Чернівецький державний університет
ім. Ю.Федьковича

На правах рукопису

ЛІТОВЧЕНКО
Владислав Антонович

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ В ПРОСТОРАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ ТИПУ РОЗПОДІЛІВ

(01.01.02 - диференціальні рівняння)

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Чернівці 1996

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі математичного моделювання Чернівецького державного університету ім. Ю. Федьковича

Науковий керівник - доктор фіз.- мат.наук, доцент Городецький В.В.

Офіційні опоненти - доктор фіз.- мат.наук, професор Щербина В.О.
- доктор фіз.- мат.наук, професор Слюсарчук В.Ю.

Провідна організація - Київський національний університет ім. Т. Шевченка

Захист відбудеться "29" березня 1996 р. о 12^{00} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 07.01.04 в Чернівецькому державному університеті за адресою: 274012, Чернівці-12, вул.Університетська, 28, математичний факультет

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці ЧДУ за адресою вул. Лесі Українки, 23

Автореферат розіслано " 26 " лютого 1996 р

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради А.М.Сєдов'як

AB-57.155

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У теорії задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь на теперішній час добре відомі результати про побудову, оцінки та асимптотичну поведінку при $|x| \to +\infty$ фундаментальних розв'язків задачі Коші, за допомогою яких одержано зображення розв'язків у вигляді інтеграла Пуассона в класі обмежених неперервних функцій, теореми про поведінку розв'язків при необмеженому зростанні часової змінної (стабілізація розв'язків) та їх невід'ємність. Ці результати є науковим надбанням ряду вітчизняних та зарубіжних математиків, зокрема Nagase M., Shinkai R., Tsutsumi C., Ейдельмана С.Д., Дріня Я.М., Федорюка М.В., Кочубея А.М. та ін. Значно менше вивчено задачу Коші для вказаних рівнянь у випадку, коли початкові умови є узагальненими функціями. Залишаються актуальними такі питання:

1) встановлення коректної розв'язності задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами у випадку, коли початкові умови є узагальненими функціями типу розподілів;

2) дослідження граничних властивостей розв'язків при наближенні до гіперплощини $t=0$ (тобто, встановлення існування у них, взагалі кажучи, узагальнених границь при $t\to+0$ і знаходження множин початкових значень) та відшукання формул, що зображують гладкі розв'язки через початкові значення;

3) дослідження поведінки розв'язків задачі Коші при $t\to+\infty$ у просторах узагальнених функцій типу розподілів (слабка стабілізація розв'язків).

Мета роботи. Метою дисертаційної роботи є:

1) знаходження загального вигляду всіх нескінченно диференційовних по x у шарі $\Omega:=(0,T]\times\mathbb{R}^n$ розв'язків параболічних псевдодиференціальних рівнянь поліноміального вигляду з операторами, які діють у просторах узагальнених періодичних функцій;

2) доведення коректної розв'язності задачі Коші для таких рівнянь з початковими даними, які є узагальненими періодичними функціями; встановлення властивості локалізації розв'язків задачі Коші для вказаних рівнянь, яка полягає в тому, що якщо початкова умова - узагальнена функція f - в деякій області $Q \subset \mathbb{R}^n$ збігаєть-

ся з неперервною функією g, то розв'язок $u(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, відповідної задачі Коші збігається до g при $t\to+0$ рівномірно на довільному компакті $K\subset\Omega$;

3) описання топологічної структури простору Φ, елементами якого є нескінченно диференційовні на $\mathbb{R}^n$ функції поліноміального порядку спадання на нескінченності та простору Φ' – топологічно спряженого до простору Φ ; дослідження властивостей основних операцій у таких просторах;

4) доведення коректної розв'язності задачі Коші для параболічних рівнянь поліноміального вигляду з початковими даними, які є узагальненими функціями з простору Φ';

5) доведення теорем про властивості локалізації та слабкої стабілізації розв'язків задачі Коші для вказаних рівнянь.

Наукова новизна результатів дисертації полягає у:

- одержанні загального зображення всіх гладких в Ω періодичних розв'язків параболічних псевдодиференціальних рівнянь поліноміального вигляду;

- описанні топологічної структури просторів Φ та Φ'; дослідженні властивостей основних операцій у таких просторах;

- доведенні коректної розв'язності задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь поліноміального вигляду з початковими даними, які є: а) узагальненими періодичними функціями; б) узагальненими функціями з простору Φ';

- доведенні теорем про: а) властивість локалізації розв'язків задачі Коші для рівнянь поліноміального вигляду з початковими даними, які є узагальненими періодичними функціями; б) властивості локалізації та слабкої стабілізації розв'язків задачі Коші для рівнянь поліноміального вигляду з початковими даними, які є узагальненими функціями з простору Φ'.

