НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ЩЕПАНЮК Геннадій Вікторович

ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛЬНИХ СИСТЕМ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК В КЛАСИЧНІЙ ТА КВАНТОВІЙ СТАТИСТИЧНІЙ МЕХАНІЦІ

01.01.03 — математична фізика

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

КИЇВ - 1996.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук
РЕБЕНКО О. Л.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук
КОНДРАТЬЄВ Ю. Г.

кандидат фізико-математичних наук
Ус Г. Ф.

Провідна установа: Інститут теоретичної фізики
НАН України, м. Київ.

Захист відбудеться 2-го квітня 1996 року о 15-й годині на засіданні спеціалізованої ради Д 01.66.02 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601, Київ–4, МСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Інституту

Автореферат розіслано 1-го березня 1996 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради,
доктор фізико-математичних наук ЛУЧКА А. Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.

Актуальність теми. Дослідження станів нескінченних систем заряджених частинок є важливою задачею сучасної математичної фізики, яка має як прикладне так і теоретичне значення.

Стани систем заряджених частинок повністю визначаються послідовністю функцій розподілу, в класичному випадку, та елементами редукованої матриці густини — в квантовому. При скінченному числі частинок і об'ємі системи ці функції з математичної точки зору визначаються строго. Для визначення ж функцій розподілу, або як їх ще називають, кореляційних функцій та редукованих матриць густини, що описують нескінченні системи заряджених частинок, необхідно у відповідних виразах для скінченних систем попрямувати (при постійній густині) числю часток і об'єм до нескінченності, тобто виконати так званий термодинамічний граничний перехід.

Для систем з короткодіючими потенціалами ще в 60-ті роки були розроблені потужні методи побудови кореляційних функцій у термодинамічній границі (це роботи Е. Л. Ліба, Дж. Л. Лібовіца, Д. Рюеля, М. М. Боголюбова, Д. Я. Петрини, Б. Л. Хацета та інших). Проблема обґрунтування термодинамічного граничного переходу для систем заряджених частинок досить складна і вимагає розробки та використання нових математичних методів. Суттєві успіхи при дослідженні систем заряджених частинок пов'язані з працями Д. Бріджеса та П. Федербуша (іонні системи), О. Л. Ребенка (іонно-дипольні системи), Т. Імбрі (системи типу желе) та інших. Більшість з цих результатів пов'язані з можливістю представлення функцій розподілу та елементів редукованої матриці густини скінченних систем заряджених частинок у вигляді функціональних інтегралів за гауссовою мірою з наступним дослідженням їх термодинамічної границі методом кластерних розкладів. Ефективність такого підходу базується на його тісному зв'язку з евклідовою теорією поля та використанням фейнманівських інтегралів у квантовій теорії поля, що робить можливим використання напрацьованих там методів та фізичної інтуїції.

Однак слід зазначити, що побудова кластерних розкладів виходячи з представлень функцій розподілу або елементів редукованої матриці густини скінченних систем заряджених частинок функціональними інтегралами за ґауссовими мірами є технічно дуже складною внаслідок того, що ґауссове поле в загальному випадку не є полем з незалежними в кожній точці значеннями. У зв'язку з цим О. Л. Ребенком було запропоноване нове представлення функцій розподілу класичної системи нейтральних частинок функціональними інтегралами за іншою, пуассоновою, мірою. Пуассонове поле вже є полем з незалежними в кожній точці значеннями, що значно спрощує побудову та аналіз кластерних розкладів і за рахунок цього дозволяє сподіватися на одержання результатів, які ще не були отримані в рамках "ґауссового підходу". Ці сподівання великою мірою підкріплюються тим значним розвитком, який дістав в останні роки неґауссовий, і зокрема пуассоновий, нескінченновимірний аналіз зусиллями таких математиків як Й. Іто, І. Кубо, Ю. М. Березанський, Ю. Г. Кондратьєв, С. Альбеверіо, Г. Ф. Ус, Л. Штрайт та інші.

Виходячи з вищесказаного, актуальною представляється задача узагальнення запропонованого О. Л. Ребенком представлення функцій розподілу класичної системи нейтральних частинок на випадок систем заряджених частинок (як класичних, так і квантових) для найбільш загальних потенціалів взаємодії з наступним їх дослідженням.

Мета роботи. Побудувати представлення функцій розподілу та елементів редукованої матриці густини системи заряджених частинок інтегралами за пуассоновими мірами та дослідити існування термодинамічної границі для випадків юкавівського потенціалу взаємодії заряджених частинок з твердою серцевиною та багаточастинкового потенціалу.

Методика досліджень. В роботі використовуються методи евклідової квантової теорії поля та нескінченновимірного пуассонового аналізу.

Наукова новизна дисертації полягає в тому, що в ній вперше

- сформульовані та доведені аналоги теорем Віка (звичайної та узагальненої) для випадку пуассонових полів, що виражають правило, за яким добуток пуассонових полів та добуток їх нормальних добутків виражається через лінійну комбінацію нормальних добутків;
- побудовані представлення функцій розподілу та елементів редукованої матриці густини скінченної системи заряджених частинок з потенціалом, що задовольняє умову стабільності функціональними інтегралами за пуассоновою мірою, причому в квантовому випадку розглянуті статистики Больцмана, Фермі-Дірака та Бозе-Ейнштейна;
- знайдені найбільш слабкі умови на багаточастинковий потенціал взаємодії класичної системи заряджених частинок, що забезпечують існування термодинамічної границі та збіжність кластерних розкладів для систем з багаточастинковою взаємодією.

Теоретична та практична цінність. Одержані результати дають основу для подальшого розвитку статистичної механіки заряджених частинок з застосуванням методів нескінченновимірного пуассонового аналізу і, крім того, можуть бути ефективно використані для розрахунків конкретних термодинамічних величин.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались:

- на міжнародній конференції з теорії операторів та їх застосувань (Регенсбург, Німеччина, липень - серпень 1995 року);
- на міжнародній конференції "*Методи математичної фізики*" (Рахів, Україна, 11-17 вересня 1995 року);
- на семінарі "*Оператори математичної фізики*" відділу функціонального аналізу Інституту математики НАН України (керівник семінару — академік НАН України Ю. М. Березанський);

- на семінарі "*Математичні проблеми статистичної механіки та квантової теорії поля*" відділу математичних методів в статистичній механіці Інституту математики НАН України (керівник семінару — чл.-кор. НАН України Д. Я. Петрина).

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 9 робіт, список яких наведений нижче.

Особистий внесок. Дослідження, представлені в дисертації, є результатом самостійної роботи автора. Вони узагальнюють результати, одержані особисто автором або за участю співавторів. В останньому випадку співавторам не належать ідеї, які знайшли своє відображення в дисертації.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, двох доданків, списку уживаних позначень, списку літератури, що містить 56 найменувань, викладена на 82 сторінках і включає 15 малюнків та велику кількість діаграм.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ.

