласти в регулярно збіжний в усій площині ряд (25).

Відзначимо також наступне твердження, яке лежить в основі доведень теорем 4.14,4.16,4.17 та 5.1 - 5.3 і яке, як нам здається, є новим і для рядів Діріхле.

Теорема 4.15 Нехай f і L - довільні цілі функції, причому f задовольняє умову (11), а L має нескінченну множину нулів $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ і всі її нулі прості. Тоді для того щоб кожну функцію

$F\in A'_{\infty}[f]$ можна було розкласти в регулярно збіжний в крузі $\mathcal{K}_{R_1}$, $0<R_1\le+\infty$, ряд (25), в якому

$$d_n=\frac{\omega_L(\lambda_n;F)}{L'(\lambda_n)}, \tag{26}$$

де $l_n(z)=L(z)/(z-\lambda_n)$, $l_{k,n}=l_n^{(k)}(0)/k!$ і

$$\omega_L(\lambda_n,F)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_k}{f_k}l_{k,n}, \tag{27}$$

необхідно і досить, щоб виконувались наступні дві умови:

1) для всіх $\lambda\in\mathbb{C}$ і $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ виконується

$$\lambda^n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^n L(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)L'(\lambda_k)};$$

2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}M_f(r|\lambda_n|/|\lambda_n L'(\lambda_n)|<+\infty,\quad r\in[0;R_1)$.

Звернемо увагу на те, що в теоремі 4.15 нема жодних попередніх обмежень на зростання L. Роблячи такі обмеження і зауваживши, що $z^k\in A'_{\infty}[f]$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, на основі теореми 4.15 можна отримувати розклади в ряди виду (25) і інших класів аналітичних функцій (в тому числі і в областях, відмінних від круга).

Теореми 4.9 і 4.13 описують абсолютно зображувальні системи виду (3) в просторі A_R. Проте вони не вказують методу знаходження коефіцієнтів d_n ряду (25). Наступні дві теореми до деякої міри заповнюють цю прогалину.

Теорема 4.16. Нехай виконуються умови (11) і (23) для деякої збіжної до нуля послідовності (δ_n). Тоді для кожного R, $0<R\le+\infty$, і кожної функції $F\in A_R$ існує ціла функція L, яка має

нескінченну множину нулів $\lambda_{F,R}=(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, всі її нулі прості і F розкладається в регулярно збіжний в крузі $\mathcal{K}_R$ ряд (25)$_1$, коефіцієнти d_n, якого знаходяться за формулою (26); при цьому підбір функції L можна здійснювати так, щоб множина

$$(\mu_n)_{n=1}^{\infty} = \bigcup_{R\in(0;+\infty)} \bigcup_{F\in A_R} \lambda_{F,R}$$

мала єдину граничну точку на ∞ і множина $(|\mu_n|)_{n=1}^{\infty}$ лежала поза заданою множиною $E_0\subset[0,+\infty)$ нульової відносної міри.

Теорема 4.17. Нехай виконуються умови (11) і (23) для деякої обмеженої послідовності (δ_n). Тоді для кожної функції $F\in A_{\infty}$ існує ціла функція L, яка має нескінченну множину нулів $\lambda_{F,\infty}=(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, всі її нулі прості і F розкладається в регулярно збіжний в усій площині ряд (25), коефіцієнтиц d_n якого знаходятЬся за формулою (26); при цьому підбір функції L можна здійснювати так, щоб множина $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}= \bigcup_{F\in A_{\infty}} \lambda_{F,\infty}$ мала єдину граничну точку на ∞ і множина $(|\mu_n|)_{n=1}^{\infty}$ лежала поза заданою множиною $E_0\subset[0;+\infty)$ нульової відносної міри.

