

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
УКРАЇНИ  
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

*На правах рукопису*

УДК 539.3

**РУДАКОВ Костянтин Миколайович**

**ЕФЕКТИВНІ АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗКІВ  
ТРИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ  
МЕХАНІКИ ДЕФОРМОВАНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА  
МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

Спеціальність 05.02.07 - Механіка деформівного  
твердого тіла

**АВТОРЕФЕРАТ**  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
доктора технічних наук

КИЇВ - 1996



00759712 (V)

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано на кафедрі динаміки і міцності матеріалів  
 опору матеріалів Національного Технічного Університету України  
 "Київський політехнічний інститут".

- Науковий консультант:** - Заслужений діяч науки УССР,  
 доктор технічних наук, професор  
 Можаровський М.С.
- Офіційні опоненти:** - Член-кореспондент НАН України,  
 доктор технічних наук, професор  
 Шевченко Ю.М.
- Доктор технічних наук, професор  
 Квітка О.Л.
- Доктор технічних наук, професор  
 Сахаров О.С.
- Провідне підприємство:** - ЗМКБ "Прогрес", м. Запоріжжя

Захист відбудеться 08.04 1996 р. на засіданні спеціалі-  
 зованої вченої ради Д01.02.18 в Національному технічному  
 університеті України "Київський політехнічний інститут",  
 252056, м. Київ-56, пр. Перемоги, 37, корп. №1, ауд. №166.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці університету.

Автореферат розіслано " 7 " 03 1996 р.

Вчений секретар  
 спеціалізованої вченої ради,  
 кандидат технічних наук

Боронко О.О.

Актуальність проблеми

Багато елементів і вузлів сучасних агрегатів енергетичної, транспортної, криогенної, космічної та іншої техніки зазнають у процесі експлуатації значних термосилових впливів. Загальна тенденція розвитку техніки, що полягає в неухильному підвищенні її експлуатаційних характеристик (одиночної та питомої потужності, ресурсу, надійності та інш.), приводить, зокрема, до масових розрахунків на міцність.

Умови спільної роботи сполучених елементів машин зумовлюють велику кількість контактних взаємодій, причому часто саме зони контакту є слабким місцем цих елементів, що значною мірою визначає міцність конструкції.

Високий рівень розвитку ЕОМ дозволяє суттєво наблизити до реальних створювані розрахункові схеми та враховані в них умови навантаження, що значно підвищує ступінь вірогідності одержаних результатів, дозволяє переходити від натурних випробувань до розрахункових, тобто модельних. Але одночасно різко зростає обсяг інформації, яку перероблює ЕОМ, алгоритми стають все складнішими та більш громіздкими. Для зниження часових витрат при проведенні таких розрахунків необхідно приділяти велику увагу ефективності програмних продуктів, що застосовуються. Це досягається шляхом:

- аналізу алгоритмів і виявлення серед них ефективніших;
- створення нових економічних алгоритмів;
- створення програмних продуктів, що реалізують нові ідеї та алгоритми.

Суттєвий внесок у розвиток алгоритмів методу скінченних елементів (МСЕ) зробили такі вчені Західної Європи і Америки, як: R.Courant, O.Zienkiewicz O.C., B.Irons, J.H.Argyris, G.Streng, G.Fix, J.T. Oden, K.J. Bathe, E.L. Wilson, J.Robinson, J.Altенbach, I.Babuska, E.Hinton, R.T.Cheng, Y.Yamada, R.S.Varga; вчені СРСР: І.А.Біргер, Л.А.Розін, С.Г.Міхлін, В.А.Постнов, І.Я.Хархурім, Е.М.Морозов, Г.П.Нікішков, М.М.Шапошніков, А.Г.Угодчиков, О.П.Синицин, Ю.Г.Коротких; вчені Київської школи: Ю.М.Шевченко, В.Г.Савченко, В.В.Піскун, Д.В.Вайнберг, О.С.Сахаров, В.Н.Кислюккий, О.Л.Квітка, П.П.Ворошко, О.С.Цибенко, С.С.Уманський та багато інших.

Розмірність крайової задачі (одно-, дво- чи тримірність) суттєво впливає на чисельні алгоритми і побудову пакетів програм, що їх реалізують. Тому кількість програм для чисельних розрахунків тримірних крайових задач є малою, а для контактних задач вони

існують у світі буквально в одиничних екземплярах.

Не зважаючи на велику кількість публікацій з означеної проблеми, дослідження у цьому напрямі є необхідними та актуальними, оскільки поєднання ефективних методів розрахунків з широкими можливостями опису термомеханічних властивостей матеріалів (термопластичність, повзучість, залежність від температури) і типів крайових умов (силові, кінематичні, температурні, контактні КУ) дозволить проводити розрахунки елементів машин на міцність, максимально наближені до справжніх умов, тобто різко зменшити час на відпрацювання конструкції нової техніки, підняти рівень її сертифікування.

Метою дисертації є: на ґрунті аналізу розрахункових схем, методів і алгоритмів механіки деформівного твердого тіла та чисельної математики розробити у межах методу скінченних елементів нові ефективні алгоритми міцносних статичних розрахунків тримірних елементів конструкцій, що працюють в умовах термомеханічного навантаження і контактної взаємодії.

Наукова новизна здобутих у дисертації результатів полягає у наступному:

- запропоновано ефективні алгоритми чисельного розв'язання крайової задачі термопластичності і повзучості з безітераційним і точним врахуванням впливу температури на пружні характеристики матеріалу, встановлено обмеження згори величини часового кроку для задачі повзучості при використанні теорії зміщення;

- розвинено ітераційний метод розв'язання крайових контактних задач – метод сполучення розв'язків, зокрема йому надано універсальність: розвинено алгоритми призначення ефективних параметрів збіжності методу для контактних задач теплопровідності і термопружності, проведено узагальнення методу на крайові контактні задачі, в яких одне з контактуючих тіл є обмеженим у своїх переміщеннях тільки зоною контакту;

- запропоновано ефективний і універсальний алгоритм знаходження поточних (змінних) зон контакту тримірних контактуючих тіл;

- запропоновано ефективний і універсальний алгоритм суміщення зон контакту і врахування можливого жорсткого зміщення і повороту одного контактуючого тіла відносно другого в результаті початкового навантаження тіл;

- запропоновано алгоритм визначення напрямку дотичного на-

вантаження або деформації на контактній поверхні тримірного тіла;

– запропоновано алгоритм реалізації моментної схеми в ізопараметричному скінченному елементі (МССЕ);

– запропоновано алгоритм виводу значень фізичних величин з гаусових точок інтегрування всередині тримірного скінченного елемента (СЕ) на його поверхні (у вузлі елемента).

Практична цінність роботи полягає в тому, що розроблені ефективні алгоритми реалізовано у вигляді програмних комплексів ДКА і ОКА, що використовуються та можуть використовуватися в проектуванні різноманітних об'єктів авіабудування і машинобудування у НВО "Мотор-Січ", ЗМКБ "Прогрес", АНТК "АНТОНОВ" та інші.

Дисертацію виконано відповідно до планів наукових досліджень кафедри динаміки і міцності машин та опору матеріалів Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут" у складі тем: N 554 (з ЗВО "Моторобудівельник", м. Запоріжжя, 1985 - 1990 рр.), Держрегістраційний N 01860011793, координованої АН УРСР і МінВУЗом УРСР; N 364 (з НДІД, м. Москви, 1986 - 1987 рр.), Держрегістраційний N 01860006008, координованої АН СРСР і АН УРСР; N 5.52.03/050-93 (1993 - 1994 рр.) Держрегістраційний N 0195U 006235, координованої ДКНТ України.

На захист вивнесено:

– ефективні алгоритми чисельного розв'язання крайової задачі термопластичності і повзучості з безітераційним і точним урахуванням впливу температури на пружні характеристики матеріалу, встановлені обмеження згори величини часового кроку для задачі повзучості при використанні теорії зміцнення;

– розвиток ітераційного методу розв'язання крайових контактних задач — методу сполучення розв'язків: алгоритми призначення ефективних параметрів збіжності методу для контактних задач теплопровідності і термопружності, узагальнення методу на краєві контактні задачі, в яких одне з контактуючих тіл є обмеженим в своїх переміщеннях тільки зоною контакту (йому надано універсальність);

– алгоритми поверхні зони контакту: знаходження змінних зон контакту тримірних контактуючих тіл; суміщення зон контакту і врахування можливого жорсткого зміщення і повороту одного контактуючого тіла відносно другого в результаті початкового навантаження тіл; визначення напрямку дотичного навантаження або деформації на контактній поверхні тримірного тіла;

- алгоритм реалізації моментної схеми в ізопараметричному скінченному елементі;
- алгоритм виносу значень фізичних величин з гаусових точок інтегрування всередині тримірного СЕ на його поверхні (у вузлі).
- результати чисельних досліджень напруженодеформованого стану елементів конструкції при термоспловому та контактному навантаженні.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із вступу, п'яти розділів, заключної частини, списку літератури, що містить 135 найменувань. Загальний обсяг дисертації складає 302 сторінки друкованого тексту, 58 малюнків, 33 таблиці.

#### Апробація роботи.

Викладені у роботі результати доповідалися на ХХ Всесоюзній науковій нараді "Проблеми міцності двигунів" (Москва, 23 - 25 квітня 1984 р.); II Всесоюзному симпозиумі "Міцність матеріалів і елементів конструкції при складному напруженому стані" (Київ, 27 - 29 листопада 1984 р.); ХХII Всесоюзній науковій нараді з проблем міцності двигунів (Москва, 26 - 28 квітня 1988 р.); Міжнародній науково-технічній конференції студентів, молодих вчених і спеціалістів "Молоді вчені в розв'язанні комплексної програми науково-технічного прогресу стран - членів РЕВ" (Київ, 19 - 22 квітня 1989 р.); Міжнародній науковій конференції студентів і молодих наукових співробітників "Приложенне на компютерните технологии в производството" (Варна, 16 - 19.11.1989 р.); ХХIII Всесоюзній науковій нараді з проблем міцності двигунів (Москва, 24 - 26 квітня 1990 р.); Науковій нараді "Термов'язкопружнопластичні процеси деформування в елементах конструкції" (Канев, 27 - 29 травня 1992 р.); I-му Міжнародному симпозиумі українських інженерів-механіків у Львові, (Львів, 18 - 20 травня 1993 р.), на науковому семінарі механіко-машинобудівного факультета Національного технічного університету України (7 лютого 1996 р.), та інші.

Публікації. За темою досліджень було зроблено 31 публікації. В авторефераті наведено 26 основних праць з теми дисертації.

Автор вважає за свій обов'язок висловити подяку науковому консультанту, Лауреатові Державної премії УРСР, Заслуженому діячу науки УРСР, д.т.н., професору Можаровському М.С.

#### ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ.

У вступній частині дисертації обґрунтовано актуальність теми

дисертації, сформульовано мету роботи та методи розв'язання поставленого завдання, викладено основні положення, які автор виносить на захист. Наведено анотований виклад змісту розділів дисертації та сформульовано практичну цінність здобутих результатів.

