Національна академія наук України
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

На правах рукопису

ГЛАДКИЙ Анатолій Васильович

УДК 517.927:519.6:534.2

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ В НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

01.05.02 — математичне моделювання та обчислювальні методи в наукових дослідженнях

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Київ 1996

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України.

Науковий консультант: член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
професор СКОПЕЦЬКИЙ В. В.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
професор НАКОНЕЧНИЙ О. Г.,
доктор фізико-математичних наук,
професор ПОПОВ Б. О.,
доктор фізико-математичних наук,
професор ЧИКРІЙ А. О.

Провідна організація: Інститут проблем машинобудування НАН України.

Захист відбудеться «12» квітня 1996 р. о 11 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.39.02 при Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України за адресою:

252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитися в науково-технічному архіві інституту.

Автореферат розісланий «6» березня 1996 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради СИНЯВСЬКИЙ В. Ф.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Широке коло науково-практичних задач, пов'язаних з моделюванням хвильових процесів в морській гідроакустиці, геофізиці, волоконній оптиці, фізиці атмосфери, морській гідротехніці та інших областях, стимулює дослідження по розробці ефективних чисельних методів моделювання хвильових процесів різної фізичної природи. Крім безпосереднього використання при проектуванні сучасних інформаційно-вимірювальних систем, результати моделювання хвильових процесів дозволяють розв'язати широке коло взаємозв'язаних задач, таких як формування заданих структур акустичних полів в хвилеводах, синтезу гідроакустичних антен та ін.

Ефективність моделювання хвильових процесів в значній мірі зумовлена адекватністю фізичних і математичних моделей, можливостями розроблених обчислювальних алгоритмів, здатністю корекції математичних моделей і обчислювальних схем, вибором інструментарію для аналізу досліджуваних процесів. Хвильові процеси описуються, як правило, хвильовим рівнянням Гельмгольця з комплексним коефіцієнтом заломлення і умовами Зоммерфельда випромінювання на нескінченності, що, в свою чергу, потребує створення математичних моделей та розробки ефективних методів розв'язання крайових задач для хвильового рівняння Гельмгольця в неоднорідних областях складної геометрії.

Характерними особливостями такого класу задач є неоднорідність і нескінченність області означення; складна конфігурація геометрії границі області означення; комплекснозначність розв'язку крайових задач; несамоспряженість диференціального оператора в частинних похідних, причому дійсна складова оператора знаконеозначена; наявність особливостей в правій частині рівняння типу дельта-функції Дірака та ін.

Розв'язання крайових задач для рівнянь з частинними похідними, як правило, можливе лише чисельними методами, насамперед, методом скінченних різниць і методом скінченних елементів (основні результати і література наведені в монографіях В.Вазова і Дж.Форсайта, К.І.Бабенка, Б.М. Бублика, С.К.Годунова, В.П.Ільїна, О. Зенкевича, О.О. Ладиженської, В.Л. Макарова, Г.І.Марчука, Г.М.Положого, О.А.Самарського, І.В.Сергієнка, В.Б.Скопецького, Г.Стренга і Дж.Фікса, Р.Ріхтмайєра, М.М.Яненка та ін.). Однак, незважаючи на одержані значні теоретичні і експериментальні результати, особливості розглядуваного класу хвильових задач не дозволяють безпосередньо застосувати до них загальноприйняті чисельні методи розв'язання крайових задач для рівнянь в частинних похідних .

Наявні підходи і методи аналітичного та наближеного розв'язування задач поширення акустичної енергії точкових або розподілених джерел, що пов'язані з іменами Л.М. Бреховських, В.Ю.Завадського, Ю.О. Кравцова, Дж.Б. Келлера, Г.Д. Малюжинця, Дж.С.Пападакіса, О.Г.Свешнікова, Ф.Д.Таперта та ін., поряд із своїми перевагами мають і певні недоліки, які обумовлені обмеженістю сфери застосування, недостатнім теоретичним обгрунтуванням, необхідністю проведення додаткових досліджень щодо стійкості та точності процесу обчислень. У зв'язку з цим особливо актуальною є проблема проведення досліджень по розробці нових гібридних моделей поширення акустичних хвиль в підводних хвилеводах та методів їх розв'язання; розробки і дослідження стійкості нових ефективних обчислювальних алгоритмів для розв'язання крайових, початково-крайових задач для еліптичних або параболічних хвильових рівнянь з комплексним несамоспряженим оператором; створення програмного забезпечення з метою дослідження хвильових процесів в неоднорідних середовищах; розв'язання задач формування заданих структур акустичних полів в неоднорідних хвилеводах.

Мета роботи полягає в розробці і аналізі математичних моделей та створенні, обгрунтуванні і програмній реалізації методів чисельного дослідження задач поширення акустичної енергії в неоднорідних хвилеводах, які описуються крайовими (початково-крайовими) задачами для хвильових еліптичних (параболічних типу Шредінгера) рівнянь з комплексним несамоспряженим оператором.

Наукова новизна роботи. Створено та досліджено широкий клас математичних моделей поширення хвильових процесів в неоднорідних середовищах у вигляді крайових (початково-крайових) задач для еліптичних (параболічних типу

Шредінгера) хвильових рівнянь з комплексним несамоспряженим оператором, зокрема:

- розроблена нова методика розв'язання широкого класу задач поширення акустичних хвиль в необмежених неоднорідних областях, що базується на математичних моделях різного рівня, урізанні нескінченної області з постановкою відповідних умов випромінювання на штучній границі, декомпозиції області з використанням аналітичного зображення впливу точкового джерела і методики зшивання чисельного та аналітичного розв'язків;

- розроблені нові чисельно-аналітичні методи розв'язання крайових задач для хвильового рівняння Гельмгольця з комплексним несамоспряженим оператором в неоднорідних середовищах, запропоновані методи дослідження стійкості та збіжності дискретних задач з комплексним несамоспряженим оператором;

- проведено дослідження і одержані нові загальні умови стійкості за початковими даними, по правій частині явних тришарових різницевих схем для розв'язання задачі Коші для перетвореного рівняння Гельмгольця з комплексним несамоспряженим оператором;

- запропоновані нові методи проведення дослідження стійкості за початковими даними, по правій частині, а також точності різницевих схем для розв'язання широкого класу хвильових задач підводної акустики, які описуються параболічними рівняннями з комплексним несамоспряженим оператором. Розроблені нові ефективні обчислювальні алгоритми на основі явних двошарових схем та неявних схем підвищеного порядку точності;

- розроблено алгоритмічне і програмне забезпечення для проведення дослідження задач поширення акустичної енергії в підводних хвилеводах, в тому числі для розв'язання задач формування заданих акустичних структур в багатомодових хвилеводах.

Достовірність одержаних результатів забезпечується порівнянням розрахунків за розробленими алгоритмами з відомими точними тестовими результатами і розрахунками інших авторів. Теоретичні положення дисертації сформульовано у вигляді теорем і лем, які повністю доведені. Доцільність запропонованих методів розв'язування широкого класу задач поширення акустичної енергії в неоднорідних хвилеводах підтверджено розв'язанням ряду практичних задач, а також розрахунками, пов'язаними з формуванням заданих структур акустичних полів в багатомодових хвилеводах.

Методи дослідження. В роботі використані методи математичного і функціонального аналізу, оптимізації, теорії диференціальних рівнянь, обчислювальної математики, математичного моделювання .

Практичне значення. Результати, наведені в дисертації, запропоновані в ній методи, а також створене на їх основі алгоритмічне і програмне забезпечення використовуються при дослідженні задач поширення акустичної енергії в підводних хвилеводах, при розв'язанні задач формування акустичних полів в неоднорідних багатомодових хвилеводах, в тому числі в КБ "Шторм" (м.Київ), НДІ "Атолл"(м.Сухумі).