Методи досліджень. При знаходженні загального вигляду гладких розв'язків вказаних рівнянь та встановленні коректної розв'язності задачі Коші для таких рівнянь у просторах узагальнених функцій використовується та розвивається методика досліджень М.Л.Горбачука і В.І.Горбачук з теорії граничних значень розв'язків абстрактних диференціально-операторних рівнянь першого порядку, а також методика досліджень Г.Є.Шилова, І.М.Гельфанда, С.Д.Ейдельмана з теорії параболічних рівнянь і систем рівнянь.

Наукова і практична цінність роботи. Робота носить теоретичний характер. Результати та методика дисертаційної роботи можуть знайти застосування і подальший розвиток у теорії задачі Коші для лінійних параболічних рівнянь при дослідженні властивостей розв'язків, у теорії узагальнених функцій, теорії самоспряжених операторів у гільбертовому просторі.

На захист виносяться:

- теореми про топологічну структуру просторів Ф та Ф'; властивості основних операцій у таких просторах;

- теореми про загальний вигляд всіх гладких у шарі Ω періодичних розв'язків параболічних псевдодиференціальних рівнянь поліноміального вигляду;

- теореми про коректну розв'язність задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь поліноміального вигляду з початковими даними, які є: а) узагальненими періодичними функціями; б) узагальненими функціями з простору Ф';

- теореми про: а) властивість локалізації розв'язків задачі Коші для рівнянь поліноміального вигляду з початковими даними, які є узагальненими періодичними функціями; б) властивості локалізації та слабкої стабілізації розв'язків задачі Коші для рівнянь поліноміального вигляду з початковими даними, які є узагальненими функціями з простору Ф'.

Апробація роботи. Основні результати дисертації доповідались і обговорювались на:

- науковому семінарі математичного факультету Чернівецького державного університету ім. Ю.Федьковича (Чернівці, науковий керівник семінару - проф. С.Д.Івасишен, 1995р.);

- Львівському міському науковому семінарі з диференціальних рівнянь (Львів, наукові керівники семінару - проф. Б.Й.Пташник, проф. В.Я.Скоробогатько, 1995р.);

- проблемному семінарі з диференціальних рівнянь Київського національного університету ім.Т.Шевченка (Київ, науковий керівник семінару - проф. Перестюк М.О.);

- Міжнародній математичній конференції, присвяченій пам'яті Ганса Гана (Чернівці, 1994р.).

Публікації. По темі дисертації опубліковано 7 праць. З результатів спільних праць [1-3], [6] автору дисертації належать теореми про:

- коректну розв'язність задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь поліноміального вигляду;

- загальний вигляд усіх гладких у шарі Ω періодичних розв'язків вказаних рівнянь;

- властивості локалізації та слабкої стабілізації розв'язків задачі Коші для таких рівнянь, а також теореми, що описують топологічну структуру просторів Φ, Φ' та властивості основних операцій у цих просторах.

В.В.Городецькому, з результатів вказаних спільних праць, належать теореми про побудову та властивості псевдодиференціальних операторів, що діють у просторах узагальнених періодичних функцій та в просторі Φ', які наведені в дисертації без доведення.

Структура та об'єм роботи. Дисертація складається з вступу, двох розділів і списку цитованої літератури, що містить 4I найменування.

Зміст дисертації

У вступі обгрунтовується актуальність теми роботи, визначається мета дисертації, дається стислий огляд літератури та коротко викладається зміст роботи.

У першому розділі розглядаються параболічні псевдодиференціальні рівняння, що містять оператор дробового диференціювання. Досліджується коректна розв'язність задачі Коші для таких рівнянь у просторах узагальнених періодичних функцій нескінченного порядку типу ультрарозподілів Жевре, які є лінійними неперервними функціоналами над простором тригонометричних поліномів. Виділяється максимальний простір узагальнених початкових даних, які забезпечують існування єдиного розв'язку вказаної задачі. Для розв'язків задачі Коші у досить широкому класі узагальнених початкових даних типу ультрарозподілів Жевре встановлено принцип локалізації.

Перший розділ складається з трьох параграфів. Параграфи I.I та I.2 носять допоміжний характер.

У § I.I наведено основні поняття та твердження, що стосуються теорії просторів основних та узагальнених періодичних функцій.

У § I.2 розглядається аналог операції дробового диференціювання Вейля у просторах узагальнених періодичних функцій, запропонованої В.В.Городецьким, та наводяться деякі її властивості (звичайна форма дробового диференціювання за Ріманом-Ліувілем є непридатною у теорії тригонометричних рядів, оскільки вона періодичні функції, взагалі кажучи не переводить у періодичні, з тим же періодом, функції).

У § I.3 розвивається теорія задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь поліноміального вигляду, а саме: встановлюється її коректна розв'язність у випадку, коли початкові дані є узагальненими функціями типу розподілів та ультрарозподілів класу Жевре;
досліджуються якісні властивості розв'язків, зокрема, властивість локалізації.

