Національна Академія Наук України
Інститут Кібернетики імені В.М. Глушкова

На правах рукопису

Павлова Людмила Олександрівна

УДК 519.8

РОЗРОБКА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ПДС-АЛГОРИТМІВ ДЛЯ ВАЖКОРОЗВ'ЯЗУВАНИХ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

01.05.01 - теоретичні основи інформатики та кібернетики
(математична кібернетика)

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеню кандидата
фізико-математичних наук

Київ-1996

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Національному Технічному Університеті України "Київський політехнічний інститут".

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук

Асельдеров З.М.

Офіційні опоненти:

член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
професор Шор Наум Зуселевич,
с.н.с., кандидат фізико-математичних наук Білецький Платон Михайлович

Провідна установа: Київський Університет імені Т. Шевченко

захист відбудеться "26" "квітня" 1996 р.
о годині на засіданні спеціалізованої ради Д 01.39.02 при Інституті кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України
за адресою:
252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40.
З дисертацією можна ознайомитися в науково-технічному архіві інституту.

Автореферат розіслано "22" "березня" 1996 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради В.Ф.Синявський

Загальна характеристика дисертаційної роботи

Актуальність тематики і ступінь її дослідженості

Аналіз математичних моделей, що використовуються в інформатиці, дослідженні операцій, сучасній теорії управління, економічній кібернетиці, прикладній і обчислювальній математиці, свідчить про важливу роль важкорозв'язуваних комбінаторних задач (ВКЗ) (задачі розпізнавання з класу NP та породжувані ними задачі комбінаторної оптимізації), а також ефективних методів їх розв'язання. Прийняття гіпотези P≠NP, яке базується на існуючих на сучасному етапі точних алгоритмах розв'язання ВКЗ, та теоретичні властивості цього класу задач, що випливають з цієї гіпотези, ставлять перед дослідником достатньо складну проблему пошуку нових, ефективних, точних алгоритмів їх розв'язання. Основні відомі універсальні підходи розв'язання ВКЗ можна класифікувати таким чином.

1. Із досліджуваної комбінаторної задачі виділяють підклас (визначений обмеженнями, що накладаються на параметри цієї задачі), для якого будується поліноміальний точний алгоритм. Практична реалізація першого підходу істотно обмежена як малою кількістю відомих на даному етапі підкласів комбінаторних задач, що поліноміально розв'язуються, так і суттєвою обмеженністю з точки зору практики їх математичних моделей.

2. Точні методи розв'зання. Ця група методів базується на правилах відсічень конкуруючих варіантів, що побудовані на ідеях методів гілок та границь, відсічень, послідовного конструювання варіантів, динамічного програмування та їх модифікацій. Головний недолік цієї групи методів при розв'язанні ВКЗ загального вигляду достатньо великої розмірності -- статистично-значимо реальний

обсяг обчислювань визначається експоненціальним алгоритмом.

3. Наближені та евристичні алгоритми. Створення наближених або евристичних алгоритмів, що дають можливість розв'язувати задачі великої розмірності. Їх практична ефективність перевіряється на задачах меншої розмірності (шляхом статистичного порівняння з точним рішенням) і якісно обгрунтовується прийнятністю закладених у них евристик. Ці евристики породжуються самою математичною моделлю та особливостями розв'язуваної практичної задачі. Запропонований підхід буде придатним лише в тому випадку, коли отримання точного рішення не є принципово необхідним. Достатньо, у певному розумінні, "розумного" рішення. В даному випадку, головне -- це можливість його отримання для задач великої розмірності.

Таким чином, проблема створення точних ефективних універсальних алгоритмів для важкорозв'язуваних комбінаторних задач на сьогодні залишається актуальною.

<u>Мета роботи.</u> Створення нового підходу до розробки точних алгоритмів для важкорозв'язуваних комбінаторних задач і дослідження його ефективності.

Методи дослідження базуються на поняттях і результатах теорії алгоритмів, теорії графів, теорії розкладів та методів дискретної оптимізації.

<u>Наукова новизна</u>.

- Введення поняття ПДС-алгоритму для важкорозв'язуваної задачі комбінаторної оптимізації.

- Введення нового критерію оцінки ефективності точних алгоритмів для важкорозв'язуваних задач комбінаторної оптимізації.