Апробація результатів роботи. Основні ідеї, положення і результати досліджень були представлені на конференціях, науково-технічних нарадах, наукових семінарах: Республіканському семінарі "Чисельний аналіз "Наукової ради з проблеми "Кібернетика" АН УРСР (Київ,1983, 1986, 1989), науковій конференції "Обчислювальна математика в сучасному науково-технічному прогресі" (Канів, 1984), Міжотрасльовій науково-технічній конференції (Київ, 1985), Всесоюзному семінарі "Сучасні проблеми і математичні методи теорії фільтрації" (Москва , 1984), 2-й Регіональній школі-семінарі "Математичні методи прикладної акустики" (Волгодонськ, 1985), Всесоюзному семінарі "Питання оптимізації обчислень" (Алушта, 1987), 4-й Регіональній школі-семінарі по математичних методах гідроакустики (Одеса, 1989), X Всесоюзному симпозіумі по дифракції і поширенню хвиль (Москва, 1990), XI Всесоюзній акустичній конференції (Москва, 1991), Fourth International Colloquium on Differential Equations (Plovdiv, Bulgaria, 1993), симпозіумі "Питання оптимізації обчислень" (Київ, 1993), Міжнародній конференції "Вироджені рівняння і рівняння змішаного типу" (Ташкент, 1993), 1-й Українській конференції з автоматичного керування "Автоматика-94" (Київ, 1994), 2-й Українській конференції з автоматичного керування "Автоматика-95 (Львів, 1995), Міжнародній конференції "Advanced Mathematics, Computations and Applications" (Новосибірськ, 1995), Міжнародній конференції "Алгебра і кібернетика" (Гомель, 1995), науковому семінарі відділу "Математичних систем моделювання проблем екології і енергетики" Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України (кер. чл.-кор. НАН України В.В. Скопецький, 1993, 1994), об'єднаному науковому семінарі кафедри моделювання складних систем і кафедри обчислювальної математики Київського національного університету ім. Т.Г.Шевченка (кер. чл.-кор. НАН України Б.М.Бублик, проф. О.Г. Наконечний, проф. С.І. Ляшко, 1995).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в монографії та в 26 наукових статтях, перелік яких наведено в списку літератури.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, п'яти глав, висновків, списку використаної літератури, що містить 168 найменувань. Загальний обсяг роботи складає 258 сторінок машинописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

Вступ. Аналізується стан проблеми, обгрунтовується актуальність, практична і теоретична цінність досліджуваної тематики, виділяється коло основних задач і мета дослідження. Сформульовано основні наукові положення, що виносяться на захист, наведена коротка анотація дисертації по главах.

Глава 1. Чисельно-аналітичне розв'язання хвильових рівнянь в одновимірних та двовимірних канонічних областях. В главі розглядаються чисельно-аналітичні методи розв'язання крайових задач для хвильового рівняння Гельмгольця з комплексним несамоспряженим оператором. Перший параграф присвячений побудові чисельно-аналітичних розв'язків для одновимірного рівняння Гельмгольця

$$\rho\left(\frac{1}{\rho}u'(x)\right)' + k^2(x)u(x) = f(x),\ x \in (0,L) \tag{1}$$

із сталими (кусково-сталими) коефіцієнтами $k(x) = k_1 + ik_2$, $\rho(x) > 0$, $\operatorname{Im} k = k_2 > 0$, $i = \sqrt{-1}$; $f(x)$ – задана комплексна функція. Досліджуються триточкові різницеві апроксимації рівняння (1), побудовані на сітці $w = \{ x = jh,\ j = \overline{0,N} \}$ інтегро-інтерполяційним методом з врахуванням ідеальних умов спряження в можливих точках розриву.

Для сталих коефіцієнтів установлена наступна теорема.

Т е о р е м а 1. Для загального розв'язку дискретного різницевого рівняння Гельмгольця з комплексними коефіцієнтами має місце рівність

$$v_j = A\mu^j + B\nu^j - h^2 \sum_{p=1}^{N-1} \frac{\nu^{|j-p|}}{\mu - \nu} f_p, \; j = \overline{0, N},$$

де A, B - довільні комплексні сталі, які знаходяться за допомогою крайових умов, заданих при $j = 0$, $j = N$.

Тут μ, ν – деякі комплексні сталі, що визначаються вхідними даними різницевої задачі.Результати теореми узагальнюються на випадок нескінченного лівого (правого) півінтервалу або нескінченного інтервалу.Одержані чисельно-аналітичні розв'язки використовуються для побудови розв'язків дискретного рівняння Гельмгольця з кусково-сталими коефіцієнтами, розв'язання задач на власні значення і для дослідження збіжності розглядуваних різницевих задач.

У другому і третьому параграфах викладена методика побудови чисельно-аналітичних розв'язків дискретних крайових задач для двовимірного хвильового рівняння Гельмгольця

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\right) + \rho\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right) + k^2 u = f(x), \; x = (x_1, x_2) \in G, \tag{2}$$

$$u\big|_{\Gamma} = g(x_1) \, ,$$

де $f(x)$, $g(x_1)$ - задані диференційовані (кусково-диференційовані) комплексні функції, $\rho(x_2) > 0$ – дійсна (кусково-стала) функція; Γ - горизонтальні ділянки границі прямокутної області G, що може вироджуватись в нескінченну праву (ліву) півсмугу або смугу.

В § 2 одержано аналітичний розв'язок різницевих схем другого та четвертого порядку апроксимації задачі (2) у випадку сталої густини і хвильового числа k ($Im(k) \geq 0$). Доведено, що в сітковій області $\omega = \{ x = (jh_1, lh_2), \; j = \overline{0,N_1}; l = \overline{0,N_2} \}$

загальний розв'язок дискретної задачі другого порядку апроксимації визначається формулою

$$Y_j = P(\mu^j A + \nu^j B - h_1^2 \sum_{p=1}^{N_1-1} R(j,p)PF_p\ ),\ j = \overline{0,\ N_1}\,, \qquad (3)$$

де вектори комплексних сталих A, B знаходяться із граничних умов на вертикальних ділянках границі ($j = 0$, $j = N_1$).

Тут Y_j - комплексні вектори, складені із значень шуканого дискретного розв'язку вздовж осі x_2; елементи векторів F_p визначаються правою частиною і крайовою умовою; P, μ^j, ν^j, $R(j,p)$ - деякі допоміжні комплексні діагональні (крім P) матриці. Формула (3) зберігае свій вигляд і в випадках сіткової смуги (півсмуги) шляхом зміни границь підсумування по індексу p. Загальний розв'язок різницевої схеми четвертого порядку точності теж приймае вигляд, аналогічний формулі (3), зміна стосується лише значень елементів відповідних векторів і матриць.

В § 3 проведені дослідження, пов'язані з побудовою чисельно-аналітичного розв'язку різницевих схем другого порядку апроксимації для хвильового рівняння (2) у двовимірних кусково-неоднорідних середовищах. Загальний розв'язок різницевих схем також мае вигляд, аналогічний формулі (3).

Питання чисельного розв'язання крайових задач для несамоспряженого рівняння Гельмгольця зі змінними комплексними коефіцієнтами вивчається в § 4. Досліджується різницева схема другого порядку апроксимації задачі Діріхле для рівняння (2) з сталою густиною і $k^2(x) = Re(k^2(x)) + iIm(k^2(x))$, $Imk^2(x) > 0$, яку будемо розглядати у вигляді операторного рівняння

$$Av = \varphi\ ,\ x \in \omega, \qquad (4)$$

де ω - множина внутрішніх вузлів сіткової області. Оператор A визначений в лінійному просторі $\mathcal{H}$ комплексних сіткових функцій, заданих на ω із скалярним добутком і нормою

$$(u,v) = \sum_{x\in\omega} h_1 h_2 u(x)\overline{v(x)},\ \|v\| = (v,v)^{1/2}\ . \qquad (5)$$

Має місце

Т е о р е м а 2. Для комплексного оператора різницевої схеми (4) існує обернений оператор, причому справедлива оцінка

$$\|A^{-1}\| \le C , \tag{6}$$

де C > 0 – деяка стала, не залежна від сітки.

Із оцінки (6) випливає збіжність розв'язку різницевої задачі до розв'язку диференціальної задачі в сенсі норми (5) із швидкістю $O(h^2)$, $h = max(h_1,h_2)$.

П'ятий параграф присвячений побудові чисельно-аналітичних розв'язків і дослідженню стійкості різницевих задач для рівняння (2) при $k = 0$ в кусково-неоднорідних середовищах з неідеальними умовами спряження на границі розподілу середовища. Для двошарової смуги із заданими на лінії розподілу $x_2 = l$ неідеальними умовами спряження

$$\varepsilon\Big[\, u(x) \,\Big]\Big|_{x=l} = \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l-0} , \quad \varepsilon\Big[\, u(x) \,\Big]\Big|_{x=l} = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l+0} , \quad \varepsilon > 0$$

викладена методика побудови чисельно-аналітичних розвя'зків і дослідження збіжності різницевих схем другого порядку апроксимації.