У **вступі** обґрунтовується актуальність та важливість питань, що розглядаються, подається стислий огляд з історії розвитку теорії нескінченних систем заряджених частинок, стисло викладається зміст роботи та формулюються основні результати дисертації.

В **першій главі** дисертації викладаються основні положення, формули та теореми нескінченновимірного пуассонового аналізу у формі, зручній для подальшого використання.

В *першому параграфі* першої глави розглядається оснащений гільбертів простір $S(T) \subset L_2(T,\lambda) \subset S'(T)$, де $L_2(T,\lambda)$ — простір квадратично інтегровних дійсних функцій, заданих на деякому сепарабельному топологічному просторі T з σ-скінченною борелевою дифузійною мірою $\lambda(\cdot)$ та визначається (означення 1.1) (некомпенсована) пуассонова міра $P_z^T(\cdot)$ на просторі узагальнених функцій повільного зростання $S'(T)$ через її характеристичний функціонал:

$$\int\limits_{S'(T)} dP_z^T(q)e^{i<\varphi,q>} = \exp\left[\int\limits_T d\nu(t)(e^{i\varphi(t)}-1)\right], \qquad (1.1)$$

де $\varphi \in S(T)$, $< \cdot, \cdot >$ позначає спарення в сенсі $L_2(T, \lambda)$, а міра $\nu(\cdot)$ є скінченною та абсолютно неперервною відносно міри $\lambda(\cdot)$, тобто: $d\nu/d\lambda = z \in L_1(A, \lambda)$.

В *другому параграфі* першої глави вводиться простір $\mathbb{L}_2^P = L_2\big(S'(T), dP_z^T\big)$, визначений як простір комплекснозначних квадратично інтегровних відносно міри $P_z^T(\cdot)$ функціоналів на $S'(T)$. Нагадується, що простір $\mathbb{L}_2^P$ включає в себе експоненціальні та мономіальні функціонали (твердження 1.1), а також, що множини $\mathbb{E} = \left\{e^{i<\varphi,q>} \mid \varphi \in S(T)\right\}$ та $\mathbb{P} = \left\{ < \varphi, q > \mid \varphi \in S(T)\right\}$ є тотальними в $\mathbb{L}_2^P$ (тверджения 1.2).

Третій параграф першої глави присвячений формулюванню та доведенню (на основі означеня 1.1 та твердженя 1.2) наступної важливої для подальшого викладення леми:

Лема 1.1. *Для будь-якого $F \in \mathbb{L}_2^P$:*

$$\int\limits_{S'(T)} dP_z^T(q)F[q] = e^{-\nu(T)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{T^n} d\nu(t)_n^1 F\Big[\sum_{j=1}^{n} \delta_{t_j}\Big]. \qquad (1.2)$$

В *четвертому параграфі* першої глави розглядається наступна "кластерна властивість" пуассонової міри, яка робить представлення функцій розподілу та елементів редукованої матриці густини функціональними інтегралами за пуассоновими мірами зручними для побудови кластерних розкладів:

Твердження 1.3–1.4. *Для будь-яких $\Delta, \Delta' \in \mathfrak{B}(T)$ таких, що $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$, та для будь-яких $F, F' \in \mathbb{L}_2^P$ справедлива наступна рівність:*

$$\int\limits_{S'(T)} dP_z^T(q)F[q\chi_\Delta]F'[q\chi_{\Delta'}] = \int\limits_{S'(\Delta)} dP_z^\Delta(q)F[q\chi_\Delta] \int\limits_{S'(\Delta')} dP_z^{\Delta'}(q)F'[q\chi_{\Delta'}],$$

де χ_Δ є індикатором множини Δ.

В *п'ятому параграфі* першої глави наведені формули для моментів міри $P_z^T(\cdot)$, пропонується зручне для розуміння загальної за-

кономірності графічне представлення цих формул, коротко обговорюється зв'язок між моментами та семіінваріантами міри та робиться (твердження 1.5) груба оцінка зверху кількості доданків у формулах для моментів (некомпенсованої) пуассонової міри.
В *шостому параграфі* першої глави формулюється та доводиться (знов на основі означеня 1.1 та твердженя 1.2) наступна лема, що виражає правило інтегрування частинами для (некомпенсованої) пуассонової міри:
Лема 1.2. *Для будь-якого* $F \in \mathbb{L}_2^P$ *та будь-якого* $\varphi \in S(T)$ *справедлива наступна формула*:

$$\int\limits_{S'(T)} dP_z^T(q) < \varphi, q > F[q] = \int\limits_{S'(T)} dP_z^T(q) \int\limits_{T} d\nu(t)\varphi(t)F[q + \delta_t].$$

В *сьомому параграфі* першої глави вводиться означення U_P-перетворення функціоналів $F \in \mathbb{L}_2^P$ за формулою:

$$(U_P F)(\xi) = C_z^T(\xi)^{-1} \int\limits_{S'(T)} dP_z^T(q) F[q] e^{i<q,\xi>},$$

де $C_z^T(\xi)$ — характеристичний функціонал міри $P_z^T(\cdot)$ і $\xi \in S$, доводиться існування оберненого перетворення U_P^{-1} та явно обраховуються U_P- та U_P^{-1}-перетвореня від деяких важливих функціоналів.
У *восьмому параграфі* першої глави визначається (означення 1.3) віківська регуляризація функціоналів $F \in \mathbb{L}_2^P$ за формулою:

$$: F[q] :_P = \left(U_P^{-1} F\left[z e^{i\xi}\right]\right)(q)$$

і наводяться явні формули для віківської регуляризації експоненціального та мономіального функціоналів.
Крім того, доводяться загальна формула для середнього від регуляризованого (за Віком) монома (твердження 1.6):

$$\int\limits_{S'(T)} dP_z^T(q) : \prod_{j=1}^{n} < \varphi_j, q > :_P = \prod_{j=1}^{n} < \phi_j, z >,$$

загальна формула для регуляризованих (за Віком) мономів, або, як ще кажуть, нормального добутку пуассонових полів (твердження 1.7):

$$: \prod_{j=1}^{n} q(t_j) :_P = \prod_{j=1}^{n} \left(q(t_j) - \sum_{i=1}^{j-1} \delta(t_i - t_j) \right) \tag{1.18}$$

та наступна характеристична властивість такого добутку:

Твердження 1.8. Для будь-яких $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \xi_1, \ldots, \xi_m \in S(T)$ справедлива наступна формула:

$$\int_{S'(T)} dP_z^T(q) : \prod_{i=1}^{n} < \varphi_i, q - z > :_P : \prod_{j=1}^{m} < \varphi_j, q - z > :_P =$$

$$= \delta_{m,n} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} < \varphi_i, z\xi_{\pi(i)} >,$$

де $\left\{\pi(1), \ldots, \pi(n)\right\}$ є перестановкою від $\left\{1, \ldots, n\right\}$.