- Розробка та дослідження ефективності ПДС-алгоритму для задачі "Максимальна незалежна множина" (МНМ).

- Розробка та дослідження ПДС-алгоритму для задачі "Мінімізація сумарного зваженого моменту закінчення робіт, якщо відношення порядку задано орієнтованим ациклічним графом" у самій загальній постановці (ваги можуть бути недодатніми числами).

Теоретична та практична цінність роботи

Розроблені ПДС-алгоритми дозволяють статистично вагомо розв'язувати задачі "Максимальна незалежна множина" (МНМ), "Вершинне покриття" (ВП), "Хроматичне число" (ХЧ), "Здійсненність" (ЗД), "Максимальна кліка" (МК), "Розбиття на кліки" (РК), "Гамільтонів цикл" (ГЦ), "Гамільтонів шлях" (ГШ), "Мінімізація сумарного зваженого моменту закінчення робіт, якщо відношення порядку задане орієнтованим ациклічним графом" (МВМ) для випадку, коли параметри задачі МВМ моделюються випадковим чином.

Публікації та апробації роботи

Основні результати по темі дисертації опубліковані в одній монографії, у 10-ти друкованих роботах і доповідались на таких конференціях: 3-я міжреспубліканська конференція молодих вчених та студентів, Україна, Київ, 1989 р.; International conference on system science, Wroclaw, Poland, 1992; III Міжнародна науково-технічна конференція, Україна, Харків, 1993 р.; I-ша Українська конференція по автоматичному управлінню і автоматиці, Україна, Київ, 1994 р.

Структура та обсяг роботи

Дисертація складається з вступу, 3-х розділів, висновків, списку використаної літератури (84 назви) та додатку. Основну частину викладено на 145 сторінках машинописного тексту і 10 малюнках.

Зміст роботи

У вступі обгрунтовано актуальність розглянутих у дисертації питань, коротко викладено зміст роботи.

Розділ I. ПДС-алгоритми для важкорозв'язуваних комбінаторних задач, основи методології їх побудови.

У цьому розділі визначено основні теоретичні властивості важкорозв'язуваних комбінаторних задач та методів їх розв'язання. Коротко викладено теоретичні результати, які випливають з прийняття гіпотези P≠NP, і, на їх основі, критичний огляд відомих підходів до розробки точних алгоритмів розв'язання ВКЗ.

Визначення. ПДС-алгоритмом для важкорозв'язуваної задачі комбінаторної оптимізації називається алгоритм, який складається з поліноміального підалгоритму та експоненціального підалгоритму з декомпозиційною складовою.

Поліноміальний підалгоритм визначається слідуючими властивостями -- якщо в процесі розв'язання довільної індивідуальної задачі виконуються доступні для перевірки та строго визначені логіко-аналітичні умови, то дана довільна індивідуальна задача має точне рішення, визначене цим підалгоритмом (складність підалгоритму є фіксованим поліномом від розмірності довільної індивідуальної задачі).

Експоненціальний підалгоритм включає доступні перевірці та строго визначені логіко-аналітичні умови, при виконанні яких в процесі розв'язання довільна індивідуальна задача строго декомпозується на підзадачі меншої розмірності.

Оцінкою ефективності розглянутого ПДС-алгоритму є його статистична значимість, тобто те, що при масовому моделюванні випадковим чином індивідуальних задач даної важкорозв'язуваної комбінаторної задачі, статистично-значимо вони належать до множини поліноміально розв'язуваних індивидуальних задач, яка визначена поліноміальною складовою її ПДС-алгоритму.

Розділ 2. ПДС-алгоритм задачі "Максимальна незалежна множина" (МНМ).

Множина вершин графу $G=(V,E)$ називається незалежною, якщо ніякі дві вершини з цієї множини не є суміжними. Тобто, якщо $S\subseteq V$ незалежна у графі G, то породжений нею підграф $G(S)$ є порожнім. Треба знайти незалежну множину V', яка має найбільшу потужність серед усіх незалежних множин графа G.

У цьому розділі розглядаються властивості задачі "Максимальна незалежна множина" та запропоновано алгоритм її розв'язання, що відповідає вимогам ПДС-алгоритму. Введемо такі визначення.