Глава 2. Чисельне дослідження гідроакустичних полів в неоднорідних по трасі хвилеводах.

В главі досліджуються крайові задачі для хвильового рівняння Гельмгольця з комплексним несамоспряженим оператором в необмежених неоднорідних середовищах шляхом їх попереднього перетворення до крайових задач в обмежених областях за допомогою введення штучної границі і постановки на ній деяких крайових умов з наступним використанням і обгрунтуванням різницевого методу. Розрахунку акустичного поля точкового джерела в двовимірному неоднорідному середовищі, яке представляє собою півсмугу в циліндричній системі координат (r,z), присвячений § 2. Розглядається випадок змінного комплексного хвильового числа, внаслідок чого оператор диференціальної задачі є несамоспряженим зі знаконеозначеною дійсною складовою. Процес поширення акустичної енергії точкового гармонічного джерела з координатами $(0,z_0)$ математично описується крайовою задачею для хвильового рівняння Гельмгольця

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u}{\partial r}\right] + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k_0^2(n^2(r,z) + i\nu(r,z))u = -\frac{u_0}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z_0), \tag{7}$$

де $k_0 = 2\pi f/c_0$ – хвильове число; f – частота, $c(r,z)$ – швидкість поширення акустичних хвиль в середовищі, неперервно залежна від координат r,z (c_0 – її деяке значення); i – уявна одиниця; $\nu = \nu(r,z) \geq 0$ – коефіцієнт поглинання ; u_0 – інтенсивність джерела; $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака. Єдиність та необхідна поведінка розв'язку на нескінченності забезпечується умовою граничного поглинання або умовами випромінювання Зоммерфельда відповідно:

$$\lim_{r \to \infty} u(r,z) = 0, \quad \nu(r,z) > 0, \tag{8}$$

$$\lim_{r \to \infty} r^{1/2}\left[\frac{\partial u}{\partial r} - ik_0 u\right] = 0, \quad \nu(r,z) \geq 0 . \tag{9}$$

Запропонована методика чисельного розв'язання крайових задач для рівняння (7) попередньо полягає в заміні за допомогою штучної границі $\Gamma_R = \{(r,z),\ r = R,\ R >> 0,\ \ 0 \leq z \leq L\}$ необмеженої області обмеженою; побудові та постановці крайових умов на Γ_R і при $r \to 0$. Методика ефективної апроксимації умови випромінювання розроблена на основі аналізу поведінки точного розв'язку при $r \geq R$, побудованого за допомогою методу відокремлення змінних при сталих коефіцієнтах $n(r,z) = 1$, $c(r,z) = c$, $\nu(r,z) = \nu$. Приймаючи до уваги в крайовій умові на фіктивній границі одну або певну кількість поширюючих мод, одержимо крайову умову

$$Qu(r,z)\Big|_{r=R} = 0, \ 0 < z < L, \tag{10}$$

де у випадку локальних і нелокальної крайових умов оператор Q визначається співвідношеннями

$$Qu = \begin{cases} u, \ \nu > 0 , \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} - i\lambda_1 k_0 u + \dfrac{u}{2R} , \ \nu \geq 0 , \end{cases}$$

$$Qu = \frac{\partial u}{\partial r} - T(u), \ \nu \geq 0$$

відповідно.

Тут введено позначення

$$T(u) = \sum_{n=1}^{N} \langle u(R,z), \varphi_n(z) \rangle \left[ik_0\lambda_n - \frac{1}{2R} \right] \varphi_n(z) \ ,$$

де $k_0\lambda_n = (k_0^2(1 + i\nu) - \mu_n^2)^{1/2}$, $\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \ \sin(\mu_n z)$, $\mu_n = \frac{n\pi}{L}$; $Re\ \lambda_n > 0$, $Im\ \lambda_n \geq 0$; N – кількість мод, які вносять суттєвий вклад в розв'язок (N – найбільше ціле число, за яким підкореневий вираз для λ_n додатній); $\langle u,v \rangle$ – скалярний добуток. Умова при $r \to 0$ встановлена аналогічно і має вигляд

$$\lim_{r \to 0} r\frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{u_0}{2\pi} \delta(z - z_0). \tag{11}$$

В обмеженій області дискретний аналог рівняння (7) з умовами (10),(11) і нульовими крайовими умовами на горизонтальних ділянках, побудований на сітці $\omega = \{ (r_n, z_k),\ r_n = \tau/2 + \tau(n-1),$ $n = 1,2,\ldots,N_1;\ z_k = kh,\ k = \overline{1,M-1},\ \ r_N = R,\ z_M = L \}$ інтегро-інтерполяційним методом, можна записати у вигляді операторного рівняння

$$Av = f,\ (r,z) \in \omega, \tag{12}$$

де оператор A діє в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ комплекснозначних сіткових функцій, заданих на ω і задовольняючих нульовим крайовим умовам при $z = 0$, $z = z_M$. Скалярний добуток і норму в $\mathcal{H}$ введемо за формулами

$$(u,v) = \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{M-1} \hat{\tau} h r u_{n,k} \overline{v}_{n,k} \ , \quad \|v\| = (v,v)^{1/2}, \tag{13}$$

$$\hat{\tau} = \begin{cases} \tau/2, \ n = 1;\ n = N\ ; \\ \tau,\ 2 \leq n \leq N-1, \end{cases}$$

де $N_1 = N - 1$ у випадку крайової умови першого роду і $N_1 = N$ за умови третього роду.

Зокрема, використовуючи загальновідомі позначення теорії різницевих схем, оператор A у випадку локальної крайової умови третього роду можна представити у вигляді

$$Av = \begin{cases} -\frac{1}{r}\left[r^{(-1/2)} v_{\bar{r}} \right]_r - v_{\bar{z}z} - b(r,z)v \,, \quad (r,z) \in \omega \,, \\ -\frac{2}{r} v_r - v_{\bar{z}z} - b(r,z))v, \; b(r,z) = k_0^2(n^2(r,z) + i\nu(r,z)), \\ \qquad (r,z) = (r_1, z_k), \; k = \overline{1, M-1} \,, \\ R_h v \,, \quad (r,z) = (r_N, z_k), \; k = \overline{1, M-1} \,, \end{cases}$$

де R_h - різницевий оператор крайової умови на фіктивній границі:

$$R_h v = \frac{2r_{N-0,5}}{\tau r_N} v_{\bar{r}} - v_{\bar{z}z} - \left[b(r,z) + \frac{2}{\tau}(i\lambda_1 k_0 - \frac{1}{2r_N}) \right] v \,.$$

У випадку локальної крайової умови першого роду необхідно враховувати, що $N_1 = N - 1$, $v_N = 0$.

Для комплексного несамоспряженого оператора A різницевої схеми (12) із врахуванням локальних крайових умов установлено існування обмеженого оберненого комплексного оператора A^{-1} в нормі (13).

Поряд з локальними крайовими умовами в роботі досліджена різницева схема для крайової задачі з нелокальною крайовою умовою (10) на штучній границі. Внаслідок апроксимації диференціальної задачі одержана різницева схема, для уявної частини комплексного оператора якої показана додатна означеність в сенсі скалярного добутку (13). Крім цього, установлено також існування обмеженого оберненого оператора різницевої схеми 1, як наслідок, стійкість.

Т е о р е м а 3. Для комплексного несамоспряженого оператора різницевої схеми (12) існує обернений, причому $\|A^{-1}\| \le C$, $C = const$, $C > 0$.

Для реалізації системи лінійних алгебраїчних рівнянь (12) з комплексною неермітовою матрицею запропоновано ітераційний метод, який використовує алгоритм спряжених градієнтів з переобумовленням.

Взаємодія поля із зовнішнім середовищем моделюється за допомогою імпедансної крайової умови третього роду, заданої на нижній границі хвилевода. В цьому випадку згідно з вище викладеною методикою запропонована конструктивна апроксимація умови Зоммерфельда на штучній границі у вигляді локальної або нелокальної крайової умови. Диференціальна задача апроксимується різницевою схемою, яка враховує імпедансну умову і різні типи локальної або нелокальної граничної умови на штучній границі. Досліджено властивості комплексного оператора різницевої схеми і встановлено існування обмеженого оберненого оператора.