Перейдемо тепер до викладу матеріалу першого розділу.
Символом Ф' позначимо сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів над простором

$$\Phi = \lim_{p\to\infty} \operatorname{ind} \Phi_p,\ \Phi_p := \left\{ \sum_{-p\leq|k|\leq p} B_k e^{i(k,x)},\ B_k\in\mathbb{C},\ x\in\mathbb{R}^n,\ p\in\mathbb{Z}_+ \right\};$$

елементи Ф' називаються узагальненими періодичними функціями. Ф' ототожнюється з простором усіх формальних рядів Фур'є:

$$(f\in\Phi') \Leftrightarrow \left(f=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} C_k e^{i(k,x)},\ C_k=\langle f, e^{-i(k,x)}\rangle,\ k\in\mathbb{Z}^n \right).$$

Розглянемо тепер рівняння

$$\gamma(t)\,\frac{\partial U}{\partial t} = P(t,A_\alpha)U,\ (t,x)\in\Omega, \qquad (I)$$

де $P(t,A_\alpha)=\sum_{k=1}^{2B} a_k(t)A_\alpha^k$, $B\in\mathbb{N}$, $a_k:[0,T]\to\mathbb{C}$ неперервні функції, $k\in\{1,\dots,2B\}$, A_α - звуження на простір $L_2(Q_n)$, $Q_n=[0,2\pi]^n$, оператора $\hat{A}_\alpha:\Phi'\to\Phi'$, дія якого визначається співвідношенням:

$$\hat{A}_\alpha f = \sum_{k\in \mathbb{Z}^n} |k|^\alpha c_k e^{i(k,x)}, \ f = \sum_{k\in \mathbb{Z}^n} c_k e^{i(k,x)} \in \Phi', \ \alpha>0,$$

$$c_k = \langle f, e^{-i(k,x)}\rangle, \ k\in \mathbb{Z}^n,$$

$\gamma:(0,T]\to\mathbb{R}$ неперервна додатна функція така, що $\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\gamma(\tau)} = O(t^p)$, $p>0$.

Вважаємо також, що многочлен $P(t,\xi)$ задовольняє умову "рівномірної параболічності":

$$\forall t\in(0,T]\ \forall \xi\in\mathbb{R}\ \exists\ \delta_0,\delta_1,\delta_2>0\ \delta_1\geq\delta_2: -\delta_0-\delta_1|\xi|^{2B}\leq \operatorname{Re}P(t,\xi)\leq -\delta_2|\xi|^{2B}+\delta_0.$$

Рівняння (I) надалі називатимемо параболічним псевдодиференціальним.

Під розв'язком (I) розумітимемо функцію $U\in C^1((0,T],\bigcap\limits_{k=1}^{2B}\mathcal{D}(A_\alpha^k))$, яка задовольняє рівняння (I).

Одним з основних результатів першого розділу є наступне твердження.

<u>Теорема I.6.</u> Функція $U(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, є розв'язком рівняння (I) тоді і тільки тоді, коли вона зображається у вигляді

$$U(t,x) = \sum_{k\in \mathbb{Z}^n} c_k(f)\exp(i(k,x) + \int\limits_0^t \frac{P(\tau,|k|^\alpha)}{\gamma(\tau)}\,d\tau), \tag{2}$$

де $f = \sum\limits_{k\in \mathbb{Z}^n} c_k e^{i(k,x)} \in (G_{\{1/(2B\alpha)\}})'$.

Тут $G_{\{\beta\}}$, $\beta>0$ – сукупність усіх нескінченно диференційовних 2π-періодичних в $\mathbb{R}^n$ функцій, які задовольняють умову

$$\exists C>0\ \exists B>0\ \forall l\in \mathbb{Z}_+^n\ \forall x\in\mathbb{R}^n: |D_x^l\varphi(x)|\leq CB^{|l|} l_1^{l_1\beta}\ldots l_n^{l_n\beta},$$

де сталі C,B залежать від функції φ; $(G_{\{\beta\}})'$ – простір усіх лінійних неперервних функціоналів над $G_{\{\beta\}}$ зі слабкою збіжністю.

Задача Коші для рівняння (I) полягає у знаходженні розв'язку цього рівняння, який задовольняє початкову умову $U(0,\cdot) = \lim\limits_{t\to+0} U(t,\cdot) = f$, де границя розуміється як збіжність за топологією простору Φ'.

Теорема I.7. Задача Коші для рівняння (I) коректно розв'зна в просторі початкових даних $(G_{(1/(2B\alpha))})'$. Її розв'язок зображається формулою (2), причому $U(t,\cdot) \to f$ при $t \to +0$ у просторі $(G_{(1/(2B\alpha))})'$.