В теоремах 4.16 і 4.17 при фіксованих f і R ціла функція L залежить, взагалі кажучи, від функції $F\in A_R$. В той же час, для кожного підкласу $T_{B,R}$ функцій F із A_R, для яких $|F_n|\le c_1|B_n|, n\ge0$, де B - довільна фіксована функція із A_R, можна підібрати універсальну функцію L. В деяких випадках (зокрема, у випадку $f\in B_R$) можна вказати функцію L, спільну для всіх функцій $F\in A_R$. Проте ми показуємо, що якщо $\lim\limits_{r\to+\infty} \ln M_f(r)/\ln^2 r=+\infty$, то в теоремі 4.16 функції L, спільної для всіх функцій $F\in A_R$, вказати не можна.

При додатковій умові (12) теореми, близькі до теорем 4.16 і 4.17, раніше доводились в роботах А. Леонтьєва, В. Мусояна, Ю. Мельника та інших (див. [2-4]).

Розділ 5. Описання базисів. На перший погляд системі (1) бути базисом в просторі A_R заважає тільки неперервність в A_R оператора диференціювання. Для системи (3) аналогічну роль відіграє оператор узагальненого диференціювання $\mathcal{D}_f$ в сенсі Гельфонда-Леонтьєва, який породжений функцією f. Якщо всі $f_n \neq 0$, то цей оператор не є неперервним оператором із A_∞ в A_∞ (із A_R, $0<R<+\infty$, в A_R) тоді і тільки тоді, коли

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\varkappa_n(f)} = \infty \quad \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\varkappa_n(f)} > 1 \right). \tag{28}$$

Тому можна було б припустити, що якщо $F \in P_R$ і виконується (28), то $F \in B_R$. Проте це не так, на що вказують наступні теореми 5.1 - 5.3, які описують всі базиси виду (3) в просторі A_R.

Теорема 5.1. Для того щоб $f \in B_R$, $0<R<+\infty$, необхідно і досить, щоб $f \in P_R$ і

$$(\exists \sigma>1)(\exists \sigma_1>1)(\forall k\geq 1)(\forall n\geq k): \quad \frac{\varkappa_k(f)}{\varkappa_n(f)} \leq \frac{\sigma_1^k}{\sigma^n}. \tag{29}$$

Теорема 5.2. Для того щоб $f \in B_\infty$, необхідно і досить, щоб $f \in P_\infty$ і

$$(\forall \sigma>1)(\exists \sigma_1>1)(\forall k\geq 1)(\forall n\geq k): \quad \frac{\varkappa_k(f)}{\varkappa_n(f)} \leq \frac{\sigma_1^k}{\sigma^n}. \tag{30}$$

Звернемо увагу на те, що умови, які описують клас P_R, є умовами на правильність, але не на швидкість, спадання $|f_n|$. Умови (29) і (30) обмежують також зростання $M_f(r)$. Можна сказати, що клас B_∞ (B_R, $0<R<+\infty$) складається із тих цілих функцій f, які задовольняють умову

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\ln^2 r} = 0 \qquad \left(\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\ln^2 r} < +\infty \right) \tag{31}$$

і тейлоровські коефіцієнти яких у відомому розумінні правильно прямують до нуля.

Теорема 5.3. Нехай $f \in B_R$, $0 < R \le +\infty$. Тоді для того щоб $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in \Lambda_f[B_R]$, необхідно і досить, щоб

$(\forall \rho_* \in (0;R))(\exists R_* \in (0;R))(\exists c_0 \in (0;+\infty))(\forall k \ge 1)(\forall n \ge k)$:

$$\prod_{m=k}^{n} |\lambda_m / \varkappa_m(\hat{f})| \le c_0 \; R_*^k / \rho_*^n ; \tag{32}$$

$(\forall \bar{\rho} \in (0;R))(\exists \bar{R} \in (0;R))(\exists c_1 \in (0;+\infty))(\forall k > 1)(\forall n \ge k)$:

$$\prod_{m=k}^{n} \varkappa_{m-1}(\hat{f}) / |\lambda_m| \le c_1 \; \bar{R}^n / \bar{\rho}^k ; \tag{33}$$

ціла функція (24) задовольняла умовам

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0): \; |\lambda_n L'(\lambda_n)| \ge M_L(|\lambda_n|/(1+\varepsilon)), \tag{34}$$

$$\ln M_L(r) = N_\lambda((1+o(1))r), \; r \to +\infty, \tag{35}$$

якщо $R < +\infty$, і задовольняла умову

$$(\exists R_0 > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \ge n_0): |\lambda_n L'(\lambda_n)| \ge M_L(R_0 |\lambda_n|), \tag{36}$$

якщо $R = +\infty$.