В §3 розглядаються підходи і методи розрахунку комплекснозначного хвильового поля точкового джерела в смузі і півсмузі у декартовій та циліндричній системах координат відповідно, заповнених середовищем з кусково-сталою густиною. Спочатку досліджуються розв'язки крайових задач у випадку неоднорідних областей з горизонтальними лініями розподілу середовища в декартовій та циліндричній системах координат. Зазначені розв'язки за допомогою методики зшивання застосовуються для розробки ефективних методів розрахунку важливого класу хвильових полів в неоднорідних областях із ступінчатою лінією розподілу середовища.

В четвертому параграфі пропонується методика побудови математичної моделі і чисельно-аналітичного розв'язку поля точкового джерела в циліндричному хвилеводі, що характеризується кусково-сталою густиною з довільною границею розподілу та кусково-неперервним коефіцієнтом заломлення. Математично задача описується крайовою задачею в неоднорідній за густиною області $G = \{(r,z),\ 0 \le r \le \infty,\ 0 \le r \le L\}$ з кусково-гладкою границею розподілу середовища $\Gamma = \{(r,z),\ 0 < r < \infty,\ z = g(r)\}$ для еліптичного хвильового рівняння

$$\frac{\rho_\alpha \partial}{r\,\partial r}\left[\frac{1}{\rho_\alpha} r \frac{\partial u}{\partial r}\right] + \rho_\alpha \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\rho_\alpha}\frac{\partial u}{\partial z}\right] + k_0^2(n_\alpha^2(r,z) + i\nu_\alpha)u = -f,$$
$$(r,z) \in G_\alpha,\ \alpha = 1,2$$

з відповідними крайовими умовами і умовами ідеального спряження на границі розподілу середовища

$$\left[\, u \,\right]\Big|_{\Gamma} = u\Big|_{\Gamma^+} - u\Big|_{\Gamma^-} = 0 \qquad \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\Big|_{\Gamma} = 0\,, \tag{14}$$

де $G = G_1 \cup G_2$; G_1, G_2 – неоднорідні середовища з густиною $\rho_1(r,z)$, $\rho_2(r,z)$ відповідно; $n_\alpha = c_0 / c_\alpha(r,z)$ – коефіцієнт заломлення; $\nu_\alpha = \nu_\alpha(r,z)$ – коефіцієнт поглинання, причому $\nu_2 \gg \nu_1$, $\nu_1 > 0$.

Для чисельного розв'зання сформульована диференціальна крайова задача в обмеженій області; за допомогою інтегро-інтерполяційного методу побудована і досліджена різницева задача; установлено існування обмеженого оберненого комплексного оператора, що означає стійкість різницевої схеми.

Глава 3. Явний метод дослідження хвильових процесів підводної акустики в неоднорідних хвилеводах. В главі досліджуються крайові задачі для хвильового рівняння Гельмгольця в двовимірних неоднорідних середовищах шляхом попереднього перетворення диференціального оператора з подальшим використанням та обгрунтуванням чисельного розв'язання задачі Коші для еліптичного хвильового рівняння з комплексним несамоспряженим оператором. Такий підхід до побудови наближеного розв'язку за допомогою певних перетворень рівняння Гельмгольця використовується при моделюванні поширення акустичних хвиль на великі відстані від джерела випромінювання; зберігає прямі і обернені хвилі; виділяє за допомогою функції Ханкеля високочастотну складову акустичного поля і задовольняє на нескінченності умові випромінювання Зоммерфельда. Методика дослідження дальнього низькочастотного акустичного поля в азимутально-симетричному середовищі (при $k_0 r \gg 1$) базується на представленні розв'язку рівняння Гельмгольця $p(r,z)$ через коливну функцію Ханкеля, промодульовану досить плавною амплітудою $u(r,z)$, $p(r,z) = H_0^{(1)}(k_0 r)u(r,z)$, яка задовольняє еліптичному хвильовому рівнянню

$$2ik_0 \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + k_0^2(n^2(r,z) - 1)u = 0 . \qquad (15)$$

В §1 досліджується явний тришаровий різницевий метод розв'язання перетвореного рівняння Гельмгольця (15) в неоднорідній області $G = (r > r_0, 0 < z < L)$ із врахуванням початкової і крайових умов відповідно:

$$\begin{aligned} &u(r_0,z) = u(z), \\ &u(r,0) = u(r,L) = 0. \end{aligned} \qquad (16)$$

На сітці $\omega_{\tau h} = \omega_\tau \times \omega_h$, $\omega_\tau = (\ r = r_n = r_0 + n\tau,\ n = 1,2,\dots,)$,

$\omega_h = (\ z = z_k = kh,\ k = \overline{1,N-1}\ ,\ h = L/N\ )$

диференціальній задачі (15)-(16) ставиться у відповідність явна тришарова різницева схема другого порядку апроксимації

$$\begin{aligned} &v_{\overset{\circ}{r}} + \tau^2 R v_{\bar{r}r} + Av = 0\ ,\ v \in H\ , \\ &v(0) = v^0,\ v(\tau) = v^1 \end{aligned} \qquad (17)$$

з комплексними несамоспряженими операторами R, A, діючими в гільбертовому просторі H комплексних сіткових функцій, заданих на ω_h і рівних нулеві при $z = 0$, $z = L$:

$R = -\,i\gamma E,\ \ \gamma = 1/(2k_0\tau^2),\ \ E$ – одиничний оператор,

$Av = \dfrac{i}{2k_0}\,(\,-\,v_{\bar{z}z} - \varepsilon k_0^2 v\,),\ \ \varepsilon(r,z) = n^2(r,z) - 1,$

$v_{\overset{\circ}{r}} = (v_k^{n+1} - v_k^{n-1})/(2\tau).$

Ввівши в H відповідно скалярний добуток і норму

$$(v,y) = \sum_{z \in \omega_h} v\bar{y}h\ ,\ \|v\| = \sqrt{(v,v)}\ \ . \qquad (18)$$

під стійкістю різницевої схеми за початковими даними будемо розуміти виконання оцінки $\|\,y_{n+1}\,\|_D^2 \le \rho^2 \|\,y_n\|_D^2$. $n = 0,1,\dots,$ де D – деякий (можливо змінний) самоспряжений невід'ємний оператор і величина ρ^n рівномірно обмежена при $n \to \infty$ сталою, незалежною від параметрів сітки. У випадку двошарових схем $y_n = (y^n)$, $y^n \in H$, для тришарових $y_n = (y^n, y^{n+1})$, $y_n \in H^2$.

Має місце

Т е о р е м а 4. Різницева схема (17) стійка за початковими даними в нормі $\|\cdot\|_{Q_n}$, породженій деяким функціоналом, при виконанні умов

$$\tau \le \frac{2h}{4 + \varepsilon_0 k_0^2 h^2} \sqrt{k_0^2 h^2 (1 - \varepsilon_0) - 4}\ , \quad k_0 h \sqrt{1 - \varepsilon_0} > 2, \quad (19)$$

де $-\varepsilon_0 \le \varepsilon(r,z) \le \varepsilon_1$, $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \ge 0$.

При виконанні умов (19) для розв'язку одержано апріорну оцінку в більш простих нормах $\| v_n \|_{Q_n} \le \|v^0\| + \|v^1\|$. Для розв'язку неоднорідного рівняння (17) також установлена апріорна оцінка, яка означає стійкість за початковими даними і по правій частині.

Покращити умови (19) дозволяє запропонована з використанням оператора усереднення явна схема вигляду (17) з операторами

$$R = -i\gamma E, \quad Av = \frac{i}{2k}\left(-v_{\bar z z} - \varepsilon k_0^2 v\right), \quad \gamma = \frac{1}{2k_0}\left[\frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{h^2}\right], \quad (20)$$

яка апроксимує диференціальну задачу з похибкою апроксимації $O(\tau^2 + h^2 + (\tau/h)^2)$.

Встановлено, [illegible] різницева схема (17), (20) стійка за початковими даними при виконанні умов

$$\tau \le \frac{2}{k_0} \sqrt{\frac{k_0^2 h^2 (1 - \varepsilon_0) - 4}{\varepsilon_0 (4 + \varepsilon_0 k_0^2 h^2)}}\ , \quad k_0 h \sqrt{1 - \varepsilon_0} > 2\ , \quad |\varepsilon(r,z)| \le \varepsilon_0 .$$

Якщо $\varepsilon(r,z) \equiv 0$, то обмеження на τ взагалі зникає і залишається умова тільки для h.