Отже, $(G_{(1/(2B\alpha))})'$ є природним простором 2π - періодичних узагальнених функцій для постановки задачі Коші для рівняння (I). Вказаний простір є максимальним простором початкових даних задачі Коші, при яких ро. • язки рівняння (I) є нескінченно диференційовними і 2π - періодичними по x функціями.

Якщо припустити, що у рівнянні (I) параметр α задовольняє умову $\alpha>I$, то розв'язок цього рівняння володіє властивістю локалізації: якщо 2π - періодичний ультрарозподіл $f \in (G_{(\beta)})'$, $\beta>I$, збігається в області $Q \subset Q_n$ з неперервною 2π - періодичною функцією g, то $U(t,x) \to g(x)$ при $t \to +0$ рівномірно по x на довільному компакті $K \subset Q$ (тут $U(t,x)$ - розв'язок задачі Коші для рівняння (I), побудований за функцією f).

Дається також відповідь на питання про те, як повинен поводитися розв'язок рівняння (I), щоб його граничне значення в нулі належало до певного простору, розміщеного між $L_2(Q_n)$ і $(G_{(1/(2B\alpha))})'$. Зокрема, правильним є таке співвідношення еквівалентності:

$$(U(t,\cdot) \to f \in (G_{(\beta)})', \ \beta > 1/(2B\alpha)) \iff$$

$$\iff (\sup_{x \in Q_n} |U(t,x)| \leq C\exp(\mu t^{-q}); \ q = p/(2B\alpha\beta - I)).$$

У другому розділі розглядається рівняння

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{1=1}^{k} A_{\gamma_1} U = 0, \ (t,x) \in \Omega, \ k \in \mathbb{N}, \qquad (3)$$

де $I<\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \ldots \leq \gamma_k$, $\gamma_1 \in \mathbb{N}$, $1=\overline{1,k}$, A_{γ_1} - оператор, який трактується як звуження на $L_1(\mathbb{R}^n)$ оператора згортки спеціального вигляду, що діє у просторі $\Phi' \supset L_1(\mathbb{R}^n)$ -просторі, топологічно спряженому до простору Φ. Зауважимо, що при побудові операторів A_{γ_1} $(1=\overline{1,k})$ використовуються гіперсингулярні інтеграли, які в свою чергу визначаються як результат регуляризації функції з "степеневою" особливістю порядку $p>n$, де n - розмірність простору. Простір Φ визначається так, що класичний фундаментальний розв'язок $G(t,\cdot)$ задачі Коші для параболічного псевдодиференціального рівняння з негладкими символами a_1, $1=\overline{1,k}$, є елементом Φ (при кожному фіксованому $t>0$). Виявляється, що $\forall\ \varphi\in\Phi \supset S$ (S - простір Л.Шварца), $A_{\gamma_1}\varphi=F^{-1}[a_1F[\varphi]]$, тобто, на Φ оператор A_{γ_1} збігається з псевдодиференціальним оператором, а вказане рівняння відноситься до псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу. Класичний розв'язок $(f*G)(t,x)$ такого псевдодиференціального рівняння, де f - звичайна функція, яка задовольняє певні умови, поширюється до білінійної форми $\langle f,G(t,x-\cdot)\rangle$, де f вже є елементом простору Φ'. При цьому доводиться, що $\langle f,G(t,x-\cdot)\rangle\to f$ при $t\to+0$ у просторі Φ'. Це дозволяє ставити задачу Коші для такого рівняння з початковими даними, які є узагальненими функціями з простору Φ', встановити її розв'язність у просторі Φ', дослідити властивості локалізації та слабкої стабілізації.

Другий розділ складається з чотирьох параграфів. У § 2.1 визначається топологічна структура простору Φ та досліджуються властивості простіших операцій у ньому.

Нехай γ - фіксоване число з множини $(1,+\infty)\setminus\{2,3,4,\dots\}$, $\gamma_0:=n+\gamma$, $M(x)=1+|x|$, $x\in\mathbb{R}^n$,

$$\Phi:=\left\{\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)\mid \forall p\in\mathbb{Z}_+\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{\sum_{k=0}^{p}M(x)^{\gamma_0+k}\sum_{|\alpha|=k}|D_x^\alpha\varphi(x)|\}<\infty\right\};$$

де $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ - мультиіндекс. Введемо в Φ зліченну систему норм за формулами

$$\|\varphi\|_p:=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{\sum_{k=0}^{p}M(x)^{\gamma_0+k}\sum_{|\alpha|=k}|D_x^\alpha\varphi(x)|\},\ \varphi\in\Phi,\ p\in\mathbb{Z}_+.$$