Доведення теорем 5.1-5.3 спираються на результати попередніх двох розділів і використовують також деякі результати М. Драгілєва 1958-1961 років.

Умову (35) в теоремі 5.3 можна замінити наступною умовою : функція (24) є цілою функцією М-регулярного зростання. У випадку $\arg \lambda_n \equiv \text{const}$, умову (35) в теоремі 5.3 можна опустити. Нам не відомо, чи так само можна поступити і в загальному випадку. Умови (28), (31), а також наступні умови

$$(\exists \sigma > 1)(\exists \sigma_1 > 1)(\forall k > 1)(\forall n \ge k): \; |\lambda_k / \lambda_n| \le \sigma_1^k / \sigma^n,$$

$$(\exists\, p \in \mathbb{N})(\exists\, n_o \in \mathbb{N})(\forall\, n \geq n_o): \varkappa_{[n/p]}(f) < |\lambda_n| < \varkappa_{pn}(f),$$

де $[x]$ - ціла частина числа $x \geq 0$, є необхідними для того, щоб система (3) утворювала базис в просторі A_R, $0<R\leq+\infty$.

Теорема 5.6. Нехай виконується умова (11),

$$\Delta := \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\varkappa_n(f)}{\varkappa_{n+1}(f)} < 1$$

і (λ_n) - послідовність різних комплексних чисел таких, що

$$\Delta < \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|\lambda_n|}{\varkappa_n(f)} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|\lambda_n|}{\varkappa_n(f)} \leq 1 .$$

Тоді система (3) утворює базис в A_1.

Теорема 5.7. Нехай виконується умова (11), $\Delta=0$ і (λ_n) - послідовність різних комплексних чисел таких, що

$$0 < \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|\lambda_n|}{\varkappa_{n-1}(f)} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|\lambda_n|}{\varkappa_{n-1}(f)} < +\infty.$$

Тоді система (3) утворює базис в A_∞.

Теореми 5.1 і 5.2 показують, що система (3) може утворювати базис в A_R тільки при досить сильних обмеженнях, накладених на функцію f. В теоремі 5.17 показуємо, що система $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, де

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r_n^*} \frac{f(tz)dt}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}(t-\lambda_k)}\, dt, \qquad r_n^* > |\lambda_{n+1}|,$$

елементи якої є скінченними лінійними комбінаціями елементів системи (3), для деяких множин $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ може утворювати базис в A_R, $0<R\leq+\infty$, якщо $f\in P_R$. На основі результатів останніх трьох розділів в теоремах 5.11 і 4.19 отримуємо також деякі узагальнення і уточнення результатів Сан Хуана [17], які стосуються нескінченних систем лінійних рівнянь виду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \lambda_n^k = b_k$, $k\in\mathbb{Z}_+$.

Основні положення, які виносяться на захист

1. Опис послідовностей нулів і кутових граничних значень функцій із вагових просторів Харді в півплощині з вагою показникового вигляду.

2. Критерій повноти систем експонент в просторі $E^2[D_\sigma]$.

3. Критерій базисності системи $\{f(\lambda_n z)\}$ в просторі A_R.

4. Опис абсолютно зображувальних систем $\{f(\lambda_n z)\}$ в просторі A_R.

Висновки

В дисертаціі вперше розв"язано декілька актуальних задач, які залишались відкритими. Зокрема, описано: а) послідовності нулів і кутові граничні значення функцій із простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$; б) всі повні системи експонент в просторі $E^2[D_\sigma]$; в) всі базиси вигляду $\{f(\lambda_n z)\}$ в просторі A_R. При додатковій умові $\lambda_n \to \infty$ описано всі абсолютно зображувальні системи $\{f(\lambda_n z)\}$ в просторі A_R. Встановлено також нові співвідношення для цілих функцій і на основі них для кожноі допустимоі функціі f побудовано ефективні розклади функцій із A_R в ряди за системою $\{f(\lambda_n z)\}$. Отриманий при цьому повний опис послідовностей нулів аналітичних в півплощині функцій, які мають там експоненціальний тип, можна розглядати як розв"язок класичноі задачі. Результати роботи мають застосування при дослідженні рівнянь типу згортки, нескінченних систем лінійних рівнянь, крайових задач для рівняння Лапласа в півплощині та інших проблем.