Визначення 1. Поточною незалежною множиною - V^{Tk} є : на 1-й ітерації алгоритму -- побудована допустима незалежна множина; на k-й ітерації алгоритму -- поточна незалежна множина, одержана на k-1-й ітерації алгоритму.

Визначення 2. Набрана незалежна множина на k-й ітерації -- V^{Hk}, це довільна підмножина вершин, які не ввійшли до допустимої незалежної множини, та які попарно не зв'язані в графі G ребрами між собою.

$V^{Tk}_{a_i}$ -- це підмножина вершин з V^{Tk}, кожна з яких зв'язана ребром в графі G з вершиною a_i.

Ствердження 1. Нехай G^k - це підграф графа G, побудований на всіх вершинах множини $V\backslash\{a_{k+1},\dots,a_r\}$. Тоді $V^{T(k+1)}$ є рішенням задачі МНМ для графа G^k.

Твердження 2. Нехай для довільної підмножини вершин $\{u_1,\dots,u_m\}$ з множини $\{v_1,\dots,v_{l_{k-1}},a_k\}$ виконується $V^{Tk}_{u_j}\cap V^{Tk}_{u_i}=\emptyset$, $V^{Tk}_{u_i}\geqslant 1$, $\forall i\neq j$. Тоді множина $\{u_1,\dots,u_m\}$ не є поліпшуючою.

Теорема I. Нехай V^{Tk} є оптимальним рішенням задачі для графа $G_k=(V_k,V_k\times V_k\cap E)$, тоді необхідньою і достатньою умовою $\exists\, V'\subseteq V_k\cup\{a_k\}$, $U'\subseteq V^{Tk}$ такого, що $(V^{Tk}\cup V')\setminus U'$ – незалежна множина та $|V'|-|U'|>0$, є:

I. V'' – набрана незалежна множина, $\Delta^{Tk}_{V''}=0$; 2. $V_{a_k}^{Tk}\subseteq V^{Tk}_{V''}$; $\forall$ $v_i\in V''$, $(v_i,a_k)\notin E$, де $V''=V'\setminus\{a_k\}$.

Визначення 3. Вершина a_k має покриття на k-й ітерації, якщо існує множина $V^{Hk}\subseteq V\setminus\{a_k,a_{k+1},\dots,a_r\}$, для якої $\Delta^{Tk}_{Hk}=0$ та для $\forall\, v_i\in V^{Tk}_{a_k}$ виконується: $v_i\in V^{Tk}_{V^{Hk}}$ і не існує вершини з V^{Hk}, зв'язаної у графі G ребром з a_k, тобто $V^{Tk}_{a_k}\subseteq V^{Tk}_{V^{Hk}}$ і для $\forall\, v_i\in V^{Hk}$ $(v_i,a_k)\notin E$; $V^{УПk}=V\setminus V^{Tk}$.

Твердження 3. Нехай при виконенні всіх вимог теореми 1 існує покриття V' для вершини a_k, та є така підмножина $V''\subset V'$, що для кожної її вершини v_l в множині $V^{Tk}_{V'}\setminus V^{Tk}_{a_k}$ існує хоч одна вершина, яка зв'язана з v_l ребром, та більше не зв'язана в графі G ні з однією з вершин множини $V'\setminus\{v_l\}$. Назвемо її ізольованою. Тоді множина $V'\setminus V''$ є також покриттям вершини a_k.

Визначення 4. Множина $S\in V_k$ називається замкненою, якщо $\forall i\in V^{Tk}_S$, $\exists\, u\in S$, $v\in S$, $u\neq v$: $(u,i)\in E$, $(v,i)\in E$.

Визначення 5. Замкнута множина S називається максимальною замкненою множиною, якщо не існує такої замкненої множини S', $S'\subset V_k$, $S\subset S'$, що $\exists$ поділ S' на S та F такий, що $S\cup F=S'$, $V^{Tk}_S\cap V^{Tk}_F=\emptyset$.

Твердження 5. Нехай $\exists\ u\in V^{Tk}_{a_k}$, що $\forall v_j\in V_k$ виконується $V^{Tk}_{v_j}\cap\{u\}=\emptyset$. Тоді вершина a_k не має покриття.