і позначимо через Φ_p поповнення простору Φ за p-ою нормою. Φ_p - банахів простір, при цьому правильними є вкладення $\Phi_0\supset\Phi_1\supset\Phi_2\supset\dots$ і $\Phi=\bigcap_{p=0}^{\infty}\Phi_p$. Топологічна структура простору Φ така: Φ - повний досконалий зліченно-нормований простір з топологією проективної границі банахових просторів Φ_p: $\Phi=\lim_{p\to\infty}\mathrm{pr}\,\Phi_p$, причому вкладення $\Phi_{p+1}\subset\Phi_p$ неперервні, щільні і компактні. Послідовність $(\varphi_\nu,\ \nu\geq1)\subset\Phi$ збігається в Φ до функції $\varphi\in\Phi$ тоді і тільки тоді, коли вона: 1) обмежена в Φ (тобто, $\forall\ p\in\mathbb{Z}_+\ \exists\ C=C(p)>0\ \forall\ \nu\geq1$: $\|\varphi_\nu\|_p\leq C$); правильно збігається в Φ (тобто для довільного $\alpha\in Z_+^n$ послідовність $\{D_x^\alpha(\varphi_\nu - \varphi),\ \nu\geq 1\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному компакті $K\subset\mathbb{R}^n$).

У § 2.2 визначається простір Φ' як сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів над простором Φ. Оскільки в основному просторі Φ введена топологія проективної границі банахових просторів Φ_p, причому вкладення $\Phi_{p+1}\subset\Phi_p$ неперервні, щільні і компактні, то $\Phi' = (\lim\limits_{p\to\infty} \mathrm{pr}\,\Phi_p)' = \lim\limits_{p\to\infty} \mathrm{ind}\,\Phi_p'$; при цьому слабка збіжність в Φ' збігається з сильною (бо Φ - досконалий простір). Отже, якщо $f\in\Phi'$, то $f\in\Phi_p'$ при деякому $p\in Z_+$. Найменше з таких p називається порядком f, тобто кожна узагальнена функція $f\in\Phi'$ має скінченний порядок. Іншими словами, f допускає продовження як лінійний неперервний функціонал з деякого (найменшого) спряженого простору Φ_p'; при цьому має місце нерівність: $|\langle f,\varphi\rangle|\leq C\|\varphi\|_p$, $\varphi\in\Phi$, де $C=\|f\|_p$ - норма функціоналу f в Φ_p'. Зазначимо також, що мають місце співвідношення $\Phi_0'\subset\Phi_1'\subset\Phi_2'\subset\ldots$, причому кожне вкладення $\Phi_p'\subset\Phi_{p+1}'$, $p\in Z_+$ є неперервним і компактним. Звідси та з слабкої повноти просторів Φ_p', $p\in Z_+$, випливає повнота простору Φ'.

У цьому ж пункті досліджуються випадки існування згортки в Φ' (наведено три достатні ознаки її існування), вивчаються основні властивості цієї операції.

У § 2.3 наведена схема побудови оператора A_α з рівняння (3), запропонована В.В.Городецьким, а також побудовано спряжений оператор A_α^* до оператора A_α. Вивчаються властивості фундаментального розв'язку $G(t,\cdot)$ рівняння (3) як абстрактної функції параметра t у просторі Φ, встановлюються оцінки похідних функції G, досліджується поведінка при $t\to+0$ розв'язків цього рівняння, які подаються у вигляді $f*G$, $f\in\Phi'$, і є нескінченно диференційовними по x функціями. Одержані результати застосовуються при доведенні коректної розв'язності задачі Коші для (3) з початковими даними з простору Φ'.

<u>Означення</u>. Функція $a:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ належить до класу $Л_\alpha$, якщо a - однорідна функція порядку α (тобто, $a(\lambda x)=\lambda^\alpha a(x)$, $\lambda>0$) та виконуються умови:

1) a - неперервно диференційовна на $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ до порядку $n+[\alpha]$ функція;

2) похідні функції a задовольняють нерівності

$|D_x^\gamma a(x)| \leqslant C_\gamma |x|^{\alpha-|\gamma|}$, $0 \leqslant |\gamma| \leqslant n+[\alpha]$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;

3) $\exists\ \delta>0\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n$: $a(x) \geqslant \delta |x|^\alpha$.

Нехай $a \in Л_\alpha$ і

$$W := \{\ f \in L_1(\mathbb{R}^n):\ D_x^{n+[\alpha]+1} f \in L_1(\mathbb{R}^n)\ \}.$$

Тоді існує функція (характеристика) $\Omega(x') := \Omega(x/|x|)$, $\Omega(x') \in L_1(S_{n-1})$ (S_{n-1} - одинична сфера в $\mathbb{R}^n$) така, що

$$\forall\ f \in W:\ F^{-1}[aF[f]] = D_\Omega^\alpha f,$$

де символи F, F^{-1} - відповідно позначають пряме і обернене перетворення Фур'є, D_Ω^α - гіперсингулярний оператор нейтрального типу порядку α з характеристикою Ω, тобто

$$(D_\Omega^\alpha f)(x) := d^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Omega(h')(\Delta_h^l f)(x) |h|^{-(n+\alpha)} dh,\ x \in \mathbb{R}^n,\ 0<\alpha<l,$$

(тут $\Delta_h^l f$ - нецентрована різниця порядку l функції f з векторним кроком h і з центром у точці x, d -деяка стала, залежна від n, l, α).