У другому параграфі проведено дослідження явних тришарових різницевих схем розв'язання початково-крайових задач для еліптичного хвильового рівняння в неоднорідних середовищах, які характеризуються змінною швидкістю звуку і змінною або кусково-змінною густиною середовища. Методика побудови і дослідження явних тришарових різницевих схем у випадку неоднорідного середовища з кусково-сталою густиною викладена на прикладі рівняння (15) в двошаровій області з умовами спряження (14) на горизонтальній лінії розподілу $z = l$, $l < L$. Диференціальна задача апроксимується різницевою схемою

$$D(v_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R v_{\bar{t}t}) + Av = 0, \qquad v(0) = v^0,\ v(\tau) = v^1 \tag{21}$$

з комплексними несамоспряженими операторами

$$R = -i\gamma E,\ Av = \frac{i}{2k_0}((av_{\bar{z}})_z - gv),\ \gamma = 1/(2k_0\tau^2),$$

$$Dv = d(z)v, \tag{22}$$

де коефіцієнти $d(z)$, $a(z)$, $b(r,z)$, $g(z)$ визначаються вхідними даними. Для різницевої схеми (21)-(22) установлена стійкість за початковими даними і одержані умови, при виконанні яких стійкість має місце.

Глава 4. Чисельне дослідження поширення однонаправлених хвильових пучків в неоднорідних хвилеводах. В главі досліджуються крайові задачі для хвильового рівняння Гельмгольця в двовимірних неоднорідних середовищах шляхом апроксимації рівняння Гельмгольця параболічними рівняннями в частинних похідних типу Шредінгера (параболічна апроксимація). Такий підхід також базується на представленні розв'язку рівняння Гельмгольця у вигляді $p(r,z) = H_0^{(1)}(k_0 r)u(r,z)$ і використовується для моделювання поширення звукових хвиль на великі відстані, в основному, при вивченні однонаправлених хвильових процесів. Це пов'язано, в першу чергу, з можливістю побудови ефективних чисельних методів розв'язання таких рівнянь. Параболічні апроксимації є наближенням хвильового рівняння Гельмгольця для певних кутів поширення акустичної енергії і можуть бути одержані за допомогою полінома Тейлора або раціональної апроксимації оператора кореня квадратного в базовому псевдодиференціальному рівнянні в частинних похідних

$$u_r + ik_0\Big[E - \Big[E + (n^2(r,z) - E) + \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big]^{1/2}\Big]u = 0, \tag{23}$$

де E – одиничний оператор.

Проведене чисельне дослідження початково-крайових задач для параболічних хвильових рівнянь типу Шредінгера з комплексним несамоспряженим оператором в найбільш повній математичній постановці. Встановлена стійкість запропонованих різницевих схем за початковими даними, по правій частині, а також збіжність наближеного розв'язку до розв'язку диференціальної задачі.

В § 2 запропоновано підхід до побудови та дослідження явної тришарової різницевої схеми

$$
\begin{aligned}
&i v_{\overset{\circ}{t}} - (a v_{\bar{x}})_x + b(x,t) v_{\bar{t}t} = 0, \\
&v(x,0) = v^0, \; v(x,\tau) = v^1, \qquad\qquad (24)\\
&v(0,t) = 0 \;, \; v(L,t) = 0 \;,
\end{aligned}
$$

яка апроксимує початково-крайову задачу для нестаціонарного рівняння Шредінгера зі змінними коефіцієнтами

$$i \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\Big[k(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big] = 0, \; k(x,t) > 0, \; 0 < x < L, \; 0 \le t \le T$$

з точністю $O(\tau^2+h^2+\gamma^2)$, $\gamma = \tau/h$ при $a_k = k(x_{k-0.5}, t_n)$, $b(x,t) = \gamma^2(a+a^{+1})/2$. Актуальність дослідження явних схем викликана неможливістю побудови (на відміну від параболічних рівнянь із дійсним самоспряженим оператором) зручних з точки зору реалізації явних умовно-стійких двошарових різницевих схем для розв'язання параболічних рівнянь типу Шредінгера.

Методом енергетичних нерівностей доведена безумовна стійкість різницевої схеми (24) за початковими даними в нормі $\|\cdot\|_{a'_n}$, породженій деяким невід'ємним оператором. Оцінку розв'язку в більш простих нормах $\|\cdot\|_A$, $\|\cdot\|_B$, $Av = -(av_{\bar{x}})_x$, $Bv = b(x,t)v$ встановлює

Т е о р е м а 5. Явна тришарова різницева схема (24) безумовно стійка за початковими даними і для її розв'язку справедлива оцінка

$$\| v^{n+1} \|_{A(t_n)} \le \sqrt{M \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \left\{ \| v \|_{A(t_0)} + \| v_t \|_{B(t_0)} \right\}, \; \varepsilon > 0.$$

Аналогічно встановлена апріорна оцінка для рівняння (24) з неоднорідною правою частиною, яка дозволяє дослідити збіжність розв'язку різницевої схеми (24) в нормі $\|\cdot\|_A$ при $h, \tau, \tau/h \longrightarrow 0$.

Поряд із явною схемою проведено дослідження сімейства неявних двошарових різницевих схем

$$i v_t + A(\sigma\hat{v} + (1-\sigma)v) = 0, \quad v(x,0) = v^0, \qquad (25)$$

де $Av = -(a v_{\bar{x}})_x$, σ – дійсний (комплексний) числовий параметр.

Має місце

Т е о р е м а 6. Двошарова неявна різницева схема (25) безумовно стійка за початковими даними при $\sigma \geq 0{,}5$ і для її розв'язку має місце оцінка $\| v^n \| \leq \| v^0 \|$, $v \in H$.

Установлена стійкість при $\sigma \geq 0{,}5$ по правій частині двошарової різницевої схеми (25) з неоднорідною правою частиною, одержано апріорні оцінки в нормах $\|\cdot\|_A$, $\|\cdot\|$, досліджено питання збіжності.

Т е о р е м а 7. В класі достатньо гладких розв'язків різницева схема (25) збігається при $\sigma = 0{,}5$, $h, \tau \longrightarrow 0$ в нормі $\|\cdot\|$ із швидкістю $O(\tau^2 + h^2)$.

Третій параграф присвячений чисельній реалізації двочленної тейлорівської апроксимації рівняння Гельмгольця, ефективне використання якої обмежене кутами поширення акустичної енергії до горизонталі в межах $\pm 10°$. Досліджується двошарова операторна неявна різницева схема

$$\begin{aligned} & B v_r + C v = 0, \quad v \in H, \\ & v(r_0, z) = v^0 \end{aligned} \qquad (26)$$

з операторами

$$B = (2ik_0 + 0{,}5\tau\tilde{b}(r,z))E + 0{,}5\tau\Lambda,$$

$$C = \Lambda + \tilde{b}(r,z)E, \quad \Lambda v = v_{\bar{z}z}, \quad Ev = v,$$

яка апроксимує з другим порядком точності початково-крайову задачу для параболічного хвильового рівняння

$$2ik_0\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k_0^2(n^2(r,z) - 1 + i\nu(r,z))u = 0 .$$

Тут $\nu(r,z) \geq 0$, $b(r,z) = k_0^2(n^2(r,z) - 1 + i\nu(r,z))$ і для довільної сіткової функції $f(r,z)$ позначено $\tilde{f} = f(r_{n+0.5}, z)$.

Має місце

Т е о р е м а 8. Різницева схема (26) безумовно стійка за початковими даними в нормі $\|\cdot\|$.

Для різницевої схеми з неоднорідною правою частиною одержана апріорна оцінка, яка дозволяє встановити збіжність в нормі $\|\cdot\|$ при $h,\tau \to 0$ із швидкістю $O(h^2+\tau^2)$.

Проведено дослідження стійкості неявної двошарової різницевої схеми (26) з операторами

$$C = \Lambda + (E + \frac{h^2}{12}\Lambda)Q, \quad Qv = \tilde{b}(r,z)v, \quad Ev = v,$$
$$B = \frac{\tau}{2}C + 2ik_0(E + \frac{h^2}{12}\Lambda), \quad \Lambda v = v_{\bar{z}z}\,. \tag{27}$$

яка апроксимує диференціальну задачу з точністю $O(\tau^2+h^4)$. Установлена безумовна стійкість за початковими умовами в нормі $\|\cdot\|$.