Висновок. Вершина a_k не має покриття і в тому випадку, коли $\exists\ V^{Tk}_{v_j}\cap\{u\}=\{u\}$, але $(v_j,u)\in E$.

Твердження 6. Нехай для вершини $v_i\in V_k$ виконується така умова: $\exists\ u_1,u_2\in V^{Tk}_{a_k}$: $V^{Tk}_{v_i}\cap\{u_1\}=\{u_1\}$, $V^{Tk}_{v_i}\cap\{u_2\}=\emptyset$; і для $\forall\ v_j\neq v_i$, $v_j\in V_k$ такої, що $V^{Tk}_{v_j}\cap\{u_2\}=\{u_2\}$ виконується $(v_i,v_j)\in E$. Тоді вершина v_i не належить до покриття a_k.

Висновок I. Нехай виконується умова твердження 6 та для $\forall\ v_l\neq v_i$, $v_l\in V_k$ і $(v_l,u_1)\notin E$. В цьому випадку вершина a_k не має покриття.

Висновок 2. Нехай вершина v_{i1} задовольняє визначенню твердження 6 та існує p вершин v_{it}, $t=\overline{2,p}$, таких, що $(v_{it},u_1)\in E$, $t=\overline{1,p}$ та

1) для $\forall\ v_{it}$ існує вершина $u_r\in V^{Tk}_{a_k}$, така, що $(v_{it},u_r)\notin E$;

2) для $\forall\ v_{jt}\in V_k$, $it\neq jt$, $(v_{jt},u_r)\in E$, виконується $(v_{it},v_{jt})\in E$.

Тоді покриття для вершини a_k не існує.

Твердження I2. Нехай на деякому кроці побудована замкнена множина $S'\subset S$, така, що $V^{S'}_{V'_k}=V^{S}_{V'_k}$; S -- це раніше побудована замкнена множина. Тоді продовження процедур алгоритму приведе до побудови максимальних замкнених множин $\{S''\}$, кожна з яких обов'язково є складовою елементів множини $\{V^{мнk}_i\}$, де $V^{мнk}_i$ -- максимальні замкнені множини, які вміщують S.

Теорема 2. Якщо на k-й ітерації існує поліпшуюча множина для множин V_k і V^{Tk}, то така множина існує також і для пари $\bar V_k\cup\{a_k\}$, $\overline{V^{Tk}}$, де множини $\bar V_k$ та $\overline{V^{Tk}}$ утворені після проведення еквівалентної заміни в множинах V_k та V^{Tk}.

На базі вище розглянутих положень розроблено ПДС-алгоритм розв'язання задачі МНМ, який має таку структуру: побудова допустимої незалежної множини, упорядкування залишку вершин відповідно їх зв'язності з побудованою допустимою незалежною множиною, ітераційна процедура побудови покриття для вершини a_k, доданої до V_k на розглянутій ітерації. Суть роботи алгоритму на кожній ітерації полягає у перевірці теоретичної можливості включення на данній ітерації вершини, яку розглядаємо, до поточної допустимої незалежної множини. У випадку позитивного результату виконується корекція допустимої незалежної множини і, як наслідок, її потужність збільшується на одиницю. V^{Tr} -- поточна незалежна множина, що одержана на останній ітерації і є рішенням задачі "Максимальна незалежна множина".

Алгоритм побудови покриття вершини a_k складається з слідуючих процедур: поліноміальних процедур визначення вершин, які напевно входять чи не входять в покриття вершини a_k -- гілки алгоритму В1-В3, В42-В44; побудови масивів зв'язності вершин з множин V^{Hk}, V^{Tk} і V_k -- гілка В1; находження масивів мінімальної довжини -- гілка В41 та сукупності вершин, які додаються до V^{Hk} на кожному кроці -- гілка В45; процедури побудови замкнених та всіх максимальних замкнених множин -- гілки В5 і В6; процедури пошуку покриття для кожної максимальної замкненої множини або визначення факту його відсутності -- гілка В7. Теоретичне обгрунтування логіко-аналітичних умов поліноміальної алгоритмічної процедури побудови максимальних замкнених множин (приведених та обгрунтованих в дисертаційній роботі) -- умови 1-8 та ствердження 13 для В5; В61, умови 10-12 для В6; знаходження покриття (або встановлення факту його відсутності) для кожної максимальної замкненої множини -- умови 13-15. Теоретичне обгрунтування логіко-аналітичних умов поліноміальної складової ПДС-алгоритму задачі МНМ і точної декомпозиції вихідної задачі на підзадачі меншої розмірності є твердження 14 та умови 16,17.