В *дев'ятому параграфі* першої глави за формулою:

$$< \varphi_1, q >< \varphi_2, q > \cdots < \varphi_k, q > = < \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_k, q >$$

визначаються (верхні) "спарення" довільної кількості пуассонових полів та формулюються (з доведенням) аналоги звичайної та узагальненої теорем Віка для випадку пуассонових полів:

Теорема 1.1 (теорема Віка для пуассонових полів). *Звичайний добуток (некомпенсованих) пуассонових полів дорівнює сумі всіх відповідних нормальних добутків зі всіма можливими (верхніми) "спареннями", включаючи нормальний добуток без спарень.*

Теорема 1.2 (узагальнена теорема Віка для пуассонових полів). *Добуток нормальних добутків (некомпенсованих) пуассонових полів дорівнює сумі всіх відповідних нормальних добутків зі всіма можливими (верхніми) "спареннями", що з'єднують (некомпенсовані) пуассонові поля з початково різних нормальних добутків, включаючи нормальний добуток без спарень.*

Наводяться приклади.

Десятий параграф першої глави присвячений формулюванню та доведенню наступної леми, що фактично узагальнює формулу інтегрування частинами, наведену в шостому параграфі.

Лема 1.3. *Для будь-яких функціоналів $\Phi, F \in \mathbb{L}_2^P$ і для будь-якого $\varphi \in S(T)$ справедлива наступна формула:*

$$\int\limits_{S'(T)} dP_z^T(q) :< \varphi, q > \Phi[q] :_P F[q] =$$

$$= \int\limits_{S'(T)} dP_z^T(q) : \Phi[q] :_P \int\limits_T d\nu(t)\varphi(t)F[q+\delta_t].$$

Як наслідок, із леми 1.3 отримується, що

$$\int\limits_{S'(T)} dP_z^T(q) : \prod_{j=1}^n < \phi_j, q >:_P F[q] =$$

$$= \int\limits_{S'(T)} dP_z^T(q) \int\limits_T d\nu(t)_n^1 \prod_{j=1}^n \phi_j(t_j) F\Big[q + \sum_{i=1}^n \delta_{t_i}\Big]. \quad (1.24)$$

В *одинадцятому параграфі* першої глави розглядається узагальнений ізоморфізм Вінера-Іто-Сігала між простором $\mathbb{L}_2^P$ квадратично інтегровних за мірою $P_z^T(\cdot)$ функціоналів та простором Фока

$$\mathcal{F}(T,\nu) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \big(L_2(T,\nu)\big)^{\hat{\otimes} n},$$

що виражається наступною теоремою:

Теорема 1.3. *Для будь-якого $F \in \mathbb{L}_2^P$ існує таке $f \in \mathcal{F}(T,\nu)$, що*

$$F[q] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int\limits_{T^n} d\lambda(t)_n^1 f_n(t_1,\ldots,t_n) : \prod_{j=1}^n \big(q(t_j) - z(t_j)\big) :_P$$

і, навпаки, для будь-якого $f \in \mathcal{F}(T,\nu)$ $F[q]$, що визначено за цією формулою, належить до простору $\mathbb{L}_2^P$.

Доведено (твердження 1.9), що при цьому ізоморфізмі оператор множення на $q(t)$ в просторі $\mathbb{L}_2^P$ переходить в оператор $\hat{q}(t) = \big(\hat{a}^+(t) + z(t)\big)\big(\hat{a}^-(t) + 1\big)$ у просторі Фока $\mathcal{F}(T,\nu)$, де $\hat{a}^+(t)$ та $\hat{a}^-(t)$ є звичайними операторами народження та знищення.

Показано (твердження 1.10), що при ізоморфізмі Вінера-Іто-Сігала нормальному добутку пуассонових полів відповідає нормальне впорядкування операторів $a^+(t)$ та $a^-(t)$, тобто лінійна операція впорядкування операторів народження та знищення при якій всі оператори народження переносяться вліво, а всі оператори знищення — вправо.

В *дванадцятому параграфі* першої глави розглядається компенсована пуассонова міра $\widetilde{P}^T_z(\cdot)$, визначена через наступний характеристичний функціонал:

$$\int\limits_{S'(T)} d\widetilde{P}^T_z(q)e^{i<\varphi,q>} = \exp\Big[\int\limits_T d\nu(t)(e^{i\varphi(t)} - i\varphi(t) - 1)\Big],$$

та вводиться простір $\mathbb{L}^{\widetilde{P}}_2 = L_2\big(S'(T), d\widetilde{P}^T_z\big)$ комплекснозначних квадратично інтегровних за цією мірою функціоналів. Доведено (твердження 1.11), що оператор зсуву

$$T_z : F[q] \to F[q+z]$$

визначає ізоморфізм між просторами $\mathbb{L}^P_2$ та $\mathbb{L}^{\widetilde{P}}_2$.

За допомогою цього ізоморфізму на випадок компенсованих пуассонових полів переносяться всі результати, отримані для некомпенсованих пуассонових полів в перших десяти параграфах першої глави. Зокрема, слід згадати наступну формулу інтегрування частинами для некомпенсованої пуассонової міри:

Лема 1.4. *Для будь-якого функціоналу $\Phi \in \mathbb{L}^{\widetilde{P}}_2$ та для будь-якого $\varphi \in S(T)$ справедлива наступна формула:*

$$\int\limits_{S'(T)} d\widetilde{P}^T_z(q) < \varphi, q > \Phi[q] = \int\limits_{S'(T)} d\widetilde{P}^T_z(q) \int\limits_T d\nu(t)\varphi(t)\Phi[q+\delta_t] -$$
$$- < \varphi, z > \int\limits_{S'(T)} d\widetilde{P}^T_z(q)\Phi[q].$$

Віківська регуляризація функціоналів від компенсованого пуассонового поля природним чином визначається через віківську регуляризацію функціоналів від нескомпенсованого пуассонового поля:

$$:\Phi[q]:_{\widetilde{P}} = T_z : T_z^{-1}\Phi[q] :_P .$$

Характеристична властивість нормального добутку компенсованих пуассонових полів тепер виражається наступною формулою:

$$\int\limits_{S'(T)} d\widetilde{P}_z^T(q) :\prod_{i=1}^{n} <\varphi_i, q>:_{\tilde{P}} : \prod_{i=j}^{m} <\varphi_j, q>:_{\tilde{P}} =$$

$$= \delta_{m,n} \sum_{\pi\in\Theta_n} \prod_{i=1}^{n} \sigma< \varphi_i, z\xi_{\pi(i)} >,$$

що є справедливою для будь-яких $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, $\xi_1, \ldots, \xi_m \in S(T)$ і часто приймається за визначення віківської регуляризації.