Поряд із неявними схемами великої уваги потребує розробка явних алгоритмів реалізації різницевих задач, ефективність яких особливо проявляється при використанні методики паралельних обчислень і при розв'язанні багатовимірних задач. На базі розщеплення різницевого оператора запропоновано явний метод, де розв'язок дискретної задачі на $(n+1)$– му кроці визначається за формулою $\hat{v} = (\hat{w} + \hat{y})/2$, де w, y – розв'язки допоміжних явних двошарових різницевих схем

$$(2ik_0 + 0{,}5\tau\tilde{b})w_r + (\hat{w}_z - w_{\bar{z}})/h + \tilde{b}(r,z)w = 0\,,$$
$$(2ik_0 + 0{,}5\tau\tilde{b})y_r + (y_z - \hat{y}_{\bar{z}})/h + \tilde{b}(r,z)y = 0 \tag{28}$$

з умовами $w^0 = y^0 = v^0$ відповідно. Для зазначених явних задач установлена безумовна стійкість за початковими даними.

В §4 розглядається чисельне розв'язання параболічного хвильового рівняння в циліндричних координатах

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{ik_0}{2}\Big[L \,/\, \Big[E + \frac{1}{4}L\Big]\Big]u, \quad L = (n^2(r,z) - 1)E + \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{29}$$

яке одержане за допомогою дробово-лінійної апроксимації рівняння (23) і дозволяє враховувати поширення акустичної енергії в неоднорідних областях з кутом поширення до ±23°. Проведено дослідження стійкості за початковими умовами неявної двошарової різницевої схеми з похибкою апроксимації $O(\tau^2+h^2)$

$$Bv_{\bar r} + Cv = 0, \quad v \in H, \qquad (30)$$
$$v(r_0,z) = v^0,$$

з операторами $B = \frac{\tau k_0}{4} P + i\left[- E + \frac{1}{4} P\right]$, $C = \frac{k_0}{2} P$,

$$P = \tilde{b}E - (1/k_0^2)\Lambda, \quad \Lambda v = v_{\bar z z}, \quad b(r,z) = 1 - n^2(r,z).$$

Результатом досліджень є

Т е о р е м а 9. Різницева схема (30) абсолютно стійка за початковими умовами в нормі $\|\cdot\|$.

В § 5 досліджується стійкість за початковими умовами явної тришарової різницевої схеми другого порядку апроксимації для тричленного тейлорівського наближення оператора кореня квадратного в псевдодиференціальному рівнянні (23)

$$u_r + ik_0\left[- L/2 + L^2/8\right]u = 0, \quad L = (n^2(r,z) - 1)E + \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Внаслідок дослідження явної тришарової схеми

$$2ik_0 v_{\overset{\circ}{r}} + Av = 0, \quad (z,r) \in \omega_{h\tau},$$
$$v(0,r) = 0, \quad v(L,r) = 0,$$
$$v(z,0) = v^0, \quad v(z,\tau) = v^1$$

з деяким різницевим оператором четвертого порядку A установлено співвідношення між кроками сітки, при виконанні якого має місце стійкість за початковими даними. Запропонована методика реалізації явної схеми, яка дозволяє зменшити кількість арифметичних операцій в два рази.

Аналогічно досліджена різницева схема для параболічного рівняння

$$u_r + ik_0\left[- bL - aL^2 \right]u = 0,$$

одержаного за допомогою апроксимації оператора кореня квадратного вигляду $(1 + x)^{1/2} = 1 + bx + cx^2 + O(x^3)$ з коефіцієнтами, оптимально підібраними для заданого інтервалу аргумен... Зокрема, для $|x| \leq 1/2$ відповідними значеннями коефіцієнтів є $a = -0,13629699$, $b = 0,51763797$, що відповідає поширенню акустичних хвиль з кутами нахилу до горизонту в межах $\pm 45°$.

Глава 5. Математичне моделювання задач аналізу та синтезу акустичних полів. В главі проведено аналіз ефективності та розглянуто застосування розроблених чисельних методів для конкретних прикладних задач формування акустичних полів.

В § 1 проведено порівняльний аналіз ефективності різницевих задач для еліптичних та параболічних апроксимацій рівняння Гельмгольця на тестовій задачі знаходження поля точкового джерела в однорідній області, для якої існує точний аналітичний розв'язок у вигляді суми нормальних мод. Оскільки з кожною модою можна пов'язати певний кут поширення, то порівняння явних і неявних різницевих схем проведено із урахуванням впливу параметрів сітки h, τ та кількості нормальних мод на точність одержуваних результатів. Результати деяких чисельних експериментів показані у вигляді графіків, які ілюструють залежність інтенсивності поля $(10lg|p|^2)$ від відстані r на фіксованій глибині. На рис. 1 показана інтенсивність поля на частоті $f = 100$ Гц з максимальним кутом розповсюдження 7,3° (враховується 5 мод). Із аналізу графіків на рис. 1,а,б випливає, що розв'язок неявної різницевої схеми (26) характеризується більшим зсувом фази, ніж розв'язок задачі з явною реалізацією (28). Зауважимо, що результати обчислень одержані при таких значеннях кроків сітки: $\tau = 35$ м, $h = 10$ м. Схема підвищеного порядку точності (27) має суттєву перевагу на грубій сітці (на рис.1,в показані результати розрахунку при $h = 20$ м, $\tau = 70$ м). При цьому слід зауважити, що при таких параметрах сітки розв'язки неявної різницевої схеми (26) і схеми (28) мають значну похибку.

В цілому, аналіз проведених чисельних розрахунків показує, що явні різницеві схеми реалізації еліптичного і параболічного рівнянь дозволяють одержати більш точні результати,

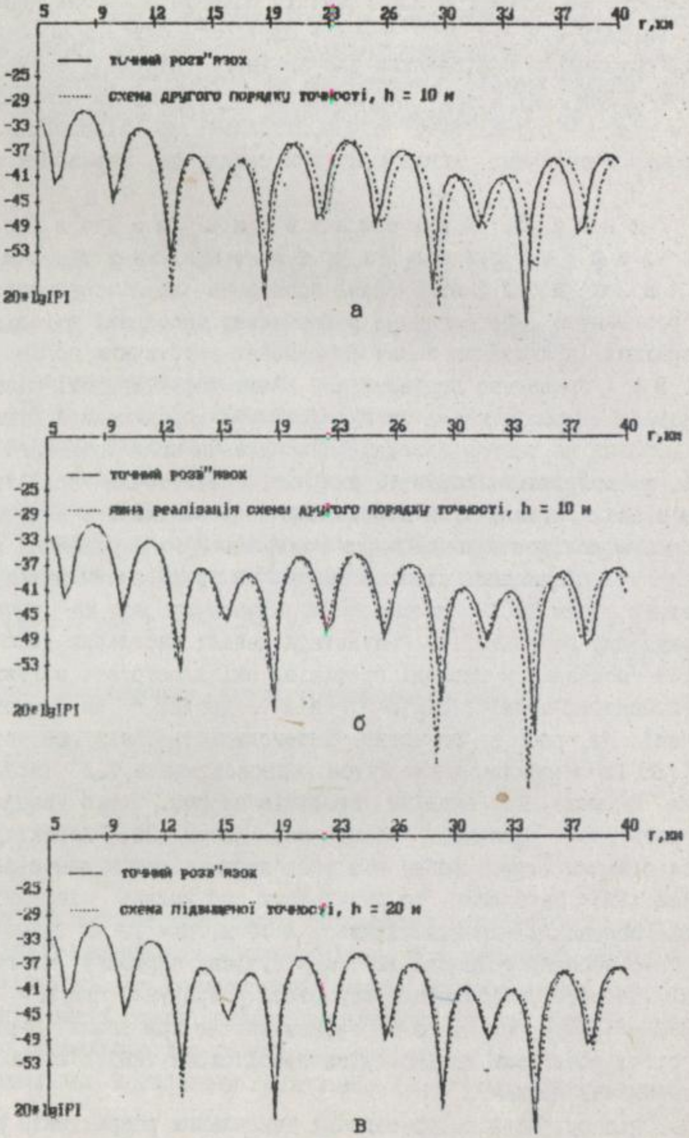


Рис.1. Інтенсивність поля на горизонті z=120 м для 5 мод

ніж неявна двошарова схема (26). При цьому задачу (17), враховуючи обмеження на крок h, доцільно використовувати при розрахунках полів у випадку малих кутів поширення енергії і при необхідності врахування прямих і обернених хвиль у хвилеводі. Різницева схема підвищеного порядку точності (27) має значну перевагу над схемою другого порядку. Особливо відчутно ця перевага проявляється на грубій сітці по вертикальному напрямку, що має велике значення в практичних задачах.