У першій главі дисертаційної роботи насамперед поставлено задачу нестационарної неув'язної теплопровідності, термопластичності та повзучості, зокрема контактну задачу. При цьому розглянуто тільки ізотропні матеріали, в яких при навантаженнях реалізуються малі деформації.

Відзначено, що задача *теплопровідності* є допоміжною при розгляданні задач термопластичності та повзучості, але важливою, оскільки дає розподіл температур, який, як відомо, дуже впливає на напруженодеформований стан тіла. Диференціальній постановці задачі поставлено у відповідність варіаційну. Мінімізація функціоналу з урахуванням ідеології МСЕ та лінійної апроксимації зміни температури і теплового навантаження в межах часового кроку  $\Delta t$  дає систему алгебраїчних рівнянь

$$([C] + \omega \Delta t [K]) \{\Delta \Theta\} = -\Delta t ([K] \{\Theta\}_\tau - \omega \{R\}_{\tau + \Delta t} - (1 - \omega) \{R\}_\tau); \quad (1)$$

де  $[C]$ ,  $[K]$  – симетричні матриці теплосмвності та теплопровідності;  $\{\Theta\}$ ,  $\{\Delta \Theta\}$  – вектор температури та її приросту;  $\{R\}$  – вектор теплового навантаження;  $\tau$  – час на початок часового етапу, що має протяжність  $\Delta t$ ;  $0 \leq \omega \leq 1$ . Після діагоналізації матриці  $[C]$  цю систему можна розв'язати вельми ефективним методом — розщеплення (Марчук Г.І. та інш.):

$$([C] + \omega \Delta t [K^+]) \{\eta\} = -\Delta t ([K] \{\Theta\}_\tau - \omega \{R\}_{\tau + \Delta t} - (1 - \omega) \{R\}_\tau);$$

$$([C] + \omega \Delta t [K^-]) \{\Delta \Theta\} = [G] \{\eta\}; \quad (2)$$

де  $\{\eta\}$  – проміжний вектор,  $[K^+]$ ,  $[K^-]$  – верхня та нижня трикутні матриці:  $[K] = [K^+] + [K^-]$ .

Рівняння *термопластичності та повзучості* сформульовано у приростах. Згідно з принципом суперпозиції деформацій різного походження повна деформація складається з пружної, теплової, пластичності та повзучості:  $\{\Delta \varepsilon\} = \{\Delta \varepsilon^e\} + \{\Delta \varepsilon^T\} + \{\Delta \varepsilon^p\} + \{\Delta \varepsilon^c\}$ , де  $\{\Delta \varepsilon^T\} = \{\alpha_T\} \Delta \bar{T}$ ;  $\{\alpha_T\}$  – вектор коефіцієнтів лінійного теплового подовження;  $\Delta \bar{T}$  – приріст температури за  $\Delta t$ .

Повний диференціал для закону Гука відносно вектора напружень  $\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon^e\}$ :

$$\{\Delta \sigma\} = [D] (\{\Delta \varepsilon\} - \{\Delta \varepsilon^T\}) + \{\Delta \sigma^T\} - 2G(x^i, T) (\{\Delta \varepsilon^p\} + \{\Delta \varepsilon^c\}) \quad (3)$$

має невідомі

$$\{\Delta\sigma^T\} = \frac{d[D]}{dT} \Delta\bar{T} \{\varepsilon^e\} = \frac{d[D]}{dT} \Delta\bar{T} [D]^{-1} \{\sigma\}; \quad (4)$$

$$\{\Delta\varepsilon^p\} = \Delta\lambda^p \{S\}; \quad \{\Delta\varepsilon^e\} = \Delta\lambda^e \langle \{S\} \rangle. \quad (5)$$

Тут  $2G(x^i, T) = E(x^i, T)/(1 + \mu(x^i, T))$ ;  $E(x^i, T)$  – модуль Юнга,  $\mu(x^i, T)$  – коефіцієнт Пуассона;  $[D]$  – матриця модулів пружності;  $x^i$  – глобальні координати;  $\Delta\lambda^p, \Delta\lambda^e$  – скалярні функції;  $\{S\}$  – вектор-девіатор напружень;  $\langle \{S\} \rangle$  – теж, але проміжний за відрізок часу  $\Delta t$ ;  $T = T_0 + \Delta T$ , де нижній індекс "0" вказує на значення величини на початок етапу навантаження, що розглядається.

У виразі (3) вплив температури на пружні модулі матеріалу, а отже і на напруження, враховується подвійно: при обчисленні власне матриці  $[D]$ , а також третім доданком  $\{\Delta\sigma^T\}$ , у якому не всі складові відомо. Як правило, ця обставина приводить до двох наслідків:

- третій доданок опускається зовсім (більшість алгоритмів);
- невідомий вектор напружень  $\{\sigma\}$  береться з посередньої глобальної ітерації нелінійного алгоритму, тобто із запізнюванням на ітерацію (див., наприклад, праці І.А.Біргера).

В обох випадках врахування температурного впливу на модулі пружності (досить значного) здійснюється наближено. У третій главі дисертації запропоновано, як це зробити безітераційно і точно. Поки що ж будемо вважати, що  $\{\Delta\sigma^T\}$  так чи інакше визначено.

Введемо позначення для відомої частини виразу (3):

$$\{\Delta\sigma^u\} = [D](\{\Delta\varepsilon\} - \{\alpha_T\} \Delta\bar{T}) + \{\Delta\sigma^T\} \quad (6)$$

і введемо до розгляду вектор  $\{\sigma^u\} = \{\sigma\}_0 + \{\Delta\sigma^u\}$ . Тоді

$$\{\sigma\} = \{\sigma\}_0 + \{\Delta\sigma\} = \{\sigma^u\} - 2G(x^i, T)(\{\Delta\varepsilon^p\} + \{\Delta\varepsilon^e\}). \quad (7)$$

Оскільки неповоротні деформації не спричиняють зміни об'єму матеріалу, то в (7) маємо  $\{\sigma_V\} = \{\sigma_V^u\}$ ;  $\{\Delta\sigma_V\} = \{\Delta\sigma_V^u\}$ , де  $\{\sigma_V\} = \{\sigma_V, \sigma_V, \sigma_V, 0, 0, 0\}^T$ ;  $\sigma_V = \sigma_{ii}/3$ . З (7):

$$\{S\} = \{S^u\} - 2G(x^i, T)(\{\Delta\varepsilon^p\} + \{\Delta\varepsilon^e\}); \quad (8)$$

де  $\{S^u\} = \{\sigma^u\} - \{\sigma_V^u\}$ . Це співвідношення – загальне для усіх відомих алгоритмів розв'язку задачі термопластичності та повзучості у приростах.

Диференційній постановці задачі термопластичності та повзучості з урахуванням початкових, силових, кінематичних і контактних

КУ поставлено у відповідність варіаційну. Мінімізація функціоналу згідно з ідеологією МСЕ приводить до нелінійної системи алгебраїчних рівнянь (САР) типу

$$[K]\{\Delta q\} = \{\Delta P\} + \{\Delta P_k\} + \{\Delta R\} + \{\Delta \Phi\} \quad (9)$$

відносно глобального вектора приросту дійсних переміщень  $\{\Delta q\}$ . У (9) позначено зборки за ступенями свободи вузлів:  $[K] = \sum_e [K]_e$ ;  $\{\Delta q\} = \sum_e \{\Delta q\}_e$ ;  $\{\Delta P\} = \sum_e \{\Delta P\}_e$ ;  $\{\Delta P_k\} = \sum_e \{\Delta P_k\}_e$ ;  $\{\Delta R\} = \sum_e \{\Delta R\}_e$ ;  $\{\Delta \Phi\} = \sum_e \{\Delta \Phi\}_e$ ; де  $\{\Delta P\}_e = \{\Delta P\}_O + \{\Delta P\}_P$ ;  $\{\Delta R\}_e = \{\Delta R\}_T + \{\Delta R\}_D$ ;  $\{\Delta \Phi\}_e = \{\Delta \Phi\}_\lambda + \{\Delta \Phi\}_c$ ;

$$[K]_e = \int_{\Omega^e} [B]^T [D] [B] d\Omega; \quad (10)$$

$$\{\Delta P\}_O = \int_{\Omega^e} [o]^T \{\Delta \bar{O}\} d\Omega; \quad \{\Delta P\}_P = \int_{S_e^e} [o]^T \{\Delta \bar{p}\} dS; \quad (11)$$

$$\{\Delta R\}_T = \int_{\Omega^e} [B]^T [D] \{\alpha_T\} \Delta \bar{T} d\Omega; \quad \{\Delta R\}_D = \int_{\Omega^e} [B]^T \{\Delta \sigma^T\} d\Omega; \quad (12)$$

$$\{\Delta P_k\}_e = \int_{S_e^e} [o]^T \{\Delta \bar{p}_v\} dS + \int_{S_e^c} [o]^T \{\Delta \bar{p}_r\} dS; \quad (13)$$

$$\{\Delta \Phi\}_\lambda = \int_{\Omega^e} 2G[B]^T \{\Delta \varepsilon^p\} d\Omega; \quad \{\Delta \Phi\}_c = \int_{\Omega^e} 2G[B]^T \{\Delta \varepsilon^c\} d\Omega. \quad (14)$$

Тут  $[o]$ ,  $[B]$  - матриці функцій форми і диференціювання в СЕ;  $\{\Delta \bar{O}\}$ ,  $\{\Delta \bar{p}\}$ ,  $\{\Delta \bar{p}_v\}$ ,  $\{\Delta \bar{p}_r\}$  - вектори об'ємних, поверхових та поверхових контактних навантажень;  $\Omega^e$ ,  $S_e^e$  - об'єм і поверхня СЕ,  $S_e^c$  - контактна поверхня СЕ.

З декількох методів розв'язання нелінійної САР найефективнішим є метод додаткових напружень (пластичність) та деформацій (повзучість), які легко комбінуються. Нині при цьому користуються модифікованим алгоритмом Ньютон-Рафсона.

Загальний алгоритм набуває такий вигляд (на ґрунті праць Zienkiewicz O.C., Морозова Е.М., Нікішкова Г.П., Манукян К.М., Сапунова В.Т.)

$$\begin{aligned} \{\Delta q\} &= \{0\}; \\ \{\psi^*\} &= \{P\} + \{P_k\} - \sum_e \left( \int_{\Omega^e} [B]^T \{\sigma\}_0 d\Omega - \right. \\ &\quad \left. - \{\Delta R\}_{\Delta T} + \{\Delta R\}_{\Delta D} - \int_{\Omega^e} 2G[B]^T \{\Delta \varepsilon^c\}_0 d\Omega \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \delta\{\Delta q\} = [K^*]^{-1}\{v^*\}; \\
 & \{\Delta q\} = \{\Delta q\} + \alpha(\delta\{\Delta q\}); \\
 & \{\Delta \varepsilon\} = [B]\{\Delta q\}; \quad \delta\{\Delta \varepsilon\} = [B]\delta\{\Delta q\}; \\
 & \{\dot{\sigma}\} = \{\sigma\}(\{\sigma\}_0, \lambda, T, \{\Delta \varepsilon\}, \{\Delta \varepsilon^e\}); \\
 & \{v^*\} = \{P\} + \{P_k\} - \sum \int_{\Omega} [B]^T (\{\dot{\sigma}\} + ([D] - [D^*])\delta\{\Delta \varepsilon\}) d\Omega;
 \end{aligned} \tag{15}$$

ні

Чи досягнуто збіжність ?