Розроблено методику дослідження статистичної ефективності запропонованого ПДС-алгоритму (як усередненої характеристики його ефективності) для важкорозв'язуваних задач комбінаторної оптимізації "Максимальна незалежна множина", "Вершинне покриття", "Хроматичне число", "Здійсненність", "Максимальна кліка", "Розбиття на кліки", "Гамільтонів цикл", "Гамільтонів шлях".

Як наслідок проведеного статистичного моделювання встановлено, що запропонований ПДС-алгоритм є статистично ефективним для задач МНМ, ВП, ЗД, ХЧ, РК, МК, ГЦ, ГШ, які моделюються випадковим чином. Цей висновок став наслідком аналізу результатів проведеного статистичного дослідження.

1) Поліноміальна складова ПДС-алгоритму задачі МНМ статистично-значимо точно вирішує довільну індивідуальну задачу МНМ, неорієнтований граф якої має таку характеристику -- середньоарифметична ступінь вершин графа знаходится у межах 0-8% або 35-100% від ступені графа; індивідуальна задача МНМ з середньоарифметичним ступенем вершин графа у діапазоні 17%-25% статистично-значимо вирішується експоненціальною складовою ПДС-алгоритму задачі МНМ.

2) Для задачі ВП характеристики ефективності повністю співпадають з поданими в п.1), а задачі МК ці характеристики виконуються для додаткового графа.

3) Задачі ХЧ, РК, ГЦ, ГШ при зведенні їх до задачі МНМ

статистично-значимо знаходяться у межах 0-10%; підклас індивідуальних задач "ЗД", зведених до задачі МНМ у межах середньоарифметичної ступені вершин 0-10%, не є виродженим.

Необхідно відзначити, що при розв'язанні ПДС-алгоритмом будьякої довільної індивідуальної задачі з наведених класів, завжди відомо, чи є одержане рішення точним, чи ні.

Розділ 3. ПДС-алгоритм задачі "Мінімізація сумарного зваженого моменту закінчення робіт, якщо відношення порядку задано орієнтованим ациклічним графом" для випадку, коли параметри задачі МВМ моделюються випадковим чином

У цьому розділі подано алгоритм вирішення задачі МВМ, який задовольняє вимогам ПДС-алгоритму, для випадку, коли параметри задачі МВМ моделюються випадковим чином.

Частково упорядкована множина $J=(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ завдань, які починаючи з моменту часу $d=0$ обслуговуються одним приладом. Завдання обслуговуються без припинення, не більш ніж одне одночасно. Необхідно знайти таку послідовність обслуговування завдань, для якої сумарний зважений момент завершення виконання завдань є мінімальним:

$$F = \sum_{k=1}^{n} w_{j_{[k]}} c_{j_{[k]}} \to min \qquad (3.1)$$

де w_j -- дійсні числа, $c_{j_{[k]}}$ -- момент завершення виконання завдання, яке займає у допустимому розкладі k-у позицію, $l_j \geq 0$;

$$c_{j_{[k]}} = \sum_{s=1}^{k} l_{j_{[k]}} \qquad (3.2)$$

$\prec$ - відношення порядку, запис $j_{[s]}$ означає, що робота j займає у розкладі g-ту позицію.

Ствердження 1. (Отримано Сіднеєм Дж.Б.). Нехай на множині перестановок P задано функціонал

$$F(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} w_{j_{[k]}} c_{j_{[k]}} .$$

Тоді для довільних перестановок

$$\begin{aligned} \Pi' &= (\Pi^{(1)}, \Pi^{(a)}, \Pi^{(b)}, \Pi^{(2)}), \\ \Pi'' &= (\Pi^{(1)}, \Pi^{(b)}, \Pi^{(a)}, \Pi^{(2)}), \end{aligned} \qquad (3.3)$$

які належать P, існує функціонал $f(\Pi)$, який задовольняє таким властивостям: з умови $f(\Pi^{(a)}) > f(\Pi^{(b)})$ випливає $F(\Pi') < F(\Pi'')$, а з умови $f(\Pi^{(a)}) = f(\Pi^{(b)})$ -- рівність $F(\Pi') = F(\Pi'')$.