В § 2 – §3 розглядається постановка та методи розв'язання задач формування заданих структур акустичного поля в неоднорідних хвилеводах. Задачі формування акустичних полів у двовимірному осесиметричному хвилеводі
$\bar{G} = G \cup \Gamma = (r \geq r_0 , 0 \leq z \leq H)$ формулюються як задачі мімінімізації функціоналів

$$I_1(u) = \int_0^H \Big[\alpha(z)|p(L,z) - p_0(z)|^2 + \gamma(z)\ |u(z)|^2 \Big]dz \ , \quad (30)$$

$$I_2(u) = \int_0^H \Big[\alpha(z)(|p(L,z)| - |p_0(z)|)^2 + \gamma(z)|u(z)|^2 \Big]dz, \quad (31)$$

$$I_3(u) = \int_0^H \Big[\alpha(z)(|p(L,z)|^2 - J_0)^2 + \gamma(z)|u(z)|^2 \Big]dz \ , \quad (32)$$

за умови, що $p(r,z)$ являється розв'язком крайової задачі

$$2ik_0\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k_0^2(n^2(r,z) - 1 + i\nu(r,z))p = 0 \ ,$$
$$(r,z) \in G, \quad (33)$$
$$p\Big|_{r=r_0} = u(z), \quad p\Big|_{z=0} = p\Big|_{z=H} = 0 \ .$$

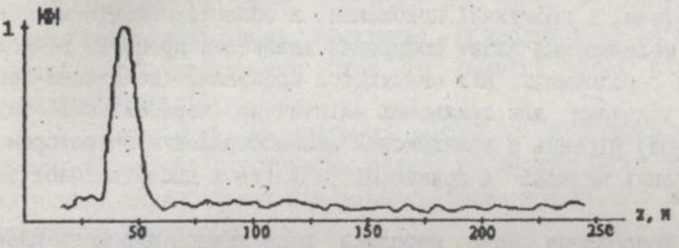
Подаючи керування у вигляді $u(z) = |u|exp(iv)$, в роботі сформульовані задачі амплітудно-фазового, амплітудного та фазового керування, для яких потрібно знайти таке $u(z) \in U_1$ (відповідно $|u| \in U_2$, $v \in U_3$), яке мінімізує критерії $I_k(u)$, $k = 1,2,3$ при обмеженнях (33).

Для функціоналів (30)-(32) установлено диференційованість, одержано співвідношення для градієнтів і запропоновано для мінімізації градієнтну процедуру з чисельною реалізацією градієнтів за допомогою розроблених різницевих схем.

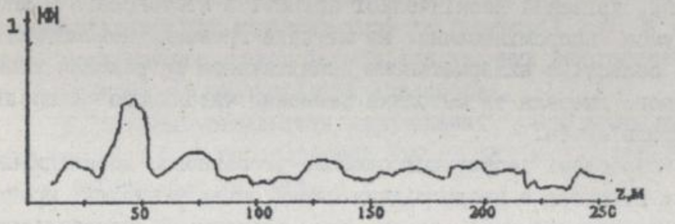
Запропонована методика дослідження широкого кола оптимізаційних гідроакустичних задач була апробована при розв'язанні деяких актуальних прикладних задач, зокрема, задачі фокусування акустичної енергії в задану область хвилевода. В § 3 зазначена задача математично формулюється як задача знаходження мінімуму функціонала (30), де $p_0(z)$ - задане поле розподіленого по осі z точкового джерела з координатами (r^0, z^0), а $\gamma(z)$ визначає апертуру антени. Моделювання сфокусованого поля проведено з використанням схеми підвищеного порядку точності для чисельної реалізації градієнтів.

Результати чисельного моделювання сфокусованого поля в залежності від відстані між антеною і точкою фокусування, протяжності джерела, частоти та інших параметрів хвилевода дозволяють провести аналіз ефективності фокусування. Зокрема, для заданого поля у вигляді гауссового джерела аналіз впливу лінійних розмірів випромінюючої антени проводився на частоті f = 100 Гц в хвилеводі з глибиною 250 м. В околі (r^0, z^0) визначалось положення максимуму $(\tilde{r}, \tilde{z})$, а потім будувався графік функції $|\Phi(\tilde{r}, z)|$, $\Phi(r,z) = H_0^{(1)}(k_0 r) p(r,z)$. Результати розрахунку модуля поля $|\Phi(\tilde{r}, z)|$ у вертикальній площині для двох різних значень положення антени (l_a = 250 м, l_a = 150 м) показані на рис.2,а,б відповідно. Аналіз розрахунків свідчить, що центр фокальної плями знаходиться в околі точки (r^0, z^0) і найкраще фокусування має місце при повному перекритті хвилевода антеною. Зменшення розмірів антени l_a веде до погіршення якості фокусування. Одночасно появляються побічні інтерференційні викиди, причому рівень інтерференційних максимумів зростає і досягає значення поля в околі фокальної плями.

Залежність профілю поля від дистанції між фокальною плямою і антеною показана на рис.3, де приведені вертикальні розрізи поля при таких значеннях відстані до антени: 1 - r^0=20 км, 2 - r^0= 40 км. Незважаючи на зменшення $|\Phi_{max}|$ із збільшенням віддалі між фокальною плямою і антеною, на графіках спостерігається чітко виражене фокусування в задану область.



а



б

Рис. 2. Вплив лінійних розмірів антени

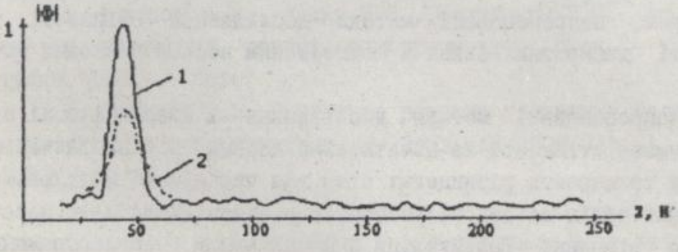


Рис. 3. Вплив дистанції між плямою і антеною

ВИСНОВКИ

Дана дисертація є науковою роботою, в якій розроблені нові теоретичні і практичні положення в області методів математичного моделювання задач поширення хвильових процесів в неоднорідних середовищах, які описуються крайовими (початково-крайовими) задачами для хвильових еліптичних (параболічних типу Шредінгера) рівнянь з комплексним несамоспряженим оператором.

Основні наукові і практичні результати дисертаційної роботи:

1. Розроблена нова методика розв'язання широкого класу задач поширення акустичних хвиль в необмежених неоднорідних областях, що базується на створених математичних моделях різного рівня, урізанні нескінченної області з постановкою відповідних умов випромінювання на штучній границі, декомпозиції вихідної області з використанням аналітичного зображення впливу точкового джерела та методики зшивання чисельного і аналітичного розв'язків.

2. Розроблені теоретичні основи чисельного дослідження хвильових процесів в неоднорідних середовищах у вигляді крайових (початково-крайових) задач для еліптичних (параболічних типу Шредінгера) хвильових рівнянь з комплексним несамоспряженим оператором:

– розроблені та обгрунтовані нові чисельно-аналітичні методи розрахунку хвильових процесів підводної акустики в неоднорідних середовищах на основі розв'язання крайових задач для хвильового рівняння Гельмгольця з комплексним несамоспряженим оператором, запропоновані методи дослідження стійкості та збіжності дискретних задач з комплексним несамоспряженим оператором;

– запропоновані методи дослідження і одержані нові загальні умови стійкості за початковими даними, по правій частині явних тришарових різницевих схем для чисельного моделювання акустичних полів на основі розв'язання задачі Коші для перетвореного рівняння Гельмгольця з комплексним несамоспряженим оператором;

– запропоновані нові методи проведення дослідження стійкості за початковими даними, по правій частині, а також точності різницевих схем для розрахунку широкого класу однонаправлених хвильових процесів підводної акустики, які описуються параболічними рівняннями з комплексним несамоспряженим оператором. Розроблені нові ефективні обчислювальні алгоритми на основі явних двошарових схем та неявної схеми підвищеного порядку точності;

3. Розроблені математичні моделі та обчислювальні алгоритми керування акустичними полями в неоднорідних хвилеводах на основі параболічних хвильових рівнянь з комплексним несамоспряженим оператором.

