КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису
УДК 517. 927. 4

КОРОЛЬ Ігор Іванович

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДВОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ

01. 01. 02 — диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

Дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

КИЇВ — 1996

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь та математичної фізики Ужгородського державного університету

Наукові керівники: доктор фізико–математичних наук РОНТО М.Й.

кандидат фізико–математичних наук, доцент МАРИНЕЦЬ В.В.

Офіційні опоненти: доктор фізико–математичних наук, професор МАРТИНЮК Д.І.

кандидат фізико–математичних наук, доцент ОРДИНСЬКА З.П.

Провідна установа: Чернівецький державний університет

Захист відбудеться "22" квітня 1996 р. о 14 год. на засіданні спеціалізованої ради К 01. 01. 21 при Київському університеті ім. Тараса Шевченка за адресою:

252127, м. Київ–127, пр. Глушкова, 6, корпус механіко–математичного факультету, ауд. 42.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Київського університету за адресою: м. Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розіслано "21" березня 1996 року

Вчений секретар спеціалізованої ради КУРЧЕНКО О.О.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. При дослідженні різного роду процесів часто приходять до математичних моделей у вигляді крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Цей факт і послужив стимулом бурхливого розвитку сучасної теорії крайових задач. Достатньо повно вивчені різні методи, які дозволяють досліджувати питання існування та єдиності розв'язків, їх наближеної побудови. Цим проблемам присвячені роботи Н.В.Азбелєва, Г.М.Вайнікко, Є.О.Гребенікова, І.Т.Кігурадзе, М.О.Красносельського, А.Я.Лєпіна, А.І.Перова, а також представників київської математичної школи - Ю.О.Митропольського, А.М.Самойленка, М.О.Перестюка, О.А.Бойчука, А.Ю.Лучки, Д.І.Мартинюка, М.Й.Ронто та інших.

На сьогоднішній день теорія крайових задач володіє потужним арсеналом аналітичних, функціонально-аналітичних, чисельних та чисельно-аналітичних методів. Останні виділяються з-поміж інших своєю конструктивністю як на етапі вивчення таких важливих питань як існування розв'язків, збіжність наближених розв'язків до точних та при одержанні зручних для практики оцінок збіжності, так і при побудові наближених розв'язків.

Серед сучасних засобів дослідження нелінійних крайових задач широке застосування отримав чисельно-аналітичний метод послідовних наближень, запропонований А.М.Самойленком.

При дослідженні проблем теорії автоматичного регулювання, в інших прикладних галузях природознавства часто зустрічаються крайові задачі з параметрами. Важливі результати в цьому напрямку одержані в працях А.М.Самойленка, І.А.Гома, А.В.Кібенка, Н.С.Курпеля, А.Ю.Лучки, А.Г.Марусяка, В.А.Ронто, М.Й.Ронто, Р.І.Собковича.

Але, незважаючи на значну кількість робіт, питання існування та побудови розв'язків крайових задач з параметрами розглянуті не в повній мірі. Тому актуальною є проблема поширення і подальшого розвитку конструктивних методів дослідження крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, коли параметри входять і в рівняння, і в крайові умови.

Мета роботи - узагальнення чисельно-аналітичного методу послідовних наближень і його поширення на дослідження систем звичайних диференціальних рівнянь першого та другого порядків, коли і рівняння, і крайові умови містять параметри.

Методи дослідження базуються на ідеях чисельно-аналітичного методу послідовних наближень, запропонованого А.М.Самойленком.

Наукова новизна результатів роботи:

-узагальнено чисельно-аналітичний метод послідовних наближень на випадок нелінійних систем диференціальних рівнянь першого порядку з параметрами, як нормального вигляду, так і частково розв'язаних відносно похідної, підпорядкованих двоточковим крайовим умовам з параметром;

-обгрунтовано застосування методу послідовних наближень для систем нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку з двоточковими крайовими умовами, коли і в рівняння, і в крайові умови входять параметри;

-отримано необхідні та достатні умови існування розв'язку наведених вище крайових задач, вказано ефективні алгоритми знаходження наближених розв'язків, оцінено їх похибку.

Теоретична та практична цінність дисертації полягає в тому, що одержані результати узагальнюють і розширюють попередні дослідження в якісній теорії крайових задач. Запропоновані алгоритми побудови розв'язків можуть бути застосовані до розв'язання прикладних задач науки і техніки, які зводяться до нелінійних крайових задач.