$P(\Pi) = \sum_{j\in\{\Pi\}} w_j \Big/ \sum_{j\in\{\Pi\}} l_j$ -- пріоритет перестановки Π.

Визначення. P-впорядкованим розкладом називається допустима послідовність виконнаня завдань, яка задовольняє слідуючим вимогам:

а) першою виконується підмножина $S_1 \subset J$, (J -- множина всіх завдань), яка має максимально можливий пріоритет, тобто

$P(S_1) > P(U)$, $\forall\ U \subset J/S_1$;

б) підмножина S_1 вміщує максимально можливу кількість завдань, при умові виконання нерівності пункту а);

в) другою виконується підмножина S_2, яка задовольняє вимогам а), б) на множині завдань J/S_1 і т.д.

Теорема 1. Оптимальний розклад є P-впорядкованим (теорема отримана Сіднеєм Дж.Б.).

Теорема 2. Якщо відношення порядку задається послідовно-паралельним графом, P-впорядкований розклад є оптимальним в умовах виконання всіх перестановок, визначених у ствердженні 1.

Ствердження 2. Якщо в допустимій послідовності σ для незалежних ланцюгів завдань $\alpha=(J_{[r]},\ldots,J_{[g]})$; $\beta=(J_{[s]},\ldots,J_{[f]})$; де $f<r$, виконується $P(\alpha(J_{[g]}))\leqslant P(\beta(J_{[f]}))$ та справедливі слідуючі умови: якщо $J_{[v]}\prec\beta(J_{[f]})$, то $\dfrac{w_{J_{[v]}}}{l_{J_{[v]}}}\geqslant P(\beta(J_{[f]}))$; якщо

$\alpha(J_{[g]})\prec J_{[k]}$, то $\dfrac{w_{J_{[k]}}}{l_{J_{[k]}}}\leqslant P(\alpha(J_{[g]}))$ $\forall\, v<s,\ k>g,$

тоді у пріоритетно-впорядкованому розкладі ланцюг завдань $\beta(J_{[f]})$ має виконуватися раніше, ніж ланцюг завдань $\alpha(J_{[g]})$.

Ствердження 5. Нехай послідовність, яка вміщує підпослідовність $\sigma^1\cup J_{[g]}$, є p-впорядкованою. При виконанні умови $P(\alpha(J_{[g]}))>P(\beta(J_{[f]}))$ в пріоритетно-впорядкованому розкладі позиції між ланцюгами завдань $\beta(J_{[f]})$ та $\alpha(J_{[g]})$ можуть займати тільки ланцюги завдань $z(J_{[g]})$, $r>q>f$, для яких справедливо

$$\frac{\Omega z(J_{[q]})}{Lz(J_{[q]})}\geqslant\frac{\Omega\alpha(J_{[g]})}{L\alpha(J_{[g]})};\ \beta(J_{[f]})\prec z(J_{[q]}),\qquad(3.4)$$

де $\Omega\alpha(J_{[g]})=\sum\limits_{J\in\alpha(J_{[g]})}w(J)$; $L\alpha(J_{[g]})=\sum\limits_{J\in\alpha(J_{[g]})}l(J)$.

Ствердження 6. Нехай є підпослідовність α та сукупність підпослідовностей $G(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ ($\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ — не зв'язані по графу підпослідовності робіт). Тоді об'єднання підпослідовностей до яких належіть α, що мають максимальний пріоритет, визначається слідуючим правилом.

Будуємо послідовність робіт G_1:

$G_1=(\alpha_{(1)},\alpha_{(2)},\ldots,\alpha_{(k)})$; $P(\alpha_{(1)})$ $P(\alpha_{(2)})\geqslant\ldots$ $P(\alpha_{(k)})$;
$P(\alpha_{(j)})>P(\alpha)$, $j=\overline{1,k}$, $\forall\alpha_j\in G/G_1$, $P(\alpha_j)\leqslant P(\alpha)$.