↓ так

$$\{q\} = \{q\}_0 + \{\Delta q\}; \quad \{\sigma\} = \{\dot{\sigma}\}.$$

Тут  $\{P\}$ ,  $\{P_k\}$  – глобальні вектори зовнішнього силового та контактного навантаження;  $\{v^*\}$  – глобальний вектор-нев'язка;  $[K^*]$  – матриця жорсткості, розрахована при фіксованій температурі;  $\lambda$  – параметр Оджвіста;  $\{\dot{\sigma}\}$  – вектор прогноз напружень в точці тіла. У третьому рядку  $\{\Delta \varepsilon^e\}_0$  – значення приростів деформацій повзучості  $\{\Delta \varepsilon^e\}$ , яке було б при збереженні на цьому етапі навантаження рівня напружень  $\{\sigma\}_0$ . Інтеграл з  $\{\Delta \varepsilon^e\}_0$  має важливе значення в чисельній сталості методу при наявності деформації повзучості: він надає ту саму сталість, як і в методі дотичних – максимально можливу. Крім того, його наявність різко зменшує число глобальних ітерацій, тобто значно підвищує ефективність алгоритму.

Принципові особливості, що зумовлюють точність та ефективність алгоритму: по-перше, рівняння балансу робіт задовольняється для повних навантажень, а не їхніх приростів, що дуже важливо з точки зору виключення накопичення похибок розрахунку і так званих "невірних розвантажень"; по-друге, застосовано  $\alpha$  – прискорення (Zienkiewicz O.C.), що зменшує кількість глобальних ітерацій, іноді дуже сильно; по-третє, шукані значення  $\{\sigma\}$  формуються лише при досягненні збіжності процесу — так званий алгоритм від рівноважного. Важливо також, що матриця СЛАР залишається незмінною на всіх ітераціях та етапах навантаження.

Далі у першій главі проаналізовано запропоновані у межах МСЕ, а також адаптовані до МСЕ чисельні контактні алгоритми розв'язання крайових контактних лінійних і нелінійних задач. Усіх їх можна умовно розділити на дві групи: спільного та окремого розгляду контактуючих тіл.

Проведено докладний аналіз алгоритмів обох груп, виявлено їхні переваги та недоліки. Зроблено висновок, що перспективніше та в більшості випадків ефективніше працюють алгоритми другої групи: метод сполучення розв'язків (Цвік Л.Б., під керівництвом акад. АН СРСР Соболева С.І.; Канцельсон В.Е., Меншиков В.В., Гнучій Ю.Б.) та методи розподілу областей (узагальнені у книзі Г.І.Марчука: Методы вычислительной математики).

Загальний їхній недолік: кількість контактних ітерацій дуже залежить від вибору скалярних параметрів процесу, для призначення котрих до останнього часу існували лише загальні рекомендації. Але для методу сполучення розв'язків цей недолік значною мірою подолано у цій дисертації (друга глава).

Також у першій главі розглянуто деякі загальні проблеми і алгоритми скінченноелементного моделювання твердих деформівних тіл: формування початкової САР (чисельне інтегрування по об'єму та поверхні СЕ, складання і упакування матриці САР, врахування умов повної шкосої симетрії крайової задачі); введення у початкову САР КУ 1-го роду; нормування та розв'язання СЛАР та деякі інші.

У другій главі дисертації викладено основи методу розрахування контактної взаємодії двох деформівних тримірних тіл – *метод сполучення розв'язків*. Це один з алгоритмів окремого розгляду контактуючих тіл. Їхньою теоретичною основою є альтернуючий метод Шварца (Schwarz H.A.), котрий, зокрема, потребує розгляду областей, що мають непусту зону перетину. Але в контактуючих твердих тілах є очевидним взаємне непроникнення тіл.

Нехай маємо два тіла номер 1 і 2, об'єми яких  $\Omega_{(1)}$  і  $\Omega_{(2)}$  обмежено поверхнями  $S_{(1)}$  і  $S_{(2)}$ , причому тіла взаємно контактують поверхнями  $S_{k(1)}$  і  $S_{k(2)}$ . Загальну поверхню контакту позначимо як  $S_k$ , а неконтактні частини поверхонь – як  $S_{нк(1)}$  і  $S_{нк(2)}$ .

Показано, що це протиріччя можна обійти, бо на поверхні контакту можна сформулювати два типи КУ: за температурою або тепловим потоком у задачах про ТС тіл (Цвік Л.Б., Канцельсон В.Е., Меншиков В.В.); за переміщеннями або контактними навантаженнями в задачах про НДС тіл (Цвік Л.Б.). Чергування в контактних ітераціях цих двох типів КУ забезпечує збіжність ітераційного процесу. При цьому суттєво використовуються скалярні ітераційні параметри процесу  $\alpha$ , визначені з умови мінімуму енергії деформації в області  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  в кожній ітерації. В ітераціях послідовно

ліквідуються невід'язки: то за переміщеннями (температурою), то за зусиллями (тепловим потоком).

Цвік Л.Б. з енергетичних міркувань одержав обмеження на величини параметрів  $\alpha$ , що задаються в контактних ітераціях

$$\alpha^{(2k-1)} + \alpha^{(2k-2)} = 1; \quad \alpha^{(2k-1)}, \alpha^{(2k-2)} \geq 0, k = 1, 2, \dots \quad (16)$$

і показав, що при задоволенні (16) послідовність розв'язків у контактних ітераціях сходиться до шуканого розв'язку задачі, причому відзначено принципову можливість збіжності алгоритму і для нелінійних контактних задач.

Далі запропоновано здійснити перехід до величин  $\alpha$ , змінних на  $S_k$ , що дозволяє врахувати локальні особливості. Прості формули для  $\alpha$ , змінних на  $S_k$ , вдається одержати при деякому спрощенні властивостей поверхонь контакту.

Уявимо, що поверхня контакту складається з лінійнопружних незв'язаних (Вінклерових) основ (Цвік Л.Б.). Тоді інтегральні оператори податливості тіл  $L_{(j)}$  стають операторами множення на скалярну функцію  $L_{(j)}$ , що є локальною податливістю поверхні контакту. Внаслідок цього  $\alpha = L_{(1)}/(L_{(1)} + L_{(2)})$ , де  $\alpha$  вже є функцією точки на  $S_k$ . Виразимо податливості  $L_{(j)}$  через поточні значення контактних тисків  $P_{(j)}$  і контактних переміщень  $U_{\nu_{(j)}}$ :  $\alpha = (U_{\nu_{(2)}/P_{(2)}})/(U_{\nu_{(1)}/P_{(1)}} + U_{\nu_{(2)}/P_{(2)}}$ . Оскільки має місце рівність  $P_{(1)}^{(2k)} = P_{(2)}^{(2k)}$ , то

$$\alpha^{(2k)} = U_{\nu_{(2)}}^{(2k)} / (U_{\nu_{(1)}}^{(2k)} + U_{\nu_{(2)}}^{(2k)}). \quad (17)$$

При сполученні пружних тіл останні співвідношення можуть бути модифікованими (Цвік Л.Б.):

$$\alpha^{(2k)} = \frac{\beta U_{\nu_{(2)}}^{(2k)}}{(1 - \beta)U_{\nu_{(1)}}^{(2k)} + \beta U_{\nu_{(2)}}^{(2k)}}; \quad (18)$$

де  $0 \leq \beta \leq 1$  — скаляр. При  $\beta = 0.5$  формули (17) і (18) співпадають. Оптимальні (в сенсі швидкості збіжності) величини  $\beta$  запропоновано підбирати в процесі підрахунку з урахуванням поведінки невід'язок на перших ітераціях процесу.

Для крайових задач *теорії поля* (тобто і ТС) ситуація є аналогічною. Аналог формули (17) для параметра  $\alpha$  в припущенні про непов'язаність процесів теплопередачі в сусідніх точках контакту одержано у вигляді

$$\alpha = \lambda_{(1)} / (\lambda_{(1)} + \lambda_{(2)}); \quad (19)$$

де  $\lambda_{(j)}$  — коефіцієнт теплопровідності матеріалу  $j$ -го тіла.

Однак аналіз і чисельні експерименти показують, що формули типу (17) — (19) часто не можна застосувати, або вони не задовольняють вимогам ефективності процесу розв'язання.

Тому далі у другій главі дисертації розглянуто і розвинуто алгоритми призначень ефективних ітераційних параметрів збіжності методу  $\alpha$ , проведено узагальнення методу на крайові контактні задачі, коли одне з контактуючих тіл обмежено в переміщеннях тільки зоною контакту.

Спочатку доведено *твердження* :

Якщо в ітераційному процесі розв'язання крайової контактної задачі стаціонарної теплопровідності, побудованому за допомогою методу сполучення розв'язків

$$\bar{T}_{|s_1}^{(2k+1)} = \bar{T}_{|s_2}^{(2k+1)} = \bar{T}^{(2k+1)} = T_{(1)}^{(2k)} + \alpha_{(1)}^{(2k+1)} \delta T_{(1)}^{(2k)}; \quad k = 0, 1, \dots; \quad (20)$$

$$q_{|s_1}^{(2k)} = q_{|s_2}^{(2k)} = \bar{q}^{(2k)} = q_{(1)}^{(2k-1)} + \alpha_{(1)}^{(2k)} \delta q_{(1)}^{(2k-1)}; \quad k = 1, 2, \dots; \quad (21)$$

де нев'язки сполучення розв'язків:

$$\delta T^{(2k)} = T_{(2)}^{(2k)} - T_{(1)}^{(2k)}; \quad \delta q^{(2k-1)} = q_{(2)}^{(2k-1)} - q_{(1)}^{(2k-1)}; \quad (22)$$

після  $2k$ -ої контактної ітерації ( $k = 1, 2, \dots$ ) у кожній парі опозитивних точок на поверхнях контакту двох тіл задоволено умову

$$\Delta^* T_{(1)}^{(2k)} \cdot \Delta^* T_{(2)}^{(2k)} < 0; \quad (23)$$

де  $\Delta^* T_{(j)}^{(2k)}$  подаються виразом

$$\Delta^* T_{(j)}^{(2k)} = T_{(j)}^{(2k)} - T_{(j)}^{(2n)}; \quad n < k = 1, 2, \dots; \quad j = 1, 2; \quad (24)$$

то при заданні у формулі (20) параметра  $\alpha_{(1)}^{(2k+1)}$  у вигляді

$$\alpha_{(1)}^{(2k+1)} = |\Delta^* T_{(1)}^{(2k)}| / (|\Delta^* T_{(1)}^{(2k)}| + |\Delta^* T_{(2)}^{(2k)}|); \quad k = 1, 2, \dots \quad (25)$$

поточна контактна ітерація приведе до наближеного розв'язку задачі.