Після додаткового визначення нижніх "спарень" довільної кількості пуассонових полів за формулою

$$<\varphi_1, q><\varphi_2, q>\cdots<\varphi_k, q> = <\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_k, z>$$

для компенсованих пуассонових полів формулюються аналоги звичайної та узагальненої теорем Віка:

Теорема 1.4 (теорема Віка для компенсованих пуассонових полів). *Звичайний добуток компенсованих пуассонових полів дорівнює сумі всіх відповідних нормальних добутків зі всіма можливими верхніми та нижніми "спареннями", включаючи нормальний добуток без спарень.*

Теорема 1.5 (узагальнена теорема Віка для компенсованих пуассонових полів). *Добуток нормальних добутків компенсованих пуассонових полів дорівнює сумі всіх відповідних нормальних добутків зі всіма можливими верхніми та нижніми "спареннями", що з'єднують компенсовані пуассонові поля з початково різних нормальних добутків, включаючи нормальний добуток без спарень.*

Узагальнений ізоморфізм Вінера-Іто-Сігала між простором $\mathbb{L}_2^{\tilde{P}}$ та простором Фока $\mathcal{F}(T,\nu)$ тепер дається наступною теоремою:

Теорема 1.6. *Для будь-якого $\Phi \in \mathbb{L}_2^{\tilde{P}}$ існує таке $f \in \mathcal{F}(T,\nu)$, що*

$$\Phi[q] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int\limits_{T^n} d\lambda(t)_n f_n(t_1, \ldots, t_n) : \prod_{j=1}^{n} q(t_j) :_{\tilde{P}}, \qquad (1.38)$$

і навпаки, для будь-якогð $f \in \mathcal{F}(T,\nu)$ $\Phi[q]$, *що визначено за формулою* (1.38) *належить до простору* $\mathbb{L}_2^{\tilde{P}}$.

При цьому ізоморфізмі оператор множення на $q(t)$ в $\mathbb{L}_2^{\tilde{P}}$ переходить в оператор $\hat{q}'(t) = a^+(t)a^-(t) + a^+(t) + z(t)a^-(t)$ в просторі Фока $\mathcal{F}(T,\nu)$, а нормальний добуток компенсованих полів знову відповідає нормальному впорядкуванню операторів народження та знищення.

В **другій главі** дисертації розглядається багатокомпонентна система заряджених точкових частинок в обмеженій замкненій області Λ, що взаємодіють через двохчастинковий потенціал $V(g,g')$, де $g = (\epsilon, \mathbf{r}) \in G = E \times \Lambda$, та будуються представлення функцій розподілу та елементів редукованої матриці густини такої системи функціональними інтегралами за пуассоновими мірами. При цьому відносно потенціалу $V(g,g')$ вважається, що він є вимірною на G^2 функцією та задовольняє наступну умову стабільності:

$$\exists B : \forall n, \forall g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{R}^3 \quad V(g)_n^1 \geq -Bn, \tag{2.1}$$

де $(g)_n^1 = (g_1, \ldots, g_n)$ і функція

$$V(g)_n^1 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} V(g_i, g_j), \tag{2.2}$$

є потенціальною енергією системи n частинок.

В *першому параграфі* другої глави будується представлення пуассоновими інтегралами функцій розподілу відповідної класичної системи, що визначаються за формулою:

$$\rho_\Lambda(g)_m^1 = \Xi_\Lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{G^n} (dg)_{m+n}^{m+1} \prod_{j=1}^{m+n} z(g_j) \exp\left[-\beta V(g)_{m+n} \right], \tag{2.3}$$

де

$$\int_G dg[\ldots] = \sum_{\epsilon \in E} \int_\Lambda d\mathbf{r}[\ldots],$$

β — обернена температура, $z(g) = \left(\frac{m(\epsilon)}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3/2} e^{\beta\mu(\epsilon)}$ — активність, що відповідає частинкам з зарядом ϵ, хімічним потенціалом $\mu(\epsilon)$

та масою $m(\varepsilon)$, а Ξ_Λ — велика статистична сума, що отримується з умови $\rho_\Lambda(\mathbf{r})_0 = 1$.

Основний результат цього параграфу виражає наступна

Теорема 2.1. *Функції розподілу* (2.3) *великого канонічного ансамблю класичної багатокомпонентної системи заряджених частинок в скінченному об'ємі* $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$, *взаємодія яких описується парним потенціалом* (2.2), *що є вимірною функцією та задовольняє умову стабільності* (2.1), *можуть бути представлені у вигляді*:

$$\rho_\Lambda(g)_m^1 = \Xi(\Lambda)^{-1} \int\limits_{S'(G)} dP_z^G(q) : \prod_{i=1}^m q(g_i) : \exp\left\{ -\beta V_\Lambda[q] \right\}, \quad (2.6)$$

де за означенням

$$V_\Lambda[q] = \frac{1}{2} \int\limits_{(\Lambda\times E)^2} dg\, dg' : q(g) V(g,g') q(g') : . \quad (2.7)$$

В *другому параграфі* другої глави будуються представлення пуассоновими інтегралами елементів редукованої матриці густини відповідної квантової системи зі статистикою Больцмана:

$$\rho_\Lambda\big((g)_m^1, (g')_m^1\big) = \Xi_\Lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{G^n} (dg)_{m+n}^{m+1} \prod_{j=1}^{m+n} \tilde{z}(g_j) \times$$

$$\times \exp\left[-\beta H_{m+n}^\Lambda \right] \big((g)_m^1, (g)_{m+n}^{m+1}; (g')_m^1, (g)_{m+n}^{m+1}\big), \quad (2.8)$$

де $\tilde{z}(g) = e^{\beta\mu(\varepsilon)}$ — активність квантової частинки з зарядом ε, $\exp\left[-\beta H_{m+n}^\Lambda \right](\cdot\,;\cdot)$ — ядро оператора $\exp\left[-\beta H_n^\Lambda \right]$,

$$H_n^\Lambda = -\sum_{i=1}^n \frac{\hbar^2}{2m(\varepsilon_i)} \Delta_i^\Lambda + V(g)_n$$

— n-частинковий гамільтоніан і Δ^Λ — оператор Лапласа з умовами Діріхле на границі області Λ.

Використання формули Фейнмана-Каца

$$\exp\left[-\beta H_n^\Lambda \right](g,g')_n = \int\limits_{\left(\Omega_\Lambda^\beta(g,g')\right)_n^1} \left(dW_{g,g'}^{\beta,\Lambda}(\omega) \right)_n^1 \times$$

$$\times \exp\left[-\int_0^\beta V\big(\omega(t)\big)_n dt \right], \quad (2.9)$$

де $W^{\beta,\Lambda}_{g,g'}(\cdot)$ — умовна міра Вінера, що відповідає ядру оператора $\exp\left[\frac{\beta\hbar^2}{2m(\varepsilon)}\Delta^\Lambda\right]$ і вмопачена на множині $\Omega^\beta_\Lambda(g,g') = \left\{\omega \in E \times C[0;\beta] : \omega(0) = g, \omega(\beta) = g', \omega(t) \in G \ \forall t \in [0,\beta]\right\}$ разом з формулами (1.2), (1.24) та (1.18) дає можливість отримати наступний основний результат даного параграфа:

Теорема 2.2. *Елементи редукованої матриці густини* (2.8) *багатокомпонентної квантової системи заряджених частинок зі статистикою Больцмана в скінченному об'ємі* $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$, *взаємодія яких описується парним потенціалом* (2.2), *що є вимірною функцією та задовольняє умову стабільності* (2.1), *можуть бути представлені у вигляді*:

$$\rho_\Lambda\Big((g)^1_m,(g')^1_m\Big) = \Xi(\Lambda)^{-1} \int\limits_{\left(\Omega^\beta_\Lambda(g,g')\right)^1_m} \left(dW^{\beta,\Lambda}_{g,g'}(\omega)\right)^1_m \times$$

$$\times \int\limits_{S'\left(\Omega^\beta_\Lambda\right)} dP^{\Omega^\beta_\Lambda}_{\bar{z}}(q) : \prod_{i=1}^m q(\omega_i) : \exp\Big[-\frac{1}{2} \iint\limits_{\left(\Omega^\beta_\Lambda\right)^2} dW^\beta_\Lambda(\omega) dW^\beta_\Lambda(\omega') \times$$

$$\times : q(\omega) \int\limits_0^\beta V\Big(\omega(t),\omega'(t)\Big)\, dt q(\omega') : \Big],$$

де $dW^\beta_\Lambda(\omega) = dg dW^{\beta,\Lambda}_{g,g}(\omega)$.

В *третьому параграфі* другої глави будуються представлення пуассоновими інтегралами елементів редукованої матриці густини відповідних квантових систем зі статистиками Бозе-Ейнштейна та Фермі-Дірака, що визначаються за формулою

$$\rho_\Lambda\Big((g)^1_m,(g')^1_m\Big) = \Xi_\Lambda^{-1} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \int\limits_{G^n} (dg)^{m+1}_{m+n} \prod_{j=1}^{m+n} \tilde{z}(g_j) \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{m+n}} \eta^\pi \times$$

$$\times \exp\left[-\beta H^\Lambda_{m+n}\right]\Big((g)^1_m,(g)^{m+1}_{m+n};(\pi g')^1_m,(\pi g)^{m+1}_{m+n}\Big), \quad (2.12)$$

де $\eta = +1$ — для статистики Бозе-Ейнштейна, $\eta = -1$ — для статистики Фермі-Дірака, а $\mathfrak{S}_n$ є групою перестановок n елементів. Формула Фейнмана-Каца (2.9), перетворення Жинібра та формули (1.2), (1.24) (1.18) приводять до наступного результату:

Теорема 2.3. *Елементи редукованої матриці густини* (2.12) *багатокомпонентної квантової системи заряджених частинок зі статистикою Бозе-Ейнштейна або Фермі-Дірака в скінченному об'ємі* $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$, *взаємодія яких описується парним потенціалом* (2.2), *що є вимірною функцією та задовольняє умову стабільності* (2.1), *можуть бути представлені у вигляді:*

$$\rho_\Lambda(g)_m = \Xi(\Lambda)^{-1} \sum_{\pi' \in \mathfrak{S}_m} \eta^{\pi'} \sum_{p_1,\dots,p_m=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} \left(p_i \eta^{p_i-1}\right) \times$$

$$\times \int\limits_{\left(\Omega_\Lambda^{p\beta}(g,\pi' g)\right)^1_m} \left(dW^{p\beta,\Lambda}_{g,\pi' g}(\omega)\right)^1_m \int\limits_{S'(\Omega_\Lambda)} dP^{\Omega_\Lambda}_{\hat{z}}(q) : \prod_{i=1}^{m} q(\omega_i) : \times$$

$$\times \exp\Bigg[-\frac{1}{2} \iint\limits_{(\Omega_\Lambda)^2} dW_\Lambda(\omega) dW_\Lambda(\omega') : q(\omega) q(\omega') : \times$$

$$\times \int\limits_0^\beta V\left(\omega(t), \omega'(t)\right) dt + i\pi\theta(-\eta) \int\limits_{\Omega_\Lambda} dW_\Lambda(\omega) \left(p(\omega) - 1\right) q(\omega) \Bigg],$$

де $\hat{z}(\omega) = \tilde{z}^p(g)/p$, $\Omega_\Lambda = \bigcup_{p=1}^{\infty} \Omega_\Lambda^{p\beta}$ *та*

$$\int\limits_{\Omega_\Lambda} dW_\Lambda(\omega)[\dots] = \sum_{p=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_\Lambda^{p\beta}} \hat{z}(\omega) dW_\Lambda^{p\beta}(\omega)[\dots].$$

І нарешті, ***четвертий параграф*** другої глави присвячений обговоренню можливості та доцільності узагальнення результатів, отриманих в трьох попередніх параграфах на випадок багатокомпонентної юнно-дипольної системи.

Третя глава дисертації присвячена дослідженню модельної системи класичних заряджених частинок з твердою серцевиною, що на відстанях, більших за діаметр частинки, взаємодіють через юкавівський потенціал, тобто для якої:

$$V(g, g') = \begin{cases} +\infty, & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \le 2R_0; \\ \epsilon\epsilon' \frac{e^{\varkappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > 2R_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

В *першому параграфі* третьої глави доводиться (твердження 3.1) стабільність потенціалу Юкави з твердими серцевинами (3.1), що дозволяє (теорема 2.1) представити функції розподілу відповідної системи функціональними інтегралами за пуассоновою мірою.

В *другому параграфі* третьої глави вводяться "згладжені" функції розподілу

$$\rho_\Lambda(\phi_m) = \int\limits_{G^m} (dg')^1_m \phi_m(g')^1_m \rho_\Lambda(g')^1_m, \tag{3.3}$$

де "згладжуючі" функції ϕ_m вибираються неперервними і такими, що $\operatorname{supp}\phi_m \subset X_1$, $|X_1| < \infty$.

З урахуванням формули (2.6) згладжені функції розподілу представляються у вигляді

$$\rho_\Lambda(\phi_m) = \Xi(\Lambda)^{-1} \int\limits_{S'(G)} dP_z^G(q) < q^{\otimes m}, \phi_m > \exp\Big\{ -\beta V_\Lambda[q]\Big\}, \tag{3.6}$$

де $V_\Lambda[q]$ задається формулою (2.7).