Апробація роботи. Основні результати роботи доповідалися на семінарі кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського університету ім.Тараса Шевченка (керівники - академік А.М.Самойленко, професор М.О.Перестюк), на Всеукраїнській науковій конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (м. Дрогобич, 1994 р.), на конференції "Нелінійні крайові задачі математичної фізики та їх застосування" (м. Тернопіль, 1994 р.), на Всеукраїнській науковій конференції "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях" (м. Львів, 1995 р.) на підсумкових наукових конференціях професорсько-викладацького складу математичного факультету Ужгородського державного університету (1994, 1995 рр.).

Публікації. По темі дисертації опубліковано 7 наукових робіт, список яких наведено в кінці автореферату.

Об'єм та структура роботи. Дисертація складається з вступу, трьох розділів, висновків та списку літератури, який налічує 123 найменування. Загальний обсяг роботи - 117 сторінок.

ЗМІСТ РОБОТИ

У першому розділі "Двоточкові крайові задачі з параметрами для систем диференціальних рівнянь першого порядку", до якого входять §§ 1-5, ідеї чисельно-аналітичного методу послідовних наближень поширюються на нелінійні системи звичайних диференціальних рівнянь з скалярним параметром вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,\lambda), \tag{1}$$

з двоточковими крайовими умовами, які теж містять скалярний параметр:

$$Ax(0) + \nu Bx(t) = d, \qquad detB\neq 0 \tag{2}$$

$$x_1(0)=x_{0,1}, \quad x_2(0)=x_{0,2}. \tag{3}$$

Тут d - вектор, а x, f - вектор-функції в n-вимірному евклідовому просторі E_n, $n\geq 3$, $x_{0,1}$, $x_{0,2}$ - перші дві координати вектора $x(0) = x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, x_3(0), \dots, x_n(0))$, A,B - сталі матриці розмірності $n \times n$, а параметри λ і ν змінюються в областях $\lambda \in I_\lambda = [\tilde{\lambda}, \tilde{\tilde{\lambda}}]$, $\nu \in I_\nu = [\tilde{\nu}, \tilde{\tilde{\nu}}]$, $\tilde{\nu} > 0$.

Під розв'язком задачі (1)-(3) на інтервалі [0,T] будемо розуміти неперервно-диференційовну вектор-функцію $x = x^*(t)$, $t \in [0,T]$ і такі значення параметрів $\lambda = \lambda^*$, $\nu = \nu^*$, тобто сукупність $(x^*(t), \lambda^*, \nu^*)$, яка задовольняє наступним умовам:

1) $(t, x^*(t), \lambda^*, \nu^*) \in W = [0,T] \times D \times I_\lambda \times I_\nu$.

2) $\frac{d}{dt} x^*(t) = f(t, x^*(t), \lambda^*)$,

3) $Ax^*(0) + \nu^* B x^*(T) = d$,

4) $x_1^*(0) = x_{0,1}$, $x_2^*(0) = x_{0,2}$.

Припускається, що права частина системи (1) задовольняє умовам:

$А_1$) функція $f(t,x,\lambda)$ визначена і неперервна по (t,x,λ) в області $[0,T] \times D \times I_\lambda$ і обмежена в ній вектором $M = (M_1, \dots, M_n)$, $M_i \geq 0$ $i = \overline{1,n}$:

$$|f(t,x,\lambda)| \leq M,$$

де D - замкнена, обмежена область в E_n.

$Б_1$) при всіх $t \in [0,T]$, $x', x'' \in D$, $\lambda', \lambda'' \in I_\lambda$ функція $f(t,x,\lambda)$ задовольняє умові Ліпшіця з матрицею $K = \{K_{ij}\}$, $K_{ij} \geq 0$, $i,j = \overline{1,n}$ і вектором $L = (L_1, \dots, L_n)$, $L_i \geq 0$, $\forall i = \overline{1,n}$:

$$|f(t,x',\lambda') - f(t,x'',\lambda'')| \leq K|x' - x''| + L|\lambda' - \lambda''|,$$

де $|f(t,x,\lambda)| = (|f_1(t,x,\lambda)|, \dots, |f_n(t,x,\lambda)|)$, і нерівності між векторами розуміються покомпонентно.

Серед крайових задач типу (1)-(3) виділимо клас таких, для яких параметри M, K, L, величини A, B, $x_{0,1}$, $x_{0,2}$, які входять в крайові умови, а також область визначення W задовольняють таким додатковим умовам:

$В_1$) множина D_β точок $(x_{0,1}, x_{0,2}, z_0)$, $z_0 \in E_{n-2}$, яка міститься в області D при всіх значеннях $\lambda \in I_\lambda$, $\nu \in I_\nu$ разом із своїм β-околом, непорожня:

$D_\beta \neq \varnothing$,

де $\beta = \frac{MT}{2} + \beta_1(z_0, \nu)$, $\beta_1(z_0, \nu) = \left| \frac{B^{-1}[d-(A+\nu B)x_0]}{\nu} \right|$.