Розглянемо тепер функцію $f_{\alpha,\Omega}(x) := C_\alpha \Omega(x')|x|^{-(n+\alpha)}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, де

$$C_\alpha = -\pi^{-(n/2+1)} 2^\alpha \Gamma(1+\alpha/2)\Gamma((n+a)/2)\sin((a\pi)/2).$$

Регуляризацією функції $f_{\alpha,\Omega}$ у просторі Φ' називається такий функціонал $F_{\alpha,\Omega} \in \Phi'$, що на всіх основних функціях $\varphi \in \Phi$, які обертаються тотожно в нуль у околі нуля, його значення рівне

$$\langle F_{\alpha,\Omega}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f_{\alpha,\Omega}(x)\varphi(x)dx.$$

В даному випадку можна запропонувати явну формулу регуляризації:

$$\forall\ \varphi \in \Phi:\ \langle F_{\alpha,\Omega}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(x) - \sum_{|j| \leqslant [\alpha]} (D_x^j \varphi)(0) x^j / j!) \Omega(-x') |x|^{-(n+\alpha)} dx.$$

Нехай тепер $\alpha>1$ і $\alpha \neq 2,3,4,\ldots$, E' - сукупність усіх фінітних узагальнених функцій з D', що лежать щільно у Φ'. Побудуємо сім'ю операторів $\{\hat{A}_\alpha\}$, які діють з E' в Φ' так: $\forall\ f\in E'$: $\hat{A}_\alpha f=f*F_{\alpha,\Omega}$. Зазначимо, що вказана згортка існує. З властивостей лінійності і неперервності згортки випливає, що при кожному α оператор $\hat{A}_\alpha$ – лінійний і неперервний в Φ'. Виявляється, що

$$(f*F_{\alpha,\Omega})(x)=(D^{\alpha}_{\Omega}\varphi)(x),\ \varphi\in\Phi.$$

Нехай A_α – звуження оператора $\hat{A}_\alpha$ на $L_1(\mathbb{R}^n)$. Тоді, як встановлено В.В.Городецьким,

а) $\mathfrak{D}(A_\alpha)=\{\varphi\in L_1(\mathbb{R}^n) \mid \exists\ F_{\alpha,\Omega}*\varphi\}$, $\overline{\mathfrak{D}(A_\alpha)}=L_1(\mathbb{R}^n)$, $\Phi\subset\mathfrak{D}(A_\alpha)$;

б) A_α – замкнений оператор в $L_1(\mathbb{R}^n)$;

в) $A_\alpha f=F^{-1}[aF[f]]$, $\forall\ f\in\Phi$.

Врахувавши властивість в), оператор A_α називатимемо псевдодиференціальним оператором, побудованим за символом a, а рівняння (3), в якому беруть участь оператори A_α, – параболічним псевдодиференціальним рівнянням.

Якщо розглядати оператор A_α як звуження його на простір Φ, то оператор A_α є лінійним і неперервним (бо такими властивостями володіють операції перетворення Фур'є у просторі Φ), і спряжений до нього – $A^*_\alpha:\Phi\to\Phi'$, причому

$$\forall\ f\in\Phi:\ A^*_\alpha f=F[aF^{-1}[f]]\ .$$

Якщо для рівняння (3) задано початкову умову

$$U(t,\cdot)_{|t=0}=f, \tag{4}$$

де $f\in\Phi'$, то під розв'язком задачі Коші (3), (4) розумітимемо функцію $U\in C^1((0,T],\bigcap_{i=1}^{k}\mathfrak{D}(A_{\gamma_i}))$, яка задовольняє рівняння (3) і початкову умову (4) у тому розумінні, що $U(t,\cdot)\to f$, $t\to+0$, у просторі Φ'.

Нехай

$$G(t,x):=F^{-1}[\exp(-tP(\xi))](x),\ t\in(0,T].$$

де $P(\xi):=\sum_{i=1}^{k} a_i(\xi)$, a_i – символ оператора A_{γ_i}, $a_i\in Л_{\gamma_i}$, $i=\overline{1,k}$. Якщо покласти $\gamma:=\gamma_1$, то $G(t,\cdot)\in\Phi$ при кожному $t\in(0,T]$. Задача Коші (3), (4) є коректно розв'язною в класі узагальнених функцій E'. Її розв'язок диференційовний по t, нескінченно диференційовний по x і дається формулою $U(t,x)=(f*G)(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$; при цьому $U(t,\cdot)\in\Phi$ $(\gamma=\gamma_1)$ для кожного $t\in(0,T]$.