Під час одержання формули (25) передбачалася незалежність зв'язку між температурою і тепловим потоком у точці контакту від сусідніх точок, що можна прийняти лише у першому наближенні. Тому при розв'язанні реальних контактних задач теплопровідності

кількість контактних ітерацій треба очікувати більше трьох, але, як було показано в п'ятій главі дисертації, їх буде все ж значно менше, ніж при застосуванні формули (19).

Питання про те, наскільки є широкою область виконання нерівності (23), залишили відкритим, хоча нежорсткий характер обмежень є очевидним. Досягти виконання (23) можна майже завжди, перебираючи в (24)  $n = 0, 1, \dots < k$ . Природньо, що при невиконанні умови (23) в будь-якій з опозитних пар треба застосувати альтернативні залежності для призначення  $\alpha_{(1)}^{(2k+1)}$ , в нашому розгляді це (19). Конкретніше до цього питання можна буде звернутися після накопичення певного досвіду із застосування даного алгоритму.

Потім доведемо *твердження*:

Якщо в ітераційному процесі розв'язання контактної крайової задачі лінійної термопружності для тіл із наявністю КН 1-го роду (кінематичних) на  $S_U$ , побудованому згідно з методом сполучення розв'язків

$$\bar{U}_{\nu(1)}^{(2k+1)} = U_{\nu(1)}^{(2k)} + \alpha_{(1)}^{(2k+1)} \cdot \delta U_{\nu(1)}^{(2k)}; \quad k = 0, 1, \dots; \quad (26)$$

$$\bar{P}_{\nu(1)}^{(2k)} = P_{\nu(1)}^{(2k-1)} + \alpha_{(1)}^{(2k)} \cdot \delta P_{\nu(1)}^{(2k-1)}; \quad k = 1, 2, \dots; \quad (27)$$

де  $U_{\nu(j)} = U_{m(j)} \cdot \nu_{m(j)}$ ;  $P_{\nu(j)} = \sigma_{m(j)} \cdot \nu_{m(j)} \cdot \nu_{n(j)}$  (проводиться згортання по індексах, що повторюються), а нев'язки

$$\delta U_{\nu(1)}^{(2k)} = U_{\nu(2)}^{(2k)} - U_{\nu(1)}^{(2k)} - \eta; \quad \delta P_{\nu(1)}^{(2k-1)} = P_{\nu(2)}^{(2k-1)} - P_{\nu(1)}^{(2k-1)}; \quad (28)$$

при натязі  $\eta$ , що визначається у вихідному стані (при  $U_{m(j)} = 0$ ); після чергової контактної ітерації зона контакту стабілізувалася, то при задаванні в кожній парі опозитних точок на поверхнях контакту двох тіл у виразі (26) параметра  $\alpha$  у вигляді

$$\alpha_{(1)}^{(2k+1)} = |\Delta^* U_{\nu(1)}^{(2k)}| / (|\Delta^* U_{\nu(1)}^{(2k)}| + |\Delta^* U_{\nu(2)}^{(2k)}|); \quad k = 1, 2, \dots; \quad (29)$$

де  $\Delta^* U_{\nu(j)}^{(2k)}$  відповідають

$$\Delta^* U_{\nu(j)}^{(2k)} = U_{\nu(j)}^{(2k)} - U_{\nu(j)}^{(2n)} = U_{\nu(j)}^{(2k)} - U_{\nu(j)}^{(2n)}; \quad n < k = 1, 2, \dots; \quad (30)$$

поточна контактна ітерація приведе до наближеного розв'язку задачі.

Співвідношення типу (29) було запропоновано в дисертації Овсєнєва О.Б. Але в ньому під  $\Delta U_{\nu(j)}^{(2k)}$  малася на увазі інша величина, а

саме: різниця між поточною  $U_{\nu(j)}^{(2k)}$  і  $(U_{\nu(j)})_0$ , одержаною в допоміжному розв'язку із вільною  $S_k$ . Інакше кажучи, етап навантаження було розділено на два підетапи: із вільною  $S_k$  і власне контактний. Очевидно, що вільна зона контакту — це частковий, а отже не завжди придатний випадок  $P_{\nu(1)}^{(0)} = P_{\nu(2)}^{(0)}$ , а саме  $P_{\nu(1)}^{(0)} = P_{\nu(2)}^{(0)} = 0$ .

Якщо вдається виділити  $\eta^k = \eta - U_{\nu(1)}^{nk} - U_{\nu(1)}^{nk}$ , що можливо лише при виділенні  $U_{\nu(j)}^{nk}$  або при  $U_{\nu(j)}^{nk} = 0$ , то замість (26) можна застосовувати залежності:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{\nu(1)}^{(2k+1)} &= U_{\nu(1)}^{nk} + \alpha_{(1)}^{(2k+1)} \eta^k \text{sign}(1); \\ \bar{U}_{\nu(2)}^{(2k+1)} &= U_{\nu(2)}^{nk} + (1 - \alpha_{(1)}^{(2k+1)}) \eta^k \text{sign}(2); \end{aligned} \quad (31)$$

де  $\text{sign}(j)$  визначаються знаками  $(\bar{U}_{\nu(j)}^{(2k+1)} - U_{\nu(j)}^{nk})$ , причому  $\bar{U}_{\nu(j)}^{(2k+1)}$  підраховано згідно з (26) і

$$\bar{U}_{\nu(2)}^{(2k+1)} = U_{\nu(2)}^{(2k)} - (1 - \alpha_{(1)}^{(2k+1)}) \cdot \delta U_{\nu(1)}^{(2k)}; \quad k = 0, 1, \dots \quad (32)$$

Легко показати, що в цьому випадку завжди  $\text{sign}(2) \cdot \text{sign}(2) < 0$ , оскільки  $U_{\nu(2)}^k - U_{\nu(1)}^k = \eta^k > 0$ . Подібні (31) залежності було використано в дисертації Овсєєнка О.Б., однак в ній не було виявлено, що застосований натяг мав бути  $\eta^k$ , а не повним натягом  $\eta$  (оскільки в розглянутих в дисертації крайових задачах були  $U_{\nu(j)}^{nk} = 0$ , то і  $\eta^k = \eta$ ).

Застосування (29) обмежує не тільки номер ітерації ( $k > 0$ ), але і невпродженістю знаменника. Це забезпечено, якщо

$$\Delta^* U_{\nu(1)}^{(2k)} \cdot \Delta^* U_{\nu(2)}^{(2k)} \neq 0. \quad (33)$$

Досягти цієї умови можна, перебираючи в (30)  $n = k - 1, \dots, 0$ . В іншому випадку і при одночасно невідомій  $U_{\nu(j)}^{nk} \neq 0$  слід вираховувати  $\alpha_{(1)}^{(2k+1)}$  через модулі пружності (Гнучий Ю.Б.):

$$\alpha_{(1)}^{(2k+1)} = E_{(2)} / (E_{(1)} + E_{(2)}); \quad (34)$$

якщо ж  $U_{\nu(j)}^{nk}$  — виділена або дорівнює нулю, то можна застосувати формули

$$\alpha_{(1)}^{(2k+1)} = \frac{|U_{\nu(1)}^{(2k)} - U_{\nu(1)}^{nk}|}{|U_{\nu(1)}^{(2k)} - U_{\nu(1)}^{nk}| + |U_{\nu(2)}^{(2k)} - U_{\nu(2)}^{nk}|}; \quad k = 1, 2, \dots; \quad (35)$$

де  $U_{i,j}^{r(2k)} - U_{i,j}^{nk}$  також викликані тільки натягом. Тепер є очевидною велика обмеженість у застосуванні формули (17), яку запропонував Цвік Л.Б.

Таким чином, було вирішено проблему, як бути, якщо до контактуючого тіла прикладено і неконтактні навантаження, якщо є температурні деформації (контактна задача термопружності), якщо на  $S_u$  хоча б одного з контактуючих тіл кінематичні КУ є неоднорідними, тобто може бути присутнім жорсткий зсув і (або) поворот поверхні контакту  $S_k$ . Тоді нормальні проєкції переміщень  $U_{i,j}$  на  $S_k$  містять у собі відповідні складові: силову  $U_{i,j}^p$ , температурну  $U_{i,j}^T$ , жорсткого зсуву і (або) повороту  $U_{i,j}^r$ , а також власне контактну  $U_{i,j}^k$ . Оскільки локальну податливість точки поверхні контакту в напрямку нормалі відображає відношення  $L_{(j)} = |U_{i,j}^k / P_{i,j}^k|$ , то очевидно, що у загальному випадку контактну складову  $U_{i,j}^k$  виділити з  $U_{i,j}$  складно.

Далі у другій главі розглянуто питання конкретного призначення *крайових умов* на поверхні контакту з урахуванням і без урахування тертя. Потім проведено *узагальнення* алгоритму на контактні тіла з обмеженнями в переміщенні тільки зоною контакту.

Дійсно, вище передбачалося, що для кожного з контактуючих тіл існує непуста множина кінематичних КУ, тобто тіла є обмеженими у своїх переміщеннях. В іншому випадку породжувана методом розв'язку ефективна матриця СЛАР буде виродженою, і для даного тіла СЛАР не можна розв'язати. Як бути, якщо в одному з контактуючих тіл відсутні такі КУ?

Запропоновано і апробовано простий та ефективний метод розв'язання даної проблеми. Пропонується для нульової і парних контактних ітерацій у такому тілі задавати шість ступенів свободи в декількох вузлах сітки, в яких кінематичні КУ будуть призначатися штучно, а саме нульовими. Ці вузли необхідно вибрати якомога далі від зони контакту, де за принципом Сен-Венана уточнення розподілу контактних тисків практично не впливає на розв'язок. Призначені ступені свободи мають повністю виключати жорсткий зсув і поворот усього тіла (для двомірного розгляду кількість таких ступенів зменшується до трьох), але не вносити обмежень на деформації самого тіла, тобто впливати вони мають лише на положення тіла у просторі. Це є завжди можливим.

Проведені чисельні експерименти (викладені у п'ятій главі) показали, що поєднання цього прийому із застосуванням формули (29),

де  $\Delta^* L_{ij}^{(2k)}$  даються (30), не приводить до збільшення контактних ітерацій. з одного боку, і, що найважливіше, дозволяє проводити чисельні розрахунки і для цього класу крайових контактних задач розглянутим методом, роблячи його практично універсальним.

У третій главі дисертації розглянуто і розвинено ефективні алгоритми розв'язання крайових задач термопружності, термопластичності та повзучості з безітераційним і точним урахуванням впливу температури на пружні характеристики матеріалу.