Об'єднання підпослідовностей, які мають сумарний максимальний пріоритет $\alpha, \alpha_{(1)}, \dots, \alpha_{(p)}$, визначається з умов

$$P_{max} = P(\alpha + \sum_{j=1}^{p} \alpha(j) \geq P(\alpha + \sum_{j=1}^{p-t} \alpha_{(j)}), \; t=\overline{1,p-1} \qquad (3.5)$$

$$P(\alpha + \sum_{j=1}^{p} \alpha_{(j)}) < P(\alpha + \sum_{j=1}^{p+1} \alpha_{(j)}).$$

На основі викладених вище результатів та додаткових теоретичних досліджень, приведених у дисертаційній роботі, побудовано оригінальний поліноміальний ітераційний алгоритм розв'язання задачі МВМ для відношення порядку, заданого послідовно-паралельним графом, який декомпозує граф на множини максимальних пріоритетів та будує оптимальний розклад для кожної такої множини. Введено поняття простої та складної конструкцій, які є узагальненими p-впорядкованими структурами множин максимального пріоритету для послідовно-паралельного графа.

На основі даного алгоритму побудовано та обгрунтовано ПДС-алгоритм розв'язання задачі МВМ для довільно визначених параметрів задачі. В алгоритмі введено розширене поняття простої та складної конструкцій для довільного графа і використовується процедура отримання оптимального розкладу для задачі з меншою кількістю обмежень, який є допустимим для вихідної задачі.

У дисертаційній роботі запропоновано і обгрунтовано логіко-аналітичні умови, виконання яких на кожнім k-м кроці роботи ПДС-алгоритму реалізує його поліноміальну складову. Розбиття початкового розкладу на множини максимальних пріоритетів реалізує декомпозиційну гілку ПДС-алгоритму. Все ж необхідно зауважити, що, як показали теоретичні дослідження і результати статистичних експериментів, поліноміальна складова ПДС-алгоритму задачі МВМ є статистично-значимою лише для масового довільного моделювання графа часткового впорядкування, ваг і тривалостей завдань.

У висновках викладено основні результати, які отримані в дисертаційній роботі:

- Введено визначення *ПДС-алгоритму* -- алгоритму точного розв'язання важкорозв'язуваних комбінаторних задач.
- Введено новий критерій оцінки ефективності точних алгоритмів для важкорозв'язуваних комбінаторних задач.
- Досліджено властивості NP-складної задачі "*Максимальна незалежна множина*". Знайдено та теоретично обгрунтовано умови, яким задовольняє її оптимальне рішення.
- Побудовано і теоретично обгрунтовано *ПДС-алгоритм* розв'язання задачі МНМ.
- Розроблено методику дослідження статистичної ефективності запропонованого ПДС-алгоритму (як усередненої характеристики його ефективності) для важкорозв'язуваних задач комбінаторної оптимізації "Максимальна незалежна множина", "Вершинне покриття", "Хроматичне число", "Здійсненність", "Максимальна кліка", "Розбиття на кліки", "Гамільтонів цикл", "Гамільтонів шлях". Визначено його статистичну ефективність для цих задач.
- Розглянуто NP-складну задачу "Мінімізація сумарного зваженого моменту закінчення робіт" у самій загальній постановці. Досліджено теоретичні властивості як самої задачі, так і її оптимального рішення.
- Побудовано та теоретично обгрунтовано *ПДС-алгоритм* розв'язання задачі МВМ, який є статистично ефективним, коли параметри задачі МВМ моделюються випадковим чином.

За темою дисертації опубліковано наступні роботи:

1. Конструктивные полиномиальные алгоритмы решения индивидуальных задач из класса NP. / А.А.Павлов, А.Б.Литвин, Е.Б.Мисюра, Л.А.Павлова, В. И.Родионов. - К., Техника, 1993. -126 с.

2. А.А.Павлов, Л.А.Павлова. Принцип суперпозиции эталонных алгоритмов. -К.,1994, Деп.в УкрНИИНТИ 01.10.94, N430 - Ук 93.

3. Павлова Л.А. Алгоритм решения задачи "Максимальное независимое множество". -- К., 1993.-- 58с. -- Деп. в УкрНИИНТИ 29.06.93, N -- 1277 -- Ук.93.