Розв'язок задачі Коші (3), (4), володіє властивістю локалізації, яка формулюється так. Нехай $f\in E'$, $U(t,x)$ – розв'язок задачі Коші (3), (4), побудований за функцією f. Тоді, якщо узагальнена початкова функція f збігається в області $Q\subset \operatorname{supp} f$ з неперервною функцією g, то $U(t,x)\to g(x)$ при $t\to+0$ рівномірно по x на довільному компакті $\mathbb{K}\subset Q$.

Зазначимо, що наведені тут теореми справедливі і в тому випадку, коли початкова узагальнена функція $f\in\Phi'$ така, що $F[f]$ є мультиплікатором у просторі $\Psi'=(F[\Phi])'$. Тому підсумуємо основні ре - зультати у вигляді наступної теореми.

Теорема 2.7. Задача Коші (3), (4) розв'язна у класі початкових узагальнених функцій $f\in\Phi'$, для яких $F[f]$ є мультиплікатором у просторі $\Psi'=(F[\Phi])'$. Її розв'язок диференційовний по t, нескінченно диференційовний по x і дається формулою

$$U(t,x)=(f*G)(t,x),\ (t,x)\in\Omega.$$

При цьому, якщо f – фінітна узагальнена функція, то задача Коші (3), (4) коректно розв'язна і $U(t,\cdot)\in\Phi$ при кожному $t\in(0,T]$. Якщо f збігається в області $Q\subset\mathbb{R}^n$ з неперервною функцією g, то $U(t,x)\to g(x)$ при $t\to+0$ рівномірно по x на довільному компакті $\mathbb{K}\subset Q$.

У § 2.4 вивчається питання про слабку стабілізацію розв'язку задачі Коші для рівняння (3), а саме, які умови повинна задовольняти початкова узагальнена функція f, при виконанні яких $\langle U(t,\cdot),\varphi\rangle\to 0$ при $t\to+\infty$ для довільної основної функції φ.

Розглянемо однопараметричну сім'ю гіперповерхонь $\Phi_t(x)=C$, $C>0$ (при фіксованому t, $t\geq t_0>0$), яка володіє наступними властивостями: 1) вона складається із замкнених однозв'язних гіперповерхонь; 2) якщо $r(c,\nu,t)$ – довжина вектора, що з'єднує початок координат з точкою гіперповерхні $\Phi_t(x)=C$ і утворює кути $\pi/2-\nu_i$ з осями x_i, $i=2,\dots,n$, і кут $\pi/2-\nu_1$ між віссю x_1 і його проекцією на гіперплощину (x_1, x_2) декартової системи координат, то $r(c,\nu,t)$ має неперервну додатну похідну по параметру c; 3) для довільних c,ν,t виконуються нерівності

$$C_1 r^n(c,\nu,t) \leqslant \operatorname{mes} V^c_{\Phi_t} \leqslant C_2\, r^n(c,\nu,t),$$

де $V^c_{\Phi_t}$ - тіла, обмежені гіперповерхнями $\Phi_t(x)=c$, $\operatorname{mes} V^c_{\Phi_t}$ - міра Жордана таких тіл, C_1, C_2 - додатні сталі. Припускаємо також, що при $t\to+\infty$ сім'я гіперповерхонь $\Phi_t(x)=c$ збігається до сім'ї замкнених гіперповерхонь $F(x)=c$.

Говоритимемо, що узагальнена функція $f\in\Phi'$ має узагальнене граничне середнє по тілах V^c_F, рівне l і писатимемо $M^\infty_F(f)=l$, якщо

$$\forall\ \varphi\in\Phi:\ \lim_{C\to\infty} \frac{1}{\operatorname{mes} V^c_F} \int_{V^c_F} (f*\varphi)(x)dx = l\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx.$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.9. Нехай фундаментальний розв'язок G задачі Коші (3), (4) (при $t>0$) сталий по x на сім'ях гіперповерхонь $\Phi_t(x)=c$ (з властивостями 1) - 3)), що прямують при $t\to+\infty$ до сім'ї гіперповерхонь $F(x)=c$. Якщо початкова узагальнена функція $f\in\Phi'\backslash E'$ така, що $F[f]$ є мультиплікатором у просторі $(F[\Phi])'$ і $M^\infty_F(f)=0$, то розв'язок U задачі Коші з початковою функцією f слабко стабілізується до нуля, тобто

$$\langle U(t,\cdot),\varphi\rangle \to 0,\ t\to+\infty,\ \varphi\in\Phi.$$

При сильніших обмеженнях на початкову узагальнену функцію f можна говорити про стабілізацію розв'язку задачі Коші для рівняння (3) до нуля у звичайному розумінні. А саме, якщо $f\in E'$, то розв'язок $U(t,x)$ задачі Коші (3), (4) (при $t>0$), побудований за початковою функцією f, прямує при $t\to+\infty$ до нуля рівномірно на довільному компакті $K\subset\mathbb{R}^n$.