Третій параграф третьої глави присвячений побудові кластерних розкладів для функцій розподілу скінченної системи класичних заряджених частинок зі стабільним потенціалом взаємодії. Для цього простір $\mathbb{R}^3$, розбивається на одиничні кубики Δ (множина таких кубиків, що належать Λ позначається $\mathfrak{D}_\Lambda$) і будуються послідовності $\mathfrak{X}_n^\Lambda = (X_1, \ldots, X_n)$ та $\mathfrak{Y}_n^\Lambda = (Y_1, \ldots, Y_n)$ таким чином, що $Y_1 = X_1$ і для всіх $i \le 2$ $X_i = X_{i-1} \cup Y_i$, $\quad Y_i \in \mathfrak{D}_{\Lambda \setminus X_i}$. Як допоміжне також вводиться поняття "древесного" графа з n вершинами, під яким розуміється функція $(2, \ldots, n) \xrightarrow{\eta} (1, \ldots, n)$, така що $\eta(i) < i$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Результатом даного параграфа є наступна

Лема 3.1. *Згладжені функції розподілу скінченної багатокомпонентної системи класичних заряджених частинок, які взаємодіють через парний потенціал* (2.2), *що є вимірною функцією та задовільняє умову стабільності* (2.1), *можуть бути представлені у вигляді наступної суми*:

$$\rho_\Lambda(\phi_m) = \sum_{n=1}^{n_\Lambda} (-\beta)^{n-1} \sum_{\mathfrak{X}_n^\Lambda} b_{\mathfrak{X}_n^\Lambda}(\phi_m) f_\Lambda(X_n), \tag{3.10}$$

де за означенням

$$b_{\mathfrak{X}_n^\Lambda}(\phi_m) = \sum_{\eta:|\eta|=n} \int_0^1 (ds)_{n-1} \prod_{i=2}^n (s_{\eta(i)} \dots s_{i-2}) \int_{S'(G)} dP_z^G(q) \times$$

$$\times < q^{\otimes m}, \phi_m > \prod_{i=2}^n V_{\eta(i),i}[q] \exp\left[-\beta V_{X_n}\left(q, \mathfrak{X}_{n-1}^\Lambda, (s)_{n-1}\right)\right], \quad (3.13)$$

$$f_\Lambda(X) = \frac{\Xi(\Lambda \setminus X)}{\Xi(\Lambda)}, \quad (3.7)$$

а величини $V_X\left(q; \mathfrak{X}_{n-1}^\Lambda, (s)_{n-1}^1\right)$ *для будь-яких* $X_n \subseteq X \subseteq \Lambda$, *рекурентно задаються формулою*

$$V_X\left(q; \mathfrak{X}_i^\Lambda, (s)_i\right) = (1 - s_i)\left\{V_{X_i}\left(q; \mathfrak{X}_{i-1}^\Lambda, (s)_{i-1}\right) + \right.$$

$$\left. + V_{X \setminus X_i}[q]\right\} + s_i V_X\left(q; \mathfrak{X}_{i-1}^\Lambda, (s)_{i-1}\right). \quad (3.12)$$

Четвертий параграф третьої глави присвячений доведенню збіжності (в термодинамічній границі) ряду кластерних розкладів (3.10) для "згладжених" функцій розподілу системи, що розглядається. Для цього спочатку, за рахунок введення регуляризованих "зрізаних" потенціалів:

$$V_M(g, g') = \begin{cases} M, & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \le 2R_0; \\ \varepsilon e' \frac{e^{\varkappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > 2R_0, \end{cases}$$

розкривається невизначеність добутку

$$\prod_{i=2}^n V_{\eta(i),i}[q] \exp\left[-\beta V\left(q; \mathfrak{X}_{n-1}, (s)_{n-1}\right)\right]$$

у виразі для $K_{\mathfrak{X}_n}(\phi_m)$ та доводяться три допоміжні оцінки, що виражаються наступними лемами:

Лема 3.2 *Існує така незалежна від об'єму* Λ, *оберненої температури* β *та "древесного" графа* η *константа* C_0, *що справедлива наступна нерівність:*

$$\left(\int_{S'(G)} dP_z^G(q) \prod_{i=2}^n U^2(q, Y_{\eta(i)}, Y_i)\right)^{1/2} \le C_0^{n-1} \prod_{i=2}^n \widetilde{U}_{\eta(i),i} \prod_{i=1}^{n-1} d_\eta(i)!$$

де

$$\bar{U}_{\eta(i),i} = \bar{U}(Y_{\eta(i)}, Y_i) = \sup_{\mathbf{r}\in Y_{\eta(i)}} \sqrt{\int_{Y_i} U^2\big(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\big)d\mathbf{r}'}$$

і $d_\eta(i) = \#\big\{j \mid \eta(j) = i\big\}$ ***позначає число ліній "древесного" графа*** η***, що входять в*** i***-ту вершину.***

Лема 3.3. ***Для будь-якого парного потенціалу, що задовольняє умову стабільності*** (2.1), ***справедлива наступна оцінка:***

$$\left(\int_{S^l(G)} dP_x^G(q)\exp\Big[-4\beta V_{X_n}\big(q;\mathfrak{X}_{n-1},(s)_{n-1}\big)\Big]\right)^{1/4} \le C_1^{|X_1|+(n-1)},$$

де $C_1(\beta) = \exp\Big[\frac{1}{4}\Sigma_{\epsilon\in E}\, z(\epsilon)(e^{4\beta B}-1)\Big]$.

Лема 3.4. ***За умов Леми 3.1 для всіх обмежених*** X ***та*** Λ***, таких що*** $X \subseteq \Lambda \subset \mathbb{R}^3$***, виконується наступна нерівність:***

$$|f_\Lambda(X)| \le e^{c|X|}$$

де $c = \sum_{\epsilon\in E} z(\epsilon)$.

З використанням методу рівнянь типу Кірквуда-Зальцбурга отримується також наступна

Лема 3.5. ***Якщо існують такі неперервні в околі нуля функції*** $K_\phi(\beta)$ ***і*** $K(\beta)$***, що***

$$\sum_{2,\ldots,n}^{\mathbb{R}^3} b_{\mathfrak{X}_n}(\phi_m) \le K_\phi(\beta)\big(K(\beta)\big)^n \tag{3.29}$$

то для будь-якого обмеженого $X \subset \mathbb{R}^3$ ***в сенсі поточкової збіжності існує наступна границя:***

$$f(X) = \lim_{\Lambda\nearrow\mathbb{R}^3} f_\Lambda(X). \tag{3.30}$$

Подвійне використання нерівності Шварца у формулі (3.15) для $K_{\mathfrak{X}_n}(\phi_m)$ разом з лемами 3.2–3.4 дозволяє показати справедливість (при досить малих β) оцінки (3.29), з чого внаслідок леми 3.5 випливає наступна теорема, яка і становить основний результат третьої глави:

Теорема 3.1. *Для достатньо малих β, термодинамічна границя для згладжених функцій розподілу класичної багатокомпонентної системи заряджених частинок з твердими серцевинами, що взаємодіють на відстанях більших за діаметр частинки через потенціал Юкави, існує і може бути представлена у вигляді наступного абсолютно збіжного ряду:*

$$\rho(\phi_m) = \sum_{n=1}^{\infty}(-\beta)^{n-1}\sum_{X_n^{\mathbb{R}^3}} b_{X_n^{\mathbb{R}^3}}(\phi_m) f(X_n), \tag{3.46}$$

де $b_{X_n^{\mathbb{R}^3}}(\phi_m)$ та $f(X)$ задаються формулами (3.13) *та* (3.30).

В **четвертій главі** дисертації досліджується класична багатокомпонентна система заряджених частинок з багаточастинковою взаємодією

$$V(x)_n^1 = \sum_{p=2}^{M} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} V_p(x_{i_1},\ldots,x_{i_p}), \tag{4.2}$$

що задовольняє умову стабільності (2.1).