4. Универсальный алгоритм решения задачи "Минимизация взвешенного момента окончания работ при отношении порядка, заданном ориентированным ациклическим графом" / Л.А.Павлова, Е.Б.Мисюра и др. - К., 1992, 58с. - Деп. в УкрНИИНТИ 05.05.90, N 569, Ук.92.

5. Эффективные алгоритмы полиномиального сведения задач распознавания из класса NP к эталонным задачам / А.Б.Литвин, Л.А.Павлова и др. - К., 1991, 54с. - Деп. в УкрНИИНТИ 04.07.91, N 984, Ук.91.

6. Эффективные частные алгоритмы сведения сведения индивидуальных комбинаторных задач из класса NP к эталонной задаче / А.Б.Литвин, Л.А.Павлова и др. - К., 1992,19с. - Деп. в УкрНИИНТИ 14.02.92, N 169, Ук.92.

7. А.А.Павлов, Л. А.Павлова. Нахождение дополнительных условий полиномиальной разрешимости задачи "Минимизация суммарного взвешенного момента окончания работ при отношении порядка, заданном ацикличным ориентированным графом". III Международная научно-техническая конференция. Методы

представления и обработки случайных сигналов и полей. Тезисы докладов, стр. 121, Харьков, 1993 г.

8. А.А.Павлов, Л.А.Павлова. Принцип суперпозиции эталонных алгоритмов. 1-я украинская конференция по автоматическому управлению, автоматике -- 94, Киев 1994 г. Тезисы докладов, часть 1, стр. 210.

9. А.А.Павлов, Л.А.Павлова."Основы методологии проектирования ПДС-агоритмов для труднорешаемых комбинаторных задач"--Киев, 1995 г, Проблемы информатики и управления, No 4, ст. 135-141.

10. A.A. Pavlov, A.B. Litvin, L.A. Pavlova."Efficient reduction of different intractable problems to the "Reference problems" -- Sequencing jobs to minimize the total weighted completion time subject to preceding constraints". International conference on systems science, abstracts of papers, p.119-120, Wroclaw, Poland, 1992.

Павлова Людмила Александровна "Разработка и исследование ПДС-алгоритмов для труднорешаемых задач комбинаторной оптимизации". Работой является рукопись на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.01 - теоретические основы информатики и кибернетики (математическая кибернетика).

Защита состоится " "" " 1996 г. в часов на заседании специализированного совета Д 01.39.02 при Институте кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины по адресу г. 252022, г. Киев 22, проспект Академика Глушкова, 40.

Диссертационная работа посвящена созданию точных алгоритмов для труднорешаемых комбинаторных задач, базирующихся на идеях выделения полиномиальной и декомпозиционной составляющих (ПДС-алгоритмов). Представлены два ПДС-алгоритма для труднорешаемых комбинаторных задач "Максимальное независимое множество" и "Минимизация суммарного взвешенного момента окончания работ при отношении порядка, заданного ацикличным ориентированным графом" и рассмотрены результаты их статистических исследований.

Pavlova Ludmila Alexandrovna "Development and study of PDC-algorithms for intractable problems of combinatorial optimisation". This scientific work is a manuscript to submit thesis for candidate of physics and mathematics sciences in speciality 01.05.01 - theoretical bases of informatics and cybernetics (mathematical cybernatics).

This manuscript deals with creation of exact algorithms for intractable combinatorial problems. These algorithms are based on the ideas of extraction of polynomial and decomposiotional components (PDC-algorithms). Author presents two PDC-algorithms for "Independent Set" problem and "Sequencing jobs to minimise total weighted completion time subject to preceding constraints" problem and results of the study of their statistical effectiveness.

Ключові слова: важкорозв'язувана задача комбінаторної оптимізації, ПДС-алгоритм, статистична значимість, максимальна незалежна множина, покриття, замкнена множина, мінімізація сумарного зваженого моменту закінчення робіт, p-впорядкованість, послідовно-паралельний граф, конструкція.

Підп. до друку 05.03 Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Папір друк. № 1 . Спосіб друку офсетний. Умовн. друк. арк. 10 .
Умовн. фарбо-відб. 1,0 . Обл.-вид. арк.
Тираж 100 . Зам. № 6-866 .

Фірма «ВІПОЛ»
252151, Київ, вул. Волинська, 60.