У цьому ж параграфі у випадку параболічних псевдодиференціальних рівнянь спеціального вигляду знайдено необхідні і достатні умови слабкої стабілізації до нуля розв'язків задачі Коші для таких рівнянь.

Основні результати і висновки

1. Знайдено загальний вигляд усіх нескінченно диференційовних по x в Ω розв'язків параболічних псевдодиференціальних рівнянь поліноміального вигляду (1) з операторами дробового диференціювання, що діють у просторах узагальнених періодичних функцій.

2. Доведено коректну розв'язність задачі Коші для таких рівнянь з початковими даними, які є узагальненими періодичними функціями. Встановлено властивість локалізації розв'язків задачі Коші для вказаних рівнянь.

3. Описано топологічну структуру просторів Φ та Φ', досліджено властивості основних операцій у таких просторах (зокрема, знайдено випадки існування згортки у вказаних просторах).

4. Доведено коректну розв'язність задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь вигляду (3) з початковими даними, які є узагальненими функціями з простору Φ'.

5. Доведено теореми про властивості локалізації та слабкої стабілізації розв'язків задачі Коші для рівнянь (3).

Отже, в дисертації розвинена теорія задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь поліноміального вигляду з початковими умовами у просторах узагальнених функцій типу розподілів та ультрарозподілів. Описано гладкі розв'язки таких рівнянь та множини їх початкових значень. Досліджено якісні властивості розв'язків, а саме, властивості локалізації та слабкої стабілізації.

Основні положення дисертації опубліковано в працях:

1. Городецький В.В., Літовченко В.А. Задача Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь у просторах узагальнених функцій типу S'// Доп. АН України.-1992.-№10.-С.6-9.
2. Городецький В.В., Літовченко В.А. Про задачу Коші для деяких псевдодиференціальних рівнянь у просторах узагальнених періодичних функцій // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць.-Київ, 1992.-Вип.1. -С.24-33.
3. Городецький В.В., Літовченко В.А. Про слабку стабілізацію розв'язків задачі Коші для параболічних диференціальних рівнянь // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць.-Київ, 1995.-Вип.8. -С.191-194.
4. Літовченко В.А. Задача Коші для параболічних псевдодиференці-

альних рівнянь у просторах узагальнених функцій типу S'//Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць.-Київ, 1995.-Вип.9. -С.243-246.
5. Літовченко В.А. Про стабілізацію розв'язків задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь у просторах узагальнених функцій типу S'//Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць.-Київ, 1995.-Вип.10. -С.122-126.
6. Городецький В.В., Літовченко В.А. Про стабілізацію розв'язків задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь у просторах типу S'// Тези міжнар. конф., присвяченої пам'яті академіка М.П.Кравчука (22-28 вересня 1992р.).- Київ-Луцьк, 1992.-С.49.
7. Літовченко В.А. Про граничні значення гладких розв'язків деяких псевдодиференціальних параболічних рівнянь //Тези міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Гана Ганса (10-15 жовтня 1994р.).-Чернівці, 1994.-С.90.

Litovchenko V.A. The Cauchy problem for parabolic pseudodifferential equations with initial conditions on the spaces of generalized functions of distribution type. Manuscript. Dissertation is presented for the scientific degree of the Candidate of physics and mathematics sciences on the specialization 01.01.02 - differential equations. Chernivtsy State University named affer Y.Fedkovich. Chernivtsy, 1996.

The correct solvability of the Cauchy problem is established for some parabolic pseudodifferential equations of polynomial type with initial conditions on the spaces of generalized functions of distribution and ultradistribution type. The properties of localization and weak stabilization of solutions of the Couchy problem are investigated for such equations.

Литовченко В.А. Задача Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений с начальными условиями в пространствах обобшенных функций типа распределений. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02-дифференциальные уравнения. Черновицкий государственный университет им.Ю.Федьковича, Черновцы, 1996.

Устанавливается корректная разрешимость задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений полиномиального вида с начальными условиями в пространствах обобшенных функций типа распределений и ультрараспределений, а также исследуются свойства локализации и слабой стабилизации решений задачи Коши для указанных уравнений.

Ключові слова:
параболічні псевдодиференціальні рівняння, узагальнені функції, задача Коші.

Підписано до друку 29.01.96.
Формат 60х84/16. Папір друкарський.
Друк офсетний. Ум.друк.арк. 1,05.
Обл.-вид.арк. 1,06. Тираж 100 прим.
Зам. 016.

Друкарня видавництва "Рута" Чернівецького держуніверситету
274012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2