*Точне врахування температурного впливу на модулі пружності.* Показано, що вектор  $\{\Delta\sigma^T\}$  для (6) можна обчислити як

$$\{\Delta\sigma^T\} = \frac{d[D]}{dT} [D]^{-1} \{\sigma\} \Delta\bar{T} = ([D] - [D]_0) [D]_0^{-1} \{\sigma\}_0. \quad (36)$$

В правій частині рівності всі величини відомі:  $[D]_0$  і  $\{\sigma\}_0$  - на початок,  $[D]$  - на кінець даного етапу навантаження, тобто при  $T_0$  і  $T = T_0 + \Delta\bar{T}$ . Тому поправка  $\{\Delta\sigma^T\}$  обчислюється точно і безітераційно.

В результаті одержання залежності (36) повністю вирішено питання про точне і повне врахування впливу температури на напружено-деформований стан тіла в чисельних алгоритмах, сформульованих у приписах деформації.

*Знакопостійна повзучість ізотропного матеріалу.* Проводячи згортання другого виразу (5), одержимо, що компоненти вектора приростів деформації повзучості  $\{\Delta\varepsilon^c\}$  за час  $\Delta t$  з урахуванням закону пружної зміни об'єму визначаються співвідношенням

$$\{\Delta\varepsilon^c\} = \frac{3}{2} \frac{\Delta\varepsilon_i^c}{\sigma_i \langle \{S\} \rangle} \langle \{S\} \rangle; \quad (37)$$

де  $\Delta\varepsilon_i^c$  — інтенсивність приростів компонент тензора деформації повзучості за етап навантаження тривалістю  $\Delta t$ . Під  $\sigma_i(\ )$ ,  $\varepsilon_i(\ )$  будемо розуміти оператори згортання вектора.

Використали рівняння стану однієї з найкращих технічних теорій повзучості — теорії зміцнення. У загальному вигляді його представлено виразом

$$\dot{\varepsilon}_i^c = \frac{d\varepsilon_i^c}{dt} = \Phi(\sigma_i, \varepsilon_i^c, \sigma_V, T, t); \quad (38)$$

де  $\dot{\varepsilon}_i^c$  — інтенсивність швидкості повзучості матеріалу. Один з варіантів теорії зміцнення конкретизує запис (38) у вигляді

$$\dot{\varepsilon}_i^c = \alpha(T) \cdot (\varepsilon_i^c)^{-\mu(T)} \cdot \sigma_i^{n(T)}; \quad (39)$$

де  $\alpha(T)$ ,  $\nu(T)$ ,  $n(T)$  — коефіцієнти апроксимації як функції температури. При  $\nu(T) = 0$  вона переходить у технічну теорію плинну ізотропного матеріалу при повзучості.

Розклавши функцію повзучості (38), що визначається на основі експериментів, у ряд Тейлора поблизу  $t_0$  на часовому проміжку  $\omega \Delta t$ , де параметр  $0 < \omega \leq 1$  задається, і, обмежуючись лінійними членами розкладу, одержимо для  $\Delta \varepsilon_i^c \approx \langle \dot{\varepsilon}_i^c \rangle \cdot \Delta t$  вираз

$$\Delta \varepsilon_i^c \approx \left[ A + \omega \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_i} \right)_0 \Delta \sigma_i + \omega \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_i^c} \right)_0 \Delta \varepsilon_i^c \right] \cdot \Delta t; \quad (40)$$

де позначено незмінну частину

$$A = (\dot{\varepsilon}_i^c)_0 + \omega \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_V} \right)_0 \Delta \sigma_V + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_0 \Delta T + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_0 \Delta t \right]. \quad (41)$$

Будемо вважати, що вектор приростів деформації пластичності  $\{\Delta \varepsilon^p\}$  є фіксованим (при неврахуванні деформації пластичності — нульовим).

Оскільки в усіх технічних теоріях повзучості, зокрема й у прийнятій, під  $\sigma_i$  розуміють *рівень* діючих напружень, то  $\Delta \sigma_i$  в (40) — зміна *рівня* напружень. Тоді

$$\omega \Delta \sigma_i = \sigma_i(\{\dot{S}\}) - \sigma_i(\{S\}_0) - 3G(x^i, T) \omega \Delta \varepsilon_i^c \leq 0; \quad (42)$$

де відомий вектор

$$\{\dot{S}\} = \{S\}_0 + \omega(\{\Delta S^u\} - 2G(x^i, T)\{\Delta \varepsilon^p\}). \quad (43)$$

Підставивши (42) у (40) і виразивши (40) відносно  $\Delta \varepsilon_i^c$ , одержали:

$$\Delta \varepsilon_i^c = \frac{A + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_i} \right)_0 \cdot [\sigma_i(\{\dot{S}\}) - \sigma_i(\{S\}_0)]}{1 + [3G(x^i, T) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_i} \right)_0 - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_i^c} \right)_0] \omega} \cdot \Delta t. \quad (44)$$

Оскільки при повзучості завжди  $\left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_i^c} \right) < 0$ , а  $\left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_i} \right) > 0$ , то знаменник у (44) є додатним і невід'язним. Завжди є додатним і числитель.

Вектор  $\{\Delta \varepsilon^c\}$  знаходиться з (37) як

$$\{\Delta \varepsilon^c\} = \frac{3}{2} \frac{\Delta \varepsilon_i^c}{\sigma_i(\{\dot{S}\})} \cdot \{\dot{S}\}. \quad (45)$$

Підставляючи значення  $\{\Delta \varepsilon^c\}$  в (7), одержимо прогноз напружень у точці тіла на основі вибраної (величиною  $\omega$ ) схеми інтегрування

рівнянь повзучості. В ньому *безітераційно* розділено прирости загальних деформацій на прирости деформацій пружності, теплові та повзучості. Це й зумовлює більшу ефективність запропонованого алгоритму порівняно з відомими (наприклад: Манукян К.М., Морозов Е.М., Сапунов В.Т.).

В них найчастіше компоненти вектора напружень, що використовуються при прогнозуванні деформації повзучості, визначаються за результатами попередньої глобальної ітерації, що приводить до їхньої підвищеної кількості порівняно із запропонованим вище алгоритмом. Крім того, часто використовується інтенсивність приросту напружень, а не приросту їхньої інтенсивності, тобто зміни *рівня* (при непропорційному навантаженні це є суттєво різні величини). Це протирічить фізичній сутності застосованих технічних теорій повзучості: в них закладено поняття *рівня* напружень, тому мова може йти лише про зміну цього рівня. Таким чином, часто фактично робляться спроби застосувати технічну теорію повзучості до процесів повзучості при складному (непропорційному) навантаженні, що експериментально не підтверджено. Такий підхід трапляється, на жаль, досить часто.

Метод належить до групи методів початкових деформацій у межах МСЕ, сформульованого в приростах переміщень. Його ефективність також зумовлена використанням незмінної глобальної матриці САР і високою стійкістю методу, що значно перевищує стійкість звичайного методу початкових деформацій і не поступається стійкості методу дотичної жорсткості.

Далі виявлено наявність обмеження на часовий крок згору при використанні теорії повзучості у вигляді (39):

$$\Delta t \leq \frac{(\varepsilon_i^c)^{1+\nu(T)}}{\omega \cdot \alpha(T) \cdot (\sigma_i)_0^{n(T)}}. \quad (46)$$

Із накопиченням деформацій повзучості це обмеження швидко стає необтяжливим.

*Термопластичність ізотропного матеріалу, що зміцнюється ізотропно, при активному навантаженні.* Будемо вважати, що вектор приростів деформацій повзучості  $\{\Delta \varepsilon^c\}$  є фіксованим, тобто відомим. Позначимо

$$\{\hat{S}\} = \{S^n\} - 2G(x^i, T) \cdot \{\Delta \varepsilon^c\}. \quad (47)$$

Тоді вираз (8) запишемо у вигляді

$$\{S\} = \{\hat{S}\} - 2G(x^i, T) \cdot \{\Delta\varepsilon^p\}. \quad (48)$$

Згідно з першим виразом (5) вектори  $\{S\}$  і  $\{\Delta\varepsilon^p\}$  - співвісні. Тому в (48) співвісні й вектори  $\{\hat{S}\}$  і  $\{S\}$ . Це вказує на існування пропорції

$$\{S\} = r \cdot \{\hat{S}\}; \quad (49)$$

де  $r \leq 1$  — скаляр.

Схема визначення вектора  $\{S\}$  через  $r$  є неявною. Її перевага перед явною схемою, що часто застосовується, особливо виявляється в задачах термопластичності, оскільки не потребує притягнення такого поняття, як поверхня навантаження, і похідних від функції, що її описує.

Для обчислення  $r$  згорнемо (49). Вона дає значення

$$r = (\sigma_i(\{S\})) / (\sigma_i(\{\hat{S}\})). \quad (50)$$

В (50) знаменник відомий. Для визначення чисельника використовується рівняння стану матеріалу. У випадку активного навантаження - це миттєва діаграма деформування. Можливі два її основних варіанти. Якщо використовується вираз типу

$$\sigma_i = K(\varepsilon_i^s, \sigma_V, T); \quad (51)$$

де  $\varepsilon_i^s$  — інтенсивність деформації за виключенням неутруднених (температурних і можливих структурних), то, згорнувши відомий вектор  $\{\varepsilon^s\} = \{\varepsilon\} - \{\alpha_T\} \Delta T$ , одержимо згідно з (51) значення  $\sigma_i(\{S\}) = K(\varepsilon_i^s, \sigma_V, T)$ , а отже і  $r$  виразу. Цей підхід запропонував Уїлкінс. Алгоритм, який він одержав, належить до неявних схем, є абсолютно стійким, точним і внятковно ефективним.

Розглянули застосування рівняння стану типу

$$\sigma_i = H(\chi, \sigma_V, T); \quad (52)$$

де  $\chi$  - параметр Одквіста. Згідно з ним вираз (50) приймає вигляд

$$r = (H(\chi, \sigma_V, T)) / (\sigma_i(\{\hat{S}\})). \quad (53)$$

Тепер для визначення  $r$  невідомою величиною є значення параметра Одквіста, вірніше - його приросту  $\Delta\chi$  за даний етап навантаження, оскільки  $\chi = \chi_0 + \Delta\chi$ , а величина  $\sigma_V$  відома. З (48), (49):

$$(1 - r) \cdot \{\hat{S}\} = 2G(x^i, T) \cdot \{\Delta\varepsilon^p\}. \quad (54)$$

В результаті згортання (54) і застосування (50) одержали, що при активному навантаженні в зоні пластичних деформацій

$$\sigma_i(\{\hat{S}\}) - H(\lambda_0 + \Delta\lambda, \sigma_V, T) = 3G(x^i, T) \cdot \Delta\lambda \geq 0. \quad (55)$$

Це є нелінійне скалярне рівняння відносно величини  $\Delta\lambda$ . Його розв'язання в дисертації запропоновано здійснити методом Ньютона с перенесенням точки відліку. Розкладаючи  $H(\lambda_0 + \Delta\lambda, \sigma_V, T)$  в ряд Тейлора поблизу  $\lambda_0$  і обмежуючись двома членами ряду, з (55) одержимо перше наближення

$$\Delta\lambda^{(1)} = \frac{\sigma_i(\{\hat{S}\}) - H(\lambda_0, \sigma_V, T)}{3G(x^i, T) + H'(\lambda_0, \sigma_V, T)}; \quad (56)$$

де позначено похідну  $H'(\lambda, \sigma_V, T) = \partial H(\lambda, \sigma_V, T) / \partial \lambda$ .