Під G будемо розуміти множину $(n-2)$ - вимірних векторів z_0 таких, що $x_0 = x(0) = (x_{01}, x_{02}, z_0)$ лежить в множині D_β;

Γ_1) всі власні значення $s_i(Q)$ матриці $Q = \frac{T}{\pi}K$ лежать у крузі одиничного радіуса:

$|s_i(Q)| < 1, \quad \forall i = \overline{1,n}$.

Перший параграф носить допоміжний характер. В ньому формулюються деякі означення і твердження, які використовуються в подальших викладках.

В §2 у вигляді рекурентного співвідношення будуються наближення

$$x_{m+1}(t, z_0, \lambda, \nu) = x_0 + \int_0^t [\, f(t, x_m(t, z_0, \lambda, \nu), \lambda) -$$

$$- \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_m(s, z_0, \lambda, \nu), \lambda) ds \,] dt + \frac{B^{-1}[d-(A+\nu B)x_0]}{\nu T} t, \qquad (4)$$

$x_0(t, z_0, \lambda, \nu) = x_0 \in D_\beta$, $\quad m = 0, 1, 2, \ldots$,

які задовольняють крайовим умовам (2), (3) при довільних значеннях параметрів з області $(z_0, \lambda, \nu) \in V = G \times I_\lambda \times I_\nu$.

Доведено наступне твердження про властивості функцій послідовності (4).

Теорема 1. Нехай для крайової задачі (1)-(3) в області визначення W виконуються умови A_1)-Γ_1). Тоді:

1) послідовність функцій $x_m(t, z_0, \lambda, \nu)$ вигляду (4) задовольняє крайовим умовам (2), (3) для всіх $m = 1, 2, \ldots$ при довільних (z_0, λ, ν) з області V і рівномірно збігається при $m \to \infty$ на множині $[0, T] \times G \times I_\lambda \times I_\nu$ до неперервної граничної функції $x^*(t, z_0, \lambda, \nu)$, причому справедлива наступна оцінка:

$$|x^*(t,z_0,\lambda,\nu)-x_m(t,z_0,\lambda,\nu)|\le Q^{m-1}(E-Q)^{-1}\tilde{\alpha}_1(t)\left\{QM+K\beta_1(z_0,\nu)\right\}; \quad (5)$$

2) для всіх $(\lambda,\nu,z_0)\in V$ функція $x^*(t,z_0,\lambda,\nu)$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t)=x_0+\int_0^t[f(t,x(t),\lambda)-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x(s),\lambda)ds]dt+\frac{B^{-1}[d-(A+\nu B)x_0]}{\nu T}t,$$

і при $t=0$ приймає початкове значення

$$x^*(0,z_0,\lambda,\nu) = x_0= (x_{0,1},x_{0,2},z_0);$$

3) крім цього, гранична функція $x^*(t,z_0,\lambda,\nu)$ задовольняє крайовим умовам (2), (3), тобто є розв'язком збуреної по відношенню до (1)-(3) крайової задачі вигляду

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x,\lambda)+\Delta(z_0,\lambda,\nu),\\ Ax(0)+\nu Bx(T)=d,\\ x_1(0)=x_{0,1},\ \ x_2(0)=x_{0,2},\end{cases}$$

де збурення має наступний вигляд:

$$\Delta(z_0,\lambda,\nu)=\frac{B^{-1}[d-(A+\nu B)x_0]}{\nu T}-\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x^*(t,z_0,\lambda,\nu),\lambda)dt.$$

Показано, що в праву частину рівняння (1) завжди можна так ввести додатковий керуючий параметр μ, щоб розв'язок збуреного рівняння

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,\lambda)+\mu,$$

який при $t=0$ проходить через задану точку

$$x(0) = x_0= (x_{0,1},x_{0,2},z_0), \quad (6)$$

задовольняв крайовим умовам (2), (3).

Вивчається зв'язок між задачею Коші (1), (6) і вихідною крайовою задачею (1)-(3).

В §3 доведено достатні умови існування розв'язку крайової задачі (1)-(3), що дозволяє на підставі аналізу послідовних наближень (4), не знаходячи їх граничної функції, робити висновки щодо існування розв'язку задачі.