В результаті формулюється найбільш слабка та фізично зрозуміла умова "експоненційного в інтегральному сенсі" спадання потенціалу взаємодії, яка забезпечує збіжність кластерних розкладів для функцій розподілу відповідної безмежної системи.

Перший параграф четвертої глави присвячений узагальненню твердження теореми 2.1 на випадок систем з M-частинковою взаємодією:

Теорема 4.1. *Функції розподілу* (2.6) *великого канонічного ансамблю класичної багатокомпонентної системи заряджених частинок в скінченному об'ємі $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$, взаємодія яких описується M-частинковим потенціалом* (4.2), *що є вимірною функцією та задовольняє умову стабільності* (2.1), *можуть бути представлені у вигляді* (2.6), *де*

$$V_\Lambda[q] = \sum_{p=2}^{M}\frac{1}{p!}V_p(q;\{\Lambda\}^p), \tag{4.3}$$

$\{\Lambda\}^k = \overbrace{\Lambda,\ldots,\Lambda}^{k \text{ разів}}$ *і для будь-яких $Y',\ldots,Y^{(p)} \subset \mathbb{R}^3$:*

$$V_p(q;Y',\dots,Y^{(p)}) = \int\limits_{Y'\times E} dg' \dots \int\limits_{Y^{(p)}\times E} dg^{(p)} : q(g')\cdots q(g^{(p)}) : \times \\ \times V_p(g',\dots,g^{(p)}).$$

В *другому параграфі* четвертої глави будуються кластерні розклади для функцій розподілу класичної багатокомпонентної системи заряджених частинок з багаточастинковою взаємодією, які відрізняються від кластерних розкладів для систем з парним потенціалом тим, що тепер будь-яка з множин $Y_2,\dots,Y_n$ може бути як одиничним кубиком, так і об'єднанням двох, трьох і так далі, до $(M-1)$ таких кубиків:

$$Y_i = \begin{cases} \Delta_i^1, & \Delta_i^1 \in \mathfrak{D}_{\Lambda\setminus X_{i-1}}; \\ \Delta_i^1 \cup \Delta_i^2, & \Delta_i^1, \Delta_i^2 \in \mathfrak{D}_{\Lambda\setminus X_{i-1}} \text{ і } \Delta_i^1 \neq \Delta_i^2; \\ \dots \\ \bigcup\limits_{p=1}^{M-1}, & \Delta_i^1,\dots,\Delta_i^{M-1} \in \mathfrak{D}_{\Lambda\setminus X_{i-1}} \text{ і } \Delta_k^1 \neq \Delta_l^2 \text{ для } k \neq l. \end{cases}$$

Основний результат цього параграфа дає наступна

Лема 4.1. *Згладжені функції розподілу скінченної багатокомпонентної системи класичних заряджених частинок з M-частинковою взаємодією* (4.2), *що задовольняє умову стабільності* (2.1), *можуть бути представлені у вигляді* (3.10), *де* $b_{X_n}(\phi_m)$, $f_\Lambda(X)$ *та* $V_X\left(q, \mathfrak{X}_{n-1}^{\Lambda}, (s)_{n-1}\right)$ *задаються відповідно формулами* (3.13), (3.7) *та* (3.12), *а під виразом* $V_{i,j}[q]$ *слід розуміти:*

$$V_{i,\dots,j}[q] = \sum_{p=|Y_j|+1}^{M} \sum_{\substack{p_i+\dots+p_j=p \\ p_i>0,\,p_j>0}} \sum_{\substack{p_i^1+\dots+p_i^{|Y_i|}=p_i \\ \dots \\ p_j^1+\dots+p_j^{|Y_j|}=p_j \\ p_j^1,\dots,p_j^{\sigma_j}>0}} \frac{1}{p_i^1!\cdots p_i^{|Y_i|}!\cdots p_j^{|Y_j|}!} \times \\ \times V_p\left(q;\{\Delta_i^1\}^{p_i^1},\dots,\{\Delta_i^{|Y_i|}\}^{p_i^{|Y_i|}},\dots,\{\Delta_j^{|Y_j|}\}^{p_j^{|Y_j|}}\right).$$

Як зручний метод оперування з досить громіздкими сумами, що виникають при цих розкладах, пропонується відповідна діаграмна техніка та вводиться поняття "розширеного" древесного графа.

В *третьому параграфі* четвертої глави дається наступне означення "експоненційного в інтегральному сенсі" спадання багаточастинкового потенціалу взаємодії:

Означення 4.1. Нехай $\mathrm{dist}(\Delta, \Delta')$ позначає відстань між центрами кубиків Δ і Δ'. Будемо говорити, що M-частинковий потенціал взаємодії "експоненційно в інтегральному сенсі" спадає на безмежності, якщо для деякого $\alpha > 0$

$$\tilde{v} = \max_{\Delta \in \mathfrak{D}_{\mathbb{R}^3}} \sum_{p=2}^{M} \sum_{\Delta', \ldots, \Delta^{(p-1)} \in \mathfrak{D}_{\mathbb{R}^3}} \bar{V}_{\Delta, \Delta', \ldots, \Delta^{(p-1)}} \, e^{\alpha \, \mathrm{diam}\{\Delta, \Delta', \ldots, \Delta^{(p-1)}\}} < \infty$$

де

$$\bar{V}(\Delta_1, \ldots, \Delta_p) = \max_{1 \le l \le p-1} \max_{\pi \in \mathfrak{S}_p} \sup_{\substack{g_{\pi(k)} \in \Delta_{\pi(k)} \times E \\ \forall k = 1, \ldots, l}} \times$$
$$\times \Big(\int_{\Delta_{\pi(l+1)}} dg_{\pi(l+1)} \cdots \int_{\Delta_{\pi(p)}} dg_{\pi(p)} V_p^2(x_1, \ldots, x_p) \Big)^{1/2}$$

і $\mathrm{diam}\left\{\Delta^{(1)}, \ldots, \Delta^{(p)}\right\} = \max_{1 \le i < j \le p} \mathrm{dist}(\Delta_i, \Delta_j)$, та формулюється основний результат четвертої глави:

Теорема 4.2. *Нехай M-частинковий потенціал взаємодії класичної багатокомпонентної системи заряджених частинок задовольняє умову стабільності* (2.1) *та експоненційно в інтегральному сенсі спадає на безмежності. Тоді, при досить малих β, термодинамічна границя для згладжених функцій розподілу такої системи існує та може бути представлена у вигляді абсолютно збіжного ряду* (3.46), *де* $b_{X_n^{\mathbb{R}^3}}(\phi_m)$, $f(X)$ *та* $V_X\big(q; X_{n-1}^{\mathbb{R}^3}, (s)_{n-1}\big)$ *задаються формулами* (3.13), (3.30) *та* (3.12) *відповідно з* $V_{i,\ldots,j}[q]$ *замість* $V_{i,j}[q]$.