Реалізуємо наступний ітераційний процес. Призначимо  $\Delta\lambda = \Delta\lambda^{(k)}$ ,  $k = 1$  ( $k$  — номер ітерації) і послідовно обчислюємо

$$Q^{(k)} = \sigma_i(\{\hat{S}\}) - 3G(x^i, T) \cdot \Delta\lambda; \quad (57)$$

$$\Delta\lambda^{(k+1)} = \frac{Q^{(k)} - H(\lambda_0 + \Delta\lambda, \sigma_V, T)}{3G(x^i, T) + H'(\lambda_0 + \Delta\lambda, \sigma_V, T)}; \quad (58)$$

$$\Delta\lambda = \sum_{j=1}^{k+1} \Delta\lambda^{(j)}. \quad (59)$$

Якщо  $|\Delta\lambda^{(k+1)}| > \varepsilon \cdot \Delta\lambda$ , де  $\varepsilon$  — задана точність, то покладається  $k = k + 1$  і операції (57) — (59) повторюються. За умови гладкості  $H(\lambda, \sigma_V, T)$  процедура є абсолютно стійкою, має велику швидкість збіжності.

Знайдене значення  $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$  підставляється в (53). Визначивши значення  $r$ , потім знаходимо

$$\{\Delta\varepsilon^p\} = \frac{1-r}{2G(x^i, T)} \cdot \{\hat{S}\}; \quad \{\bar{\sigma}\} = r \cdot \{\hat{S}\} + \{\sigma_V^u\}. \quad (60)$$

Зведення задачі про визначення  $r$  через визначення приросту параметра Одквіста в скалярному рівнянні типу (55) вперше запропонували, певно, Krieg R.D. і Krieg D.B. для ідеальнопластичного матеріалу, тобто при  $H = \sigma_T = const$ ,  $H' = 0$ , де  $\sigma_T$  — границя плинності. При цьому  $\Delta\lambda = (\sigma_i(\{\hat{S}\}) - \sigma_T) / (3G(x^i, T))$ . В дисертації Савченкова Ю.Е. для знаходження  $\Delta\lambda$  в подібній ситуації використано громіздку процедуру ZEROIN, котра поєднує метод бісекції з методом лінійної або оберненої квадратичної інтерполяції.

Вираз (55) через співвісність векторів  $\{S\}$  і  $\{\dot{S}\}$  дає висчерпну умову активного навантаження при термопластичності. Вираз (60) є правильним як у пластичній, так і в пружній зоні і при розвантаженні, тому немає необхідності спеціально визначати момент переходу матеріалу з пружної зони в пластичну при активному навантаженні, як це доводиться робити в багатьох алгоритмах.

*Спільна знакопостійна повзучість і термопластичність ізотропного матеріалу при активному навантаженні.* Передбачається спільний розвиток деформації як пластичних, так і повзучості. У локальному ітераційному процесі по чергово виконуються дії, викладені вище, аж до стабілізації із заданою точністю будь-яких величин:  $\chi$  або вектора  $\{S\}$ . Питання про взаємовплив деформації пластичності і повзучості на процеси повзучості і пластичності вирішено згідно з думкою Работнова Ю.М.

Четверту главу дисертаційної роботи присвячено проблемам програмної реалізації чисельних алгоритмів розв'язання крайових задач механіки деформівного твердого тіла.

Розглянуто базові SE, питання чисельного інтегрування і *підінтегральні функції* в тримірному скінченноелементному моделюванні, причому значною мірою використано ідеї K.Bathe і E.Wilson. Одержано явні вирази підінтегральних функцій, котрі є компонентами векторів і матриць, які, у свою чергу, визначаються в результаті перемноження векторів і матриць.

Запропоновано алгоритм використання *моментної схеми* (Сахаров О.С.) в ізопараметричному SE.

Моментна схема скінченного елемента (МССЕ), розроблена вже досить давно (є узагальнююча монографія), не знайшла дуже широкого вжитку. Певно, однією з причин цього є менша компактність використаних матриць, а отже, і більший час на їхнє складання та використання, а також деяка нестандартність математичних виразів (порівняно з MSE). Але застосування МССЕ може бути необхідним, коли передбачається можливість жорсткого зміщення і повороту SE.

Відмінність МССЕ від MSE виявляється тільки в матриці диференціювання  $[B]$ . Її представлено у звичному для MSE вигляді

$$[B] = [\nu][\dot{J}][F][A]; \quad (61)$$

де матриця  $[\nu]$  визначає поворот внутрішньої координатної системи;  $[\dot{J}]$  – містить компоненти матриці Якобі;  $[F]$  – складена з комбінацій

значень локальних координат СЕ (вона й визначає, зрештою, відмінність моментної матриці  $[B]$  від звичайної);  $[A]$  – складена з одиничних діагональних підматриць різного знаку. Одержано конкретні вирази цих матриць для СЕ першого і другого порядку апроксимації для глобальних декартової та циліндричної систем координат. У дисертації наведено ці вирази для СЕ першого порядку апроксимації.

Викладено алгоритм урахування крайових *кінематичних* умов для тримірного розгляду тіл у декартовій та циліндричній системах координат. При цьому в явному вигляді виписано всі остаточні формули, згідно з якими коректуються складові СЛАР.

Розроблено ряд чисельних *алгоритмів поточної зони контакту (ПЗК)* в тримірному тілі.

В результаті відмови від обов'язкового протистояння вузлів СЕ сіток тіл у можливій ПЗК виникла необхідність створити надійний алгоритм *формування контактних пар* у ПЗК за типом контакту "вузол–поверхня", причому поверхню задавати як сукупність поверхонь СЕ, що виходять у можливу ПЗК.

Розв'язок задачі відразу вишукується в локальних координатах заданого списку прикрайових СЕ, які можуть потрапити в ПЗК. Точка на поверхні тіла з умовним номером 2, що входить у контактну пару з вузлом тіла 1 (позначимо його як вузол "d"), вишукується у напрямку однієї з локальних координат СЕ тіла 2, продовженої за необхідністю і за межі СЕ до вузла "d". Список поверхневих вузлів і приповерхневих СЕ задається у вхідному потоці.

У шкелі за вибраними СЕ для чергового СЕ спочатку визначаються локальні координати "чужого" для СЕ вузла "d". Використано метод Ньютона–Канторовича, що приводить до системи рівнянь:

$$\{r\}^{(n+1)} = \{r\}^{(n)} - [L]^{-1}\{f\}^{(n)}; \quad (62)$$

де  $n$  – номер ітерації;  $[L]^{-1}$  – матриця, обернена до матриці  $[L]$  з компонентами  $L_{ij} = \partial f_i / \partial r_j$ ;  $\{r\} = \{r_1, r_2, r_3\}^T$ ;  $\{f\} = \{f_1, f_2, f_3\}^T$  – відповідно вектори локальних координат і значень функцій, що відображають різницю координат

$$f_j = \sum_{m=1}^M \phi_m^e \cdot (x^j)_m - \bar{x}^j; \quad (63)$$

де  $j = 1, 2, 3$ ;  $\phi_m^i = \phi_m^i(r_1, r_2, r_3)$  - функції форми  $m$ -го вузла СЕ;  $(x^j)_m$ ,  $\bar{x}^j$  - поточні координати вузлів СЕ і вузла "d" відповідно;  $M$  - кількість вузлів у СЕ. Згідно з (63)

$$L_{ij} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial \phi_m^i}{\partial r_j} (x^j)_m = \frac{\partial x^i}{\partial r_j}; \quad (64)$$

тому матриця  $[L]$  точно відповідає транспонованій матриці Якобі СЕ, що обчислюється за стандартною процедурою при чисельному інтегруванні по СЕ. Початкові значення  $r_j = 0$ .

Якщо одержані локальні координати "чужого" для СЕ вузла "d" відповідають даному СЕ, то йому призначаються локальні координати "опозитної" точки "h": ті ж, що і у "d", але значення локальної координати, перпендикулярної контактній поверхні, вважається рівним одиниці.

Тривала експлуатація даного алгоритму довела його надійність та універсальність.

При узгодженні контактуючих тіл в контактній парі на поверхні тіла за наявності контактного тертя необхідно обчислювати дотичні косинуси, котрі вказують напрямок дотичного зусилля чи переміщення в точці поверхні контакту. Позначимо як  $h_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  - відомі компоненти вектора  $\vec{h}$  навантаження, переміщення чи відносного зміщення в точці контакту. Тоді  $h_r = (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 - h_\nu^2)^{1/2}$ ; де  $h_r$  - дотична і  $h_\nu$  - нормальна складові вектора, що розглядається, причому  $h_\nu = h_1\nu_1 + h_2\nu_2 + h_3\nu_3$ .

Для визначення трьох компонент  $\vec{\tau}$  вектора  $\vec{\tau}$  склали систему з трьох нелінійних рівнянь:

$$\begin{aligned} f_1 &= \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 - 1 = 0; \\ f_2 &= h_1\tau_1 + h_2\tau_2 + h_3\tau_3 - h_r = 0; \\ f_3 &= \nu_1\tau_1 + \nu_2\tau_2 + \nu_3\tau_3 = 0; \end{aligned} \quad (65)$$

рівняння якої відповідно відображають: умову нормування, проекцію вектора  $\vec{h}$  на напрямок  $\vec{\tau}$  і умову ортогональності векторів  $\vec{\nu}$  і  $\vec{\tau}$ .

Систему (65) розв'язано ітераційним методом Ньютона-Канторовича. В матричному позначенні для  $(n+1)$ -ї ітерації:

$$\{\tau\}^{(n+1)} = \{\tau\}^{(n)} - ([M]^{-1})^{(n)} \{f\}^{(n)}; \quad (66)$$

де  $\{f\} = \{f_1, f_2, f_3\}^T$ ;  $\{\tau\} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}^T$ ; компоненти  $M_{ij} = \partial f_i / \partial \tau_j$ . Матрицю  $[M]^{-1}$ , як виявилось, можна виразити в явному вигляді:

$$[M]^{-1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} (h_2\nu_3 - h_3\nu_2)/2; (\tau_3\nu_2 - \tau_2\nu_3); (\tau_2h_3 - \tau_3h_2) \\ (h_3\nu_1 - h_1\nu_3)/2; (\tau_1\nu_3 - \tau_3\nu_1); (\tau_3h_1 - \tau_1h_3) \\ (h_1\nu_2 - h_2\nu_1)/2; (\tau_2\nu_1 - \tau_1\nu_2); (\tau_1h_2 - \tau_2h_1) \end{bmatrix}; \quad (67)$$

де  $d = \tau_1(h_2\nu_3 - h_3\nu_2) - \tau_2(h_1\nu_3 - h_3\nu_1) + \tau_3(h_1\nu_2 - h_2\nu_1)$ .