В §4 більш детально вивчаються властивості граничної функції $x^*(t,z_0,\lambda,\nu)$ та точної визначальної функції $\Delta(z_0,\lambda,\nu)$. Так, доведено лему, в якій оцінюється близькість функцій $x^*(t,z'_0,\lambda',\nu')$ і $x^*(t,z''_0,\lambda'',\nu'')$ для точок (z'_0,λ',ν'), (z''_0,λ'',ν'') з області V, теорему про неперервну залежність визначальної вектор-функції $\Delta(z_0,\lambda,\nu)$ від z_0, λ, ν та оцінку відхилення $\Delta(z'_0,\lambda',\nu')$ від $\Delta(z''_0,\lambda'',\nu'')$.

Крім того, одержано необхідні умови існування розв'язку крайової задачі (1)-(3), тобто умови, необхідні для того, щоб деяка підобласть $V''\in V$ містила точку (z_0,λ,ν), яка визначає початкове значення точного розв'язку $x^*(t)$ вихідної задачі.

Приклад, наведений в §5, дає наглядну ілюстрацію застосування чисельно-аналітичного методу послідовних наближень до двоточкових крайових задач з параметрами. Для конкретної крайової задачі знайдено в аналітичному вигляді два послідовні наближення до точного розв'язку системи, а також чисельно знайдено два наближення до точних значень параметрів та початкового значення.

Другий розділ "Крайові задачі для систем диференціальних рівнянь першого порядку, частково розв'язаних відносно похідної" присвячений узагальненню і поширенню чисельно-аналітичного методу послідовних наближень на дослідження систем нелінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,\frac{dx}{dt},\lambda_1,\dots,\lambda_l), \tag{7}$$

підпорядкованих наступним крайовим умовам:

$$\delta Ax(0)+Bx(T)=d, \qquad \det B\neq 0\ . \tag{8}$$

$$x_1(0)=x_{0,1},\dots,x_{l+1}(0)=x_{0,l+1}, \tag{9}$$

де $\lambda_1,\dots,\lambda_l$, δ- скалярні параметри, $\lambda_i\in I_i=[\tilde{\lambda}_i,\tilde{\tilde{\lambda}}_i]$, $i=\overline{1,l}$, $\delta\in I_\delta=[\tilde{\delta},\tilde{\tilde{\delta}}]$, d,x,f- точки n-вимірного евклідового простору E_n, причому $l+1<n$, $x(0)=(x_{0,1},\dots,x_{0,l+1},x_{l+2}(0),\dots,x_n(0))$. A, B – сталі матриці розмірності $n\times n$.

Припускається, що крайова задача (7)-(9) задовольняє таким умовам:

A_2) функція $f(t,x,y,\Lambda)$, де $y=y(t)=\frac{d}{dt}x(t)$, визначена і неперервна по (t,x,y,Λ) в області

$$(t,x,y,\Lambda) \in [0,T]\times D_1\times D_2\times I_\Lambda, \tag{10}$$

де D_1, D_2 – замкнені, обмежені області в E_n, $\Lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_l)$, $\Lambda\in I_\Lambda=I_1\times\dots\times I_l$, $I_\Lambda\subset R^l$, і обмежена вектором M:

$$|f(t,x,y,\Lambda)| \le M,\quad M=(M_1,\dots,M_n),\quad M_i\ge 0,\quad i=\overline{1,n}; \tag{11}$$

$Б_2$) в області (10) функція $f(t,x,y,\Lambda)$ задовольняє умові Ліпшиця

$$|f(t,x',y',\Lambda') - f(t,x'',y'',\Lambda'')| \le K_1|x'-x''| + K_2|y'-y''| + L|\Lambda'-\Lambda''|, \tag{12}$$

при всіх $x',x''\in D_1$, $y',y''\in D_2$, $\Lambda',\Lambda''\in I_\Lambda$, де K_1, K_2 – матриці розмірності $n\times n$, а L – матриця розмірності $l\times n$, причому всі матриці – з сталими невід'ємними елементами.