Четвертий параграф четвертої глави присвячений доведенню збіжності (в термодинамічній границі) ряду кластерних розкладів для

функцій розподілу класичної багатокомпонентної системи заряджених частинок з багаточастинковою взаємодією (4.2).
Це доведення має деякі спільні риси з тим, що було проведено в попередній главі для випадку парного потенціалу взаємодії. Так, леми 3.4 та 3.5 залишаються справедливими і для багаточастинкового випадку, лема 3.3 узагальнюється майже без змін (лема 4.3), а замість леми 3.2 використовується наступне схоже твердження:
Лема 4.2. ***Існує така незалежна від об'єму Λ та "розширеного" древесного графа $\tilde{\eta}$ константа $\tilde{C}$, що***

$$\left(\int\limits_{S^l(G)} dP_z^G(q) \prod_{i=2}^{n} V^2_{\tilde{\eta}(i)}[q] \right)^{1/2} \leq \tilde{C}^{n-1} \prod_{i=2}^{n} \left(\tilde{V}_{\tilde{\eta}(i)} \exp\left[\alpha \operatorname{diam}\{\tilde{\eta}(i)\} \right] \right),$$

де $\operatorname{diam}\{\tilde{\eta}(i)\} = \operatorname{diam}\left\{ \Delta^1_{\tilde{\eta}(i)}, \ldots, \Delta^{|Y_{\tilde{\eta}(i)}|}_{\tilde{\eta}(i)}, \ldots, \Delta^1_i, \ldots, \Delta^{|Y_i|}_i \right\}$.
Зазначимо, що для випадку M-частинкової взаємодії доведення оцінки (3.29) є значно складнішим ніж у випадку парного потенціалу взаємодії і проводиться з додатковим залученням процедури пересумування "розширених" древесних графів, яка докладно пояснюється на численних малюнках.
Доданок 1 доповнює доведення стабільності потенціалу Юкави з твердими серцевинами більш детальним розглядом питання, а додаток 2 містить доведення допоміжного (для доведення Леми 4.3) твердження.

Основні результати та висновки:

1. Сформульовані та доведені аналоги теорем Віка (звичайної та узагальненої) для випадку пуассонових полів, що виражають правило, за яким добуток пуассонових полів та добуток їх нормальних добутків виражається через лінійну комбінацію нормальних добутків.
2. Побудовані представлення функцій розподілу та елементів редукованої матриці густини скінченної системи заряджених частинок з потенціалом, що задовольняє умову стабільності. В

квантовому випадку розглянуті статистики Больцмана, Фермі-Дірака та Бозе-Ейнштейна.

3. Виходячи з побудованого представлення функцій розподілу скінченної системи заряджених частинок з двохчастинковим потенціалом взаємодії, що задовольняє умову стабільності, побудовані кластерні розклади та доведена їх збіжність в термодинамічній границі для випадку юкавівського потенціалу взаємодії частинок з твердою серцевиною.
4. Знайдені найбільш слабкі умови на багаточастинковий потенціал взаємодії класичної системи заряджених частинок, що забезпечують існування термодинамічної границі та збіжність кластерних розкладів для систем з багаточастинковою взаємодією.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Щепанюк Г. В. *Представлення пуассонівськими інтегралами функцій розподілу та діагональних елементів редукованої матриці густини систем заряджених частинок.* // Доповіді НАН України - 1995. - N 4. - С. 21-24.
2. Shchepan'uk G. V. *Poisson fields and distribution functions in statistical mechanics of charged particles.* // Ukrainian Mathematical Journal - 1995. - **47**, no. 5. - P. 710-719.
3. Lytvynov E. W., Rebenko A. L. and Shchepan'uk G. V. *Wick theorems in non-Gaussian white noise calculus.* // Reports on Mathematical Physics - 1996. - **37**, no. 1. - P. 157-172.
4. Щепанюк Г. В. *Пуассонівські поля та функції розподілу в статистичній механіці заряджених частинок.* - Київ, 1994. - 15 с. - (Препринт / Інститут математики НАН України; 94.17).
5. Rebenko A. L. and Shchepan'uk G. V. *The convergence of cluster expansion for continuous systems with many-body interaction.* - Bielefeld, 1995. - 16 p. - (Preprint BiBoS no. 690/6/95; submitted to Journal of Statistical Physics).

6. Литвинов Є. В., Ребенко О. Л., Щепанюк Г. В. *Теореми Віка в неґауссовому аналізі білого шуму.* – Київ, 1995. – 25 с. – (Препринт / Інститут математики НАН України; 95.7).
7. Lytvynov E. W., Rebenko A. L. and Shchepan'uk G. V. *Quantum compound poisson processes and white noise calculus.* – Bielefeld, 1995. – 44 p. (Preprint BiBoS no. 712/12/95; submitted to Reports on Mathematical Physics).
8. Shchepan'uk G. V. and Rebenko A. L. *Poisson field approach to classical statistical mechanics of charged balls with Yukawa interaction.* – Kyiv, 1995. – 42 p. – (Preprint N 95.9 / Institute for Mathematics of Ukrainian National Science Academy; to appear in Proceedings of the International Workshop "Methods of Mathematical Physics" in Rakhiv, (Ukraine), at 11–17 September 1995).
9. Rebenko A. L. and Shchepan'uk G. V. *Wick's theorem for λ,θ-fields.* // Book of Abstracts of International Workshop on Operator Theory and Applications, Regensburg (Germany), 1995. – P. 65.

Щепанюк Г. В. "Исследование модельных систем заряженных частиц в классической и квантовой статистической механике." Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика. Институт математики НАН Украины, Киев, 1996.

Защищается диссертация, посвящённая исследованию модельных систем заряженных частиц в классической и квантовой статистической механике методами бесконечномерного пуассонового анализа. В диссертации построены новые представления функций распределения классических систем заряженных частиц и елементов редуцированной матрицы плотности квантовых систем заряженных частиц функциональными интегралами по пуассоновым мерам. Исходя из полученных представлений, для двух практически важных моделей классической системы заряженных частиц построены кластерные разложения и доказана их абсолютная сходимость в термодинамической границе.

Shchepan'uk G. V. "Investigation of model systems of charged particles in classical and quantum statistical mechanics."
Doctor of Philosophy thesis, speciality 01.01.03 – mathematical physics.
Institute for Mathematics of Ukrainian National Science Academy, Kyiv, 1996.
The thesis to be defended is devoted to the investigation of model systems of charged particles in classical and quantum statistical mechanics by means of methods of infinite dimensional Poisson analysis. In the thesis are constructed new representations for distribution functions of classical systems of charged particles and reduced density matrix elements of quantum systems of charged particles via functional Poisson integrals. By using this representations, cluster expansions for two practically important model systems of charged particles are constructed and their absolute convergence is proved.

Ключові слова: заряджені частинки, функції розподілу, елементи редукованої матриці густини, міра Пуассона, функціональне інтегрування, термодинамічна границя, кластерні розклади.

Підписано до друку 28.02.96. Формат 60 × 84/16. Папір друк. Офс. друк. Ум. друк. арк. 1,63. Ум. Фарбо-відб. 1,63. Обл.-вид. арк. 1,0. Тираж 100 пр. Зам. 54

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська 3.