Початкові значення  $\{\tau\}^{(0)}$  можливі будь-які, пов'язані умовою нормування, можна покласти  $\tau_j^{(0)} = 1/\sqrt{3}$ .

При практичній відсутності дотичної складової вказаних векторів  $h_\tau \simeq 0$  і система (65) не може мати розв'язку. Цей випадок треба врахувати програмно. Зручно при  $h_\tau \simeq 0$  покласти  $\tau_j = 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Алгоритм суміщення і врахування можливого жорсткого зміщення і повороту контактної поверхні тіла, не зумовлений контактними навантаженнями є необхідним при розв'язуванні контактної задачі. Математично мова йде про перетворення координат у кожній  $i$ -й точці тіла за формулою

$$\{\tilde{x}\}_i = [A]\{x^c\}_i + \{\tilde{U}\}_i; \quad (68)$$

де  $\{\tilde{x}\}_i = \{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}_i^T$ ;  $\{x^c\}_i = \{x^c, y^c, z^c\}_i^T$  - вектори координат у "перетвореній" і "старій" конфігураціях відповідно;  $[A]$  - загальна для тіла матриця жорсткого повороту;  $\{\tilde{U}\} = \{\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}\}^T$  - загальний вектор жорсткого зміщення.

Необхідно визначити матрицю  $[A]$  і вектор  $\{\tilde{U}\}$ , виходячи зі значень координат у "старій" конфігурації  $\{x^c\}_i$  і "новій"  $\{x^n\}_i$ .

За "перетворені" координати запропоновано прийняти такі  $\{\tilde{x}\}_i$ , котрі дають мінімальне значення квадратичному функціоналу, зібраному згідно з методом найменших квадратів, тобто

$$F = \sum_{i=1}^N [(\tilde{x}_i - x_i^n)^2 + (\tilde{y}_i - y_i^n)^2 + (\tilde{z}_i - z_i^n)^2] = \min; \quad (69)$$

де  $N$  - кількість точок тіла, що розглядаються (із зони поверхні контакту та її найближчих околів, якщо це необхідно).

Компоненти матриці жорсткого повороту  $[A]$  визначено з використанням формул Ейлера для однократного повороту тіла відносно осі, положення якої визначається.

Мінімізувавши функціонал, взявши частинні похідні та прирівнявши їх до нуля, одержано нелінійну систему з семи рівнянь відносно

семи невідомих. Її розв'язано модифікованим методом Ньютона Канторовича, що приводить до ітераційного розв'язку системи рівнянь. Чисельні експерименти показали, що при потрібній точності  $\epsilon = 10^{-5}$  при малих кутах жорсткого повороту кількість ітерацій — дві-три, що є прийнятним.

Розроблено алгоритм винесення значень фізичних величин з гаусових точок інтегрування всередині СЕ на його поверхні.

Комп'ютерна графіка ПЕОМ дозволяє проводити візуалізацію результатів тримірних розрахунків у вигляді кольорових ізоліній чи ізошмуг по поверхнях чи перерізам тіл. При цьому основною вихідною інформацією є таблиця вузлових значень величин. У механіці деформованого твердого тіла це є температура, компоненти вектора переміщень, компоненти тензора напружень та їхні комбінації (інтенсивність напружень, максимальні та мінімальні напруження та кути їхньої орієнтації), параметр Одквіста та інші. При використанні методу СЕ деякі з них визначаються у гаусових точках інтегрування всередині СЕ: напруження, параметр Одквіста. Їхні значення необхідно перенести на вузлову сітку.

Задачу перенесення значень величин з однієї точкової сітки на іншу можна розв'язати різними способами. Метод, який було використано, має назву методу сполучених апроксимацій. Аналог такого алгоритму в двомірному випадку використовувало багато дослідників (Морозов Е.М., Нікішков Г.П. та інші).

Одержано узагальнені формули, що працюють на етапах алгоритму і враховують усі можливі сполучення кількості точок інтегрування для кожної з трьох локальних координат. Алгоритм реалізовано у вигляді сервісної (пост)процесорної підпрограми, яка виконується після закінчення етапу навантаження.

У п'ятій главі дисертації спочатку викладено основні характеристики пакета прикладних програм ОКА, в якому реалізовано розглянуті й запропоновані алгоритми. Потім наведено приклади розрахування елементів конструкції з використанням запропонованих алгоритмів, що обґрунтовують їхню працездатність та ефективність.

Алгоритм контактної теплопровідності і його ефективність перевірялися на двох крайових задачах: про контактну теплопровідність контактуючих стрижнів і вісь із посадженою на неї короткою втулкою. Розглянуто питання впливу вибору скалярних параметрів процесу (відомих і запропонованих) на кількість контактних ітерацій.

ступеня розбиття зони контакту на точність одержуваних розв'язків і кількість контактних ітерацій.

На задачі про деформування прямокутної затисненої по контуру пластини порівнювалася ефективність алгоритмів тримірних МСЕ і МССЕ. Зроблено висновок, що в даній задачі краще застосувати СЕ другого порядку апроксимації звичайного МСЕ (з точки зору часових затрат при достатній точності розв'язку), ніж СЕ першого (тим більше другого) порядку апроксимації МССЕ.

Тестування алгоритму пружнопластичного аналізу проведено на задачі про пружнопластичну деформацію нескінченного товстостінного циліндра, що перебуває під дією внутрішнього тиску, для якого відомі прості аналітичні розв'язки.

На задачі про пружнопластичну деформацію трубчастого зразка з кільцевим концентратором при одночасному його розтягуванні й крученні продемонстровано ефективність використання повної циклометриї задачі (геометричної і за навантаженнями): суттєво тримірна задача має приблизно ту ж кількість ступенів свободи, як і двомірна, що дозволяє значно прискорити її розв'язання.

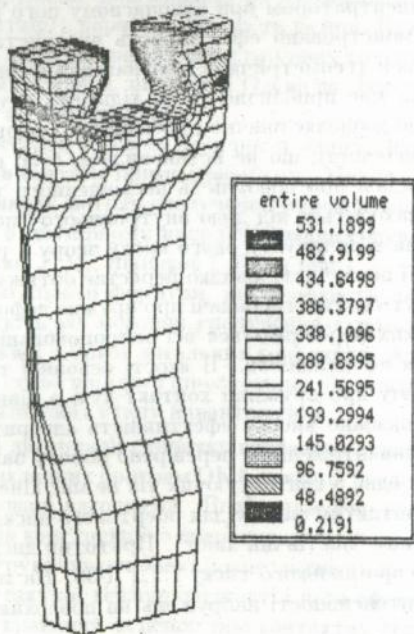
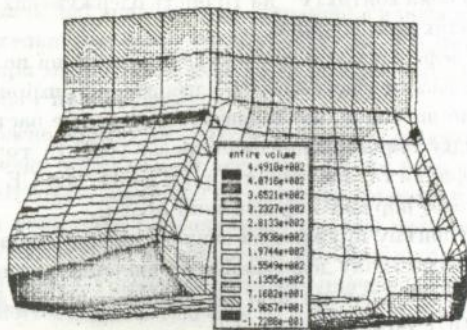
Алгоритм повзучості, що не встановилася, було перевірено при розв'язуванні задачі про повзучість нескінченного товстостінного циліндра, що знаходиться під дією внутрішнього тиску. Показано, що обмеження на величину часового кроку зростає з ростом накопиченої деформації повзучості швидко перестає обтяжувати.

Далі розглянуто контактні задачі про пружне деформування тримірних тіл, в яких перевіряються всі запропоновані контактні алгоритми та їхня ефективність. В якості основної тестової задачі розглянуто задачу про пружний контакт кулі з півпростором (задача Герца). Показано високу ефективність алгоритму. Задаючи для кулі КУ по навантаженнях, перевірено роботу запропонованого алгоритму, коли одне з контактуючих тіл не має кінематичних КУ.

Розв'язано контактну задачу для обертового диска, несучого лопатки в замку типу "ластівчин хвіст". Прототип диска – диск 1-ого ступеня компресора низького тиску ГТД Д-36. На малюнку зображено ізосмуги інтенсивності напружень на поверхнях диска та лопатки.

У Закінченні узагальнено основні результати дисертації.

Основні теоретичні та практичні результати, які здобув особисто автор, полягають у наступному:



Ізосмуги інтенсивності напружень на поверхнях диску та лопатки, одержані розв'язком тримірної крайової контактної задачі.

1. Розроблено та програмно реалізовано ефективні алгоритми чисельного розв'язання крайової задачі термопластичності і повзучості при постановці задачі у приростах, для яких характерно:

безітераційне повне врахування впливу температури на модулі пружності матеріалу;

знаходження величини приросту параметра Одквіста задачі термопластичності в прискореному ітераційному процесі за неявною схемою;

знаходження величини приросту інтенсивності деформації повзучості за безітераційною схемою для технічних теорій стікання та зміщення;

встановлено обмеження згори на розмір часового кроку для задачі повзучості за технічною теорією зміщення.

2. Розвинуто ітераційний метод розв'язання крайових контактних задач методом сполучення розв'язків, йому надано універсальність:

встановлено формули та умови їхнього застосування для призначення ефективних параметрів збіжності методу для контактних задач теплопровідності і термопружності;

метод узагальнено на крайові контактні задачі, коли одне з двох контактуючих тіл обмежено у переміщеннях тільки зоною контакту.

3. Запропоновано алгоритм реалізації моментної схеми в ізопараметричному скінченному елементі.

4. Запропоновано ефективні й універсальні алгоритми змінних зон контакту тримірних контактуючих тіл:

знаходження змінних зон контакту тримірних контактуючих тіл:

сполучення зон контакту і врахування можливого жорсткого зміщення та повороту одного контактуючого тіла відносно другого внаслідок початкового навантаження тіл;

знаходження напрямку дотичного навантаження і деформації на контактній поверхні тримірного тіла.

5. Запропоновано алгоритм винесення значень фізичних величин із гаусових точок інтегрування всередині тримірного скінченного елемента на його поверхні (у вузлі елемента).

6. Розроблені алгоритми реалізовано у вигляді програмного комплексу ОКА та використано у практиці проектування та розрахунків на міцність елементів конструкцій.