4. Розроблено алгоритмічне і програмне забезпечення для проведення дослідження широкого класу задач поширення акустичної енергії в підводних хвилеводах із врахуванням складних неоднорідних гідрологічних умов та геометрії дна, в тому числі для розв'язання задач формування заданих акустичних структур в горизонтально-неоднорідних хвилеводах.

5. Основні результати проведених досліджень використані при виконанні і впровадженні НДР та ДКР в НДІ "Атол"(м.Сухумі); КБ "Шторм" (м. Київ).

Автор вважає своїм обов'язком виразити вдячність за цінні поради та постійну увагу при виконанні даної роботи своєму науковому консультанту члену-кореспонденту НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору В.В.Скопецькому.

Основні положення дисертації опубліковані в таких працях:

1. Гладкий А.В., Ляшко И.И., Мистецкий Г.Е. Алгоритмизация и численный расчет фильтрационных схем. - Киев: Наук. думка, 1981. - 281с.

2. Гладкий А.В. Численное решение уравнения Гельмгольца с комплексными коэфициентами // Докл. АН УССР.Сер. А. - 1984. - № 2. - С. 75-78.

3. Гладкий А.В., Скоробагатько А.А. О решении уравнения Гельмгольца с комплексными коэффициентами в открытых областях // Вычисл. и прикладная математика.- 1985. - Вып.55. - С. 16-21.

4. Гладкий А.В. О решении уравнения Гельмгольца в ступенчатых неограниченных областях // Вычисл. и прикладная матема-

тика. - 1985. - Вып.56. - С. 17-21.

5. Гладкий А.В. Решение волновых уравнений разностным методом повышенной точности // Докл. АН УССР.Сер. А. - 1986. - № 4.- С. 33-35.

6. Гладкий А.В., Скопецкий В.В. О численно-аналитическом решении волновых уравнений в оптимизационных задачах // Автоматика. - 1986. - № 5. - С. 78-80.

7. Гладкий А.В. Решение уравнения Гельмгольца в бесконечных неоднородных областях // Оптимизация численных методов решения задач на ЭВМ. - Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН УССР, 1986. - С. 54-57.

8. Гладкий А.В., Ривелис Е.А. Численно-аналитический метод расчета звуковых полей в некоторых неограниченных областях // Математические методы в прикладной акустике. - Ростов-на-Дону, 1986. - С. 78-83.

9. Гладкий А.В. Решение уравнения Гельмгольца в некоторых бесконечных областях // Вычисл. и прикладная математика. - 1987. - Вып.61. - С. 9-11.

10. Гладкий А.В., Ривелис Е.А. О построении целевых функций в задачах проектирования одного класса систем обработки данных // Электронное моделирование.- 1987.- № 6. - С. 98-100.

11. Гладкий А.В. Решение волновых уравнений в неоднородных областях // Докл. АН УССР. Сер.А. - 1987.- №1. - С. 18-21.

12. Ляшко И.И., Гладкий А.В. Устойчивый метод решения волновых уравнений // Докл. АН УССР. Сер.А. - 1987. - № 8. - С. 29-32.

13. Гладкий А.В. Устойчивый метод решения волновых уравнений в неоднородных областях // Вопросы оптимизации вычислений: Тез. докл. Всесоюз. семинара. - Киев, 1987. - С. 48-49.

14. Гладкий А.В. О решении волновых уравнений явным разностным методом // Акустический журнал. - 1989. - Т.35.- № 1.- С. 37-42.

15. Гладкий А.В. Расчет акустических полей разностным методом // Электронное моделирование. - 1989. - № 1. - С. 91-94.

16. Гладкий А.В. Устойчивость разностных схем для волновых уравнений // Докл. АН УССР.Сер. А.- 1989. - № 3. - С.7-10.

17. Ляшко И.И., Гладкий А.В. Исследование устойчивости разностных схем для волновых уравнений параболического типа

// Докл. АН УССР. Сер.А. - 1989. - № 10. - С. 28-31.

18. Гладкий А.В. Численное моделирование акустических полей в неоднородных областях // Акустический журнал. - 1990. - Т.36. - № 4. - С. 625-629.

19. Гладкий А.В. Схемы повышенной точности решения волновых параболических уравнений в неоднородных областях // Волны и дифракция - 90: Материалы X Всесоюз. симпозиума по дифракции и распространению волн. - М., 1990. - Т.1. - С. 27-29.

20. Гладкий А.В. Устойчивость разностных схем в задачах моделирования звуковых полей // Тез. докл. XI Всесоюз. Акустической конф. - М., 1991. - С. 39-42.

21. Гладкий А.В., Скопецький В.В. Стійкість різницевих схем для параболічних апроксимацій хвильового рівняння Гельмгольця // Питання оптимізації обчислень: Тез. доп. симп. - К., 1993. - С. 48.

22. Gladky A.V., Skopetsky V.V. The stability of difference schemes in the problems of simulation of point sources wave fields // Fourth International Colloquium on Differential Equations. - Plovdiv (Bulgaria), 18-22 August, 1993.- P.65.

23. Гладкий А.В., Скопецкий В.В. Об устойчивости разностных схем для параболических аппроксимаций волнового уравнения Гельмгольца // Вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа.: Тез. докл. Междунар. конф. - Ташкент, 1993. - С. 54.

24. Гладкий А.В. Схеми підвищеної точності в задачах оптимізації керування акустичними полями // 1-а Українська конференція з автоматичного керування "Автоматика-94": Тез. доп. - К., 1994. - Ч.1. - С. 132.

25. Сергиенко И.В., Гладкий А.В., Скопецкий В.В. Устойчивость разностных схем для дробно-линейных аппроксимаций уравнения Гельмгольца // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1992. - № 9. - С. 31-34.

26. Сергиенко И.В., Гладкий А.В., Скопецкий В.В. Численное моделирование распределенных систем с несамосопряженным оператором // Кибернетика и сист. анализ. - 1994. - № 6. - С. 51-59.

27. Гладкий А.В., Скопецкий В.В. Явный разностный метод решения нестационарного уравнения Шредингера // Доп. НАН України. - 1995. - № 7. - С. 58-60.

Гладкий А.В. Численно-аналитические методы математического моделирования волновых процессов в неоднородных средах. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.05.02 - математическое моделирование и вычислительные методы в научных исследованиях. Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, Киев, 1996. Защищается 27 научных работ, в которых проводятся исследования в области математического моделирования волновых процессов, описываемых эллиптическими (параболическими типа Шредингера) уравнениями с комплексным несамосопряженным оператором.

Разработаны методы численного исследования задач распространения волновых процессов в неоднородных волноводах. Проведено обоснование устойчивости и сходимости дискретных задач. Разработанное алгоритмическое и программное обеспечение применяется для решения практических задач формирования заданных акустических структур в многомодовых волноводах.

A.V. Gladky. Numerically-analytic methods of mathematical modelling for wave processes in inhomogeneous domains. Doctor of science thesis (physics and mathematics), specialization 01.05.02 - mathematical modelling and calculating methods in scientific analyses. V.M.Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 1996. The 27 scientific works are defended. There are investigations in domain of mathematical modelling for wave processes in these works. Processes are described by wave elliptical (parabolic of the Schrodinger type) equations with complex non-self-conjugate operator.

Methods are elaborated for numerical investigation of problems of spreading wave processes in inhomogeneous waveguides.The stability and convergence of discrete problems are investigated. To solve practical problems of formation of definite acoustic structures in multi-mode waveguids it is proposed to apply the elaborate algorithmical and program ensuring.

Ключові слова: крайові (початково-крайові) задачі, комплексний несамоспряжений оператор, метод скінченних різниць, стійкість різницевих схем, акустичний тиск, хвилевод.

Підп. до друку 09.02.96. Формат 60x84/16. Папір для розмн. ап.
Офс. друк. Ум.друк.арк. І,63. Ум.фарб.-відб. І,86. Обл.-вид.арк.2,0.
Тираж І00 прим. Зам. 87.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України
252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40