Цитована література

1. Джрбашян М.М. Мартиросян В.М. Теоремы типа Винера-Пели и Мюнца-Саса// Изв.АН СССР,сер. матем.-1974.-41, N4.-С. 868-894.

2. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. -М.:Наука, 1976. -536 с.

3. Коробейник Ю.Ф. Представляющие системы// Успехи мат. наук. -1981. -36, вып. 1(217). -С. 73-126.

4. Леонтьев А.Ф. Обобщения рядов экспонент. -М.Наука, 1981. -320 с.

5. Казьмин Ю.А. Об одной задаче А.О. Гельфонда// Матем. сб. -1973. -132, N4. -С. 520-543.

6. Коробейник Ю.Ф. Об одной двойственной задаче, II. Приложение к LN^* - пространствам и другие вопросы// Матем. сб. -1975. -140, N1. -С. 3-26.

7. Гольдберг А.А., Левин Б.Я., Островский И.В. Целые и мероморфные функции// Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1991 -ВИНИТИ. Т.85.-С.5-185.

8. Седлецкий А.М. Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения// Матем. сб. -1975. -96 -N1. -С.75-82.

9. Винер Н., Пели, Р. Преобразования Фурье в комплексной области. -М.:Наука. 1964. -268 с.

10. Fuchs W.H.J. A generalization of Carlson's theorem // J. London Math. Soc. -1946. -21. -P.106-110.

11. Kahane J.-P. Extention du theoreme de Carlson et applications. // C. R. Acad. Sci. 1952. -234, № 21. -P.2038-2040.

12. Fuchs W.H.J. On the closure of $\{e^{-t} t^{a_\nu}\}$ // Proc.

Combridge Phill. Soc. -1946. -18, № 2. -P.91-105.

13. Schwartz L. Etude des sommes d'exponentielles reeles. -Paris: Herman, 1943. -207p.

14. Boas R.P. Buck R.C. Polynomial expantions of analytic functions. -Berlin: Springer, 1958. -325p.

15. Коробейник Ю.Ф. Абсолютно представляющие системы и реализации сопряженого пространства// Изв. вузов. Матем. 1990. -N2. -С. 68-76.

16. Гришин А.Ф. Субгармонические функции конечного порядка. Автореферат дисс. ...докт. физ.-мат. наук.-Харьков -1992.-30 с.

17. San Juan. Resolution d'un systeme infiniti d'equation lineries // C.r. Acad. Sci. -1953. -239, № 19. -P.1841-1843.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах.

18. Винницкий Б.В О росте целых функций, заданных рядами Дирихле //Докл.АН УССР, сер.А. - 1975. - №9, С. 771-774.

19. Винницкий Б.В. К вопросу о представлении аналитических функций рядами //Докл. АН УССР, сер.А. -1978, №9. -С.583-585.

20. Винницкий Б.В. О представлении функций рядами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$ //Укр. мат. журн. - 1979. - 31, №3. - С. 256-265.

21. Винницький Б.В. Про зображення цілих функцій рядами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$ // Вісник Львівського ун-ту, Матем аналіз. - 1979. - Вип. 14. - С.31-33.

22. Винницкий Б.В. О представлении аналитических функций рядами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$ //Укр.мат.журн.- 1979.- 31. №6.- С.650 - 657.

23. Винницкий Б.В. О росте целых функций, представленных рядами $\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$ //Укр. мат. журн. - 1979. - 31. №5. - С.537 - 540.

24. Винницкий Б.В. О представлении целых функций рядами $\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$ //Матем. заметки. - 1980. - 27. №2. - С.361-372.