Основні положення дисертації викладено в роботах:

1. Пластичность и долговечность элементов машин при различных траекториях нагружения / Н.С.Можаровский, К.Н.Рудаков, А.А.Заховайко. - К.: Вища шк. Головное пзд-во, 1988. - 147 с.
2. Можаровский Н.С., Овсєенко А.Б., Рудаков К.Н. Решение контактных задач методом конечных элементов. Сообщение 1. Описание алгоритма // Изв. ВУЗов. Машиностроение, 1989. - N 6. - С. 3 - 8.
3. Можаровский Н.С., Овсєенко А.Б., Рудаков К.Н. Решение контактных задач методом конечных элементов. Сообщение 2. Тестовые задачи // Изв. ВУЗов. Машиностроение, 1989. - N 7. - С. 6 - 10.
4. Рудаков К.Н. Алгоритм формирования контактных пар в переменной зоне контакта объемных тел со значительным относительным смещением // Вестн. Киев. политехн. ин-та. Машиностроение, 1989. - Вып. 26. - С. 22 - 25.
5. Рудаков К.Н., Овсєенко А.Б., Шестопап А.Т. Численное решение контактной задачи теплопроводности // Изв. ВУЗов. Машиностроение, 1990. - N 8. - С. 3 - 7.
6. Рудаков К.Н. К учету влияния температуры на напряженно-деформированное состояние элементов конструкций при конечно-элементных расчетах // Вестн. Киев. политехн. ин-та. Машиностроение, 1991. - Вып. 28. - С. 6 - 9.
7. Рудаков К.Н. О выборе рационального параметра сходимости численного алгоритма решения краевой задачи контактной теплопроводности, основанного на альтернирующем методе Шварца // Вестник Киев. политехн. ин-та. Машиностроение, 1991. - Вып.28. - С. 3 - 5.
8. Рудаков К.Н. Эффективный алгоритм расчета элементов конструкций на полумуче в рамках метода конечных элементов // Пробл. прочности, 1992. - N 4. - С. 8 - 13.
9. Рудаков К.Н. Об эффективности алгоритмов определения напряжений и пластических деформаций при численном моделировании процессов термосплового нагружения элементов конструкций // Пробл. прочности, 1992. - N 9. - С. 18 - 24.
10. Рудаков К.Н., Запєртов И.О. Перенос значений величин из гауссовых точек численного интегрирования по объемному конечному элементу в узлы конечноэлементной модели тела // Вестник Киев. политехн. ин-та. Машиностроение, 1993. - Вып. 30. - С. 3 - 8.
11. Рудаков К.Н. К выбору рациональных параметров сходимости

в итерационном методе сопряжения решений контактной краевой задачи. Сообщение 1. Задача теплопроводности // Пробл. прочности, 1994. - N 8. - С. 62 - 68.

12. Рудаков К.Н. К выбору рациональных параметров сходимости в итерационном методе сопряжения решений контактной краевой задачи. Сообщение 2. Задача линейной упругости // Пробл. прочности, 1994. - N9. - С. 78 - 85.

13. Рудаков К.Н. К выбору рациональных параметров сходимости в итерационном методе сопряжения решений контактной краевой задачи. Сообщение 3. Задача термоупругости // Пробл. прочности, 1994. - N 10. - С. 53 - 58.

14. Рудаков К.Н. Объемный конечноэлементный анализ деформируемых контактирующих тел с переменной зоной контакта. Сообщение 1. Постановка краевой контактной задачи термопластичности и ползучести, нестационарной теплопроводности // Киев. политех. ин-т. - Киев, 1990. - 20 с. - Деп. в УкрНИИНТИ, N 919-Ук90.

15. Рудаков К.Н. Объемный конечноэлементный анализ деформируемых контактирующих тел с переменной зоной контакта. Сообщение 2. Конечноэлементный алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния трехмерных тел, находящихся в контакте // Киев. политех. ин-т. - Киев, 1990. - 19 с. - Деп. в УкрНИИНТИ, N 920-Ук90.

16. Рудаков К.Н. Объемный конечноэлементный анализ деформируемых контактирующих тел с переменной зоной контакта. Сообщение 3. Конечноэлементный алгоритм расчета теплового состояния трехмерных тел, находящихся в контакте // Киев. политех. ин-т. - Киев, 1990. - 9 с. - Деп. в УкрНИИНТИ, N 921-Ук90.

17. Рудаков К.Н. Объемный конечноэлементный анализ деформируемых контактирующих тел с переменной зоной контакта. Сообщение 5. Субструктурная техника сборки и решения системы линейных алгебраических уравнений методом Краута-Холецкого // Киев. политех. ин-т. - Киев, 1990. - 7 с. - Деп. в УкрНИИНТИ, N 922-Ук90.

18. Рудаков К.Н. Объемный конечноэлементный анализ деформируемых контактирующих тел с переменной зоной контакта. Сообщение 6. Программная реализация численного метода решения трехмерной краевой задачи // Киев. политех. ин-т. - Киев, 1991. - 22 с. - Деп. в УкрНИИНТИ, N 1939-Ук91.

19. Рудаков К.Н. Пластичность жаростойких сталей при повтор-

но-переменных сложных нагружениях. Автореф. дис. ... канд. техн. наук. К.: КПИ, 1984. - 21 с.

20. Колодежный В.А., Можаровский Н.С., Овсеевко А.Б., Рудаков К.Н. Численный расчет контактных напряжений в лопаточном замке диска ГТД с учетом относительного смещения в зоне контакта лопатки и паза / XXII Всесоюзное научное совещание по проблемам прочности двигателей. Москва, 1988, 26 - 28 апр. / М.: АН СССР, 1988. - С. 118 - 120.

21. Колодежный В.А., Овсеевко А.Б., Рудаков К.Н. Напряженно-деформированное состояние дисков и лопаток ГТД в области замковых соединений // В кн.: Тез. докл. международной научно-технич. конф. студентов, молодых ученых специалистов "Молодые ученые в решении комплексной программы научно-технического прогресса стран - членов СЭВ" (Киев, 1989 г., 19 - 22 апр.). - Киев.: Минвуз УССР, 1989. - С. 59 - 60.

22. Овсеевко А.Б., Рудаков К.Н. Численное решение контактных упругопластических задач // В кн.: Международна научна конференция за студенти и млади научни работници "Приложение на компютърните технологии в производството" Сб. резюмета на докладе (Варна, 16 - 19.11.1989 г.), Варна.: ВМЕП, 1989. - С. 29.

23. Можаровский Н.С., Рудаков К.Н. Эффективные алгоритмы расчета элементов двигателей с учетом термопластичности и ползучести в рамках метода конечных элементов / XXIII Всесоюзное научное совещание по проблемам прочности двигателей. Москва, 1990, 24 - 26 апр. / М.: АН СССР, ЦИАМ. - С. 123 - 124.

24. Рудаков К.Н. Теоремы о рациональном выборе параметров сопряжений в итерационном методе сопряжения решений контактных краевых задач теплопроводности и термоупругости // В кн.: Научное совещание "Термовязкоупругопластические процессы деформирования в элементах конструкций". Тез. докл. (Киев. 27 - 29 мая 1992 г.) - Киев.: ИМ АНУ, 1992. - С. 73.

25. Рудаков К.Н. Эффективный численный алгоритм решения краевых задач термопластичности и ползучести в рамках метода конечных элементов // В кн.: Научное совещание "Термовязкоупругопластические процессы деформирования в элементах конструкций". Тез. докл. (Киев. 27 - 29 мая 1992 г.) - Киев.: ИМ АНУ, 1992. - С. 74.

26. Рудаков К., Овсеевко О. Метод сполучення розв'язків у крайових контактних задачах механіки деформованого твердого тіла //

У кн. 1 й Міжнародний симпозиум українських інженерів-механіків у Львові 18-20 травня / Львів: Львівській політехнічний інститут, 1993 р. - с. 82 - 83.

Особистий внесок пошукувача у працях, виконаних у співавторстві: у монографії написано другу главу; у роботах 2, 3, 5, 10, 20 - 23, 26 запропоновано алгоритми, про які йдеться у працях.

#### Аннотація

Рудаков К.Н. Эффективные алгоритмы решения трехмерных краевых задач механики деформируемого твердого тела методом конечных элементов. Рукопис.

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.02.07 - механика деформируемого твердого тела, Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт", Киев, 1996.

В диссертации на базе метода конечных элементов разработаны и программно реализованы эффективные алгоритмы решения трехмерных краевых задач термоупругости, термопластичности и ползучести в обычной и контактной постановке.

Предложены алгоритмы: безытерационного полного учета влияния температуры на модули упругости материала при постановке задачи в приращениях; нахождения величин приращений параметра Оджвиста и интенсивности деформаций ползучести в точке тела по неявной и двухслойной безытерационной схемам соответственно; реализации моментной схемы в изопараметрическом конечном элементе; алгоритмы переменных зон контакта (ПЗК) трехмерных контактирующих тел (нахождения ПЗК, согласования зон контакта и учета возможного жесткого смещения и поворота одного контактирующего тела относительно другого в результате начального нагружения тел; нахождения направлений касательных напряжения и деформации на контактной поверхности трехмерного тела); алгоритм выноса значений физических величин из гауссовых точек интегрирования трехмерного конечного элемента на его поверхности (в узлы конечноэлементной сетки).

Развит итерационный метод решения краевых контактных задач - метод сопряжения решений, ему придана универсальность: получены формулы и условия их применения для назначения эффективных скалярных параметров процесса для контактных задач теплопроводности и термоупругости; метод обобщен на краевые контакт-

ные задачи, когда одно из двух контактирующих тел ограничено в перемещениях только зоной контакта.

Разработанные алгоритмы реализованы в программном комплексе ОКА.

### THE ABSTRACT

Rudakov C.N. Efficient algorithms of 3-dimension border sums' solution in the mechanics of deformable bodies with the finite element method.

This dissertation is written to compete the academic degree of Doctor of Technological Sciences, speciality 05.02.07 - mechanics of deformable bodies, The National Technical University of Ukraine "The Kyiv Polytechnical Institute", Kyiv, 1996.

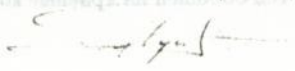
In this dissertation we have worked out and built into a program the efficient algorithms of the solution of the 3-dimension border sums for thermoelasticity, thermoplasticity and creep in both normal and contact formulation on the basis of the finite element method.

The suggested algorithms: non-iterational total registration of temperature's influence on the substance's elasticity modulus in the problems of increment; the finding of the Odquist parameter increments quantities and creep strain intensity in a point of a body after latent and 2-layer non-iterational schemes accordingly; the realization of moment's scheme in isoparameterical finite element; the algorithms of variable contact zones (VCZ) of 3-dimension contacted bodies (VCZ finding, the agreement of contact zones and registration possible hard shift and turning of one contacted body the other in consequence of the initial loading of bodies, the finding of tension and strain tangents directions on the contact surface of the 3-dimension body); the algorithm of taking value of physical quantities out from Gauss points of integration of the 3-dimension finite element on its surface (to nodes of finite-element).

We have developed iterational method of border contact sums' solution - the solutions conjugation method, it has given universion: we have got formulas and conditions their using for fixing of efficient process parameters for contact sums of heat conduction and thermoelasticity; we have generalized the method for border contact sums, when one of two contacted bodies is limited in its displacements only by contact zone.

Elaborated algorithms have realized in program complex of ОКА.

Ключові слова: напружено-деформований стан, метод скінченних елементів, пластичність, повзучість, контактна крайова задача.





AB 34.255

**AB 34.255**