25. Винницкий Б.В. О рядах по системе $\{f(\lambda_n z)\}$ //Матем. заметки. - 1981. - 29. №2. - С.503-516.

26. Винницкий Б.В. Об условиях сходимости последовательностей в некоторых пространствах аналитических функций // Укр. мат. журн. - 1982. - 34, №6. - С. 741-744.

27. Винницкий Б.В. О полноте системы $\{f(\lambda_n z)\}$ // Укр. мат. журн. - 1984. - 36. №5. - С.655-658.

28. Винницкий Б.В. Об описании некоторых абсолютно представляющих систем // Укр. мат. журн. - 1986. - 38, №1. - С.93-95.

29. Винницкий Б.В. О построении целой функции произвольного порядка с заданными асимптотическими свойствами // Укр. мат. журн. - 1986. - 38, №2. - С.143-148.

30. Винницкий Б.В. Об описании базисов из обобщенных систем экспонент // Матем. сборн. - 1988 - №1. - С. 59-79.

31. Винницкий Б.В. Об эффективном разложении аналитических функций в ряды по обобщенным системам экспонент // Укр. мат. журн. - 1989. - 41, №3. - С.302-307.

32. Винницкий Б.В. Об эквивалентности некоторых условий для целых функций нулевого порядка // Изв. вузов. Математика. - 1991. -№2. - С.193-196.

33. Винницкий Б.В. О нулях функций, аналитических в полуплоскости и полноте систем экспонент // Укр. мат. журн. - 1994. - 46, №5. - С.484-500.

34. Винницький Б.В. Про узагальнення теореми Пелі-Вінера // Матем. студії. - 1995. - Вип.4. - С.37-44.

35. Винницький Б.В. Рівняння згортки і кутові граничні значення аналітичних функцій // Доп.НАН України. - 1995. - Сер.А. - №10. - С.26-27.

36. Винницкий Б.В., Шаповаловский А.В. О поведении на действительной оси целых функций, представленных рядами Дирихле с комплексными показателями //Укр. мат. журн. - 1990. - 42, № 7. - С.882-888.

37. B.V.Vinnitsky, A.V.Shapovalovsky.On the Growth of Dirichlet Series on the Real axis //J.Analysis.- 1995.-3.- P.165--177.

Винницкий Б.В. Системы экспонент и их обобщения в пространствах аналитических функций.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 - математический анализ, Львовский государственный университет, Львов, 1996.

Описаны полные системы экспонент в одном пространстве функций, аналитических в выпуклом неограниченном многоугольнике, базисы и абсолютно представляющие системы вида $\{f(\lambda_n z)\}$ в пространстве A_R функций, аналитических в круге, последовательности нулей и угловые граничные значения функций из некоторых весовых пространств Харди в полуплоскости. Изучены также определенные свойства целых функций и некоторых уравнений свертки.

Vinnitsky B.V. Exponential systems and their generalizations in spaces of analytic functions.

The thesis for obtaining the Doctor of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.01 - mathematical analysis, Lviv State University, Lviv, 1996.

The complete exponential systems in one space of functions analytic in a convex unbounded polygon, the bases and absolutely representing systems of form $\{f(\lambda_n z)\}$ in the space A_R of functions analytic in a circle, the sequencees of zeros and the angle boundary values of functions from some weight Hardy classes in a half-plane are described. Certain properties of entire functions and convolution equations are also studied.

Ключові слова: аналітичні функції, цілі функції, нулі, кутові граничні значення, базиси, абсолютно зображувальні системи, вагові простори Харді, системи експонент, повні системи.

ПIдписано до друку 26.02.96. Формат 60х84/I6. ПапIр друк.№I.
Друк.офсетн. Умовн.друк.арк.2,I. Умовн.фарб.вIдб.2,1.
Обл.вид.арк.2,2. Тираж IOO. Зам. 40.
Машинно-офсетна лабораторIя ЛьвIвського держунIверситету
Iм. I.Франка. 290602 ЛьвIв, вул. УнIверситетська,I.