$В_2$) існує непорожня множина G $(n-l-1)$- вимірних точок z_0 така, що для будь-яких $\delta\in I_\delta$, $\Lambda\in I_\Lambda$ точки $x_0=(x_{0,1},\dots,x_{0,l+1},z_0)$ лежать в області D_1 разом із своїм β_1-околом, і область D_2 містить у собі β_2-окіл початку координат, де

$$\beta_1=\beta_1(z_0,\delta)=\frac{MT}{2} + \left|B^{-1}\left[d-(\delta A+B)x_0\right]\right|,$$

$$\beta_2=\beta_2(z_0,\delta)= 2M + \frac{\left|B^{-1}\left[d-(\delta A+B)x_0\right]\right|}{T},$$

$Г_2$) всі власні значення $s_i(Q)$ матриці $Q=\frac{T}{2}K_1+2K_2$ лежать у крузі одиничного радіуса:

$$|s_i(Q)| < 1,\quad \forall i=\overline{1,n}.$$

В §6 будується послідовність функцій вигляду

$$x_{m+1}(t,z_0,\Lambda,\delta)=x_0+\int_0^t\Big\{f(t,x_m(t,z_0,\Lambda,\delta),y_m(t,z_0,\Lambda,\delta),\Lambda) -$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x_m(s,z_0,\Lambda,\delta),y_m(s,z_0,\Lambda,\delta),\Lambda)ds\Big\}dt + \qquad (13)$$

$$+\frac{B^{-1}[d-(\delta A+B)x_0]}{T}t, \quad m=0,1,2,\dots,$$

$$x_0(t,z_0,\Lambda,\delta)=x_0=(x_{0,1},\dots,x_{0,l+1},x_{l+2}(0),\dots,x_n(0)),$$

де $y_m(t,z_0,\Lambda,\delta)=\frac{d}{dt}x_m(t,z_0,\Lambda,\delta)$, які задовольняють крайовим умовам (8), (9) при довільних значеннях параметрів (z_0,Λ,δ) з області $V=G\times I_\Lambda\times I_\delta$.

Встановлено рівномірну збіжність послідовностей функцій $x_m(t,z_0,\Lambda,\delta)$ вигляду (13) та їх похідних $y_m(t,z_0,\Lambda,\delta)$ до відповідних граничних функцій $x^*(t,z_0,\Lambda,\delta)$ та $y^*(t,z_0,\Lambda,\delta)=\frac{d}{dt}x^*(t,z_0,\Lambda,\delta)$, знайдено оцінки збіжності.

В §7 доведено, що функція $x^*(t,z_0,\Lambda,\delta)$ є розв'язком крайової задачі (7)-(9) тоді і тільки тоді, коли в точці (z_0,Λ,δ) визначальна функція $\Delta(z_0,\Lambda,\delta)$ вигляду

$$\Delta(z_0,\Lambda,\delta) = \frac{B^{-1}[d-(\delta A+B)x_0]}{T} -$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x^*(t,z_0,\Lambda,\delta),y^*(t,z_0,\Lambda,\delta),\Lambda)dt$$

перетворюється в нуль. Знайдено аналітичний вираз керуючого параметра μ і встановлено його єдиність. Досліджується спеціальна задача керування, яка дозволяє побудувати збурене по відношенню до (7) рівняння, для якого розв'язок деякої задачі Коші буде в той же час задовольняти і крайовим умовам (8), (9).

У зв'язку з тим, що на практиці ми знаємо тільки наближені значення $x_m(t,z_0,\Lambda,\delta)$ точного розв'язку крайової задачі (7)-(9), в §8 вводиться до розгляду наближена визначальна функція

$$\Delta_m(z_0,\Lambda,\delta) = \frac{B^{-1}[d-(\delta A+B)x_0]}{T} -$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x_m(t,z_0,\Lambda,\delta),y_m(t,z_0,\Lambda,\delta),\Lambda)dt \qquad (14)$$

Це дає змогу на підставі аналізу наближень $x_m(t,z_0,\Lambda,\delta)$ вигляду (13) довести наступні достатні умови існування розв'язку крайової задачі (7)-(9).

Теорема 2. Нехай для крайової задачі (7)-(9) виконуються умови $А_2$)-$Г_2$) і, крім того,

1) існує опукла, замкнена область $V'=G'\times I'_\Lambda\times I'_\delta\subset G\times I_\Lambda\times I_\delta$ така, що для деякого фіксованого $m\geq1$ наближена визначальна функція $\Delta_m(z_0,\Lambda,\delta)$ вигляду (14) має в V' єдину особливу точку $(z_0,\Lambda,\delta)=(z_{0m},\Lambda_m,\delta_m)$, індекс якої не дорівнює нулю, тобто визначальне рівняння $\Delta_m(z_0,\Lambda,\delta)=0$ має в V' єдиний розв'язок ненульового індексу;
2) на межі S області V' виконується нерівність

$$\inf_{(z_0,\Lambda,\delta)\in S}|\Delta_m(z_0,\Lambda,\delta)|>Q^m(E-Q)^{-1}R(z_0,\delta),$$

де $R(z_0,\delta)=K_1\beta_1(z_0,\delta)+K_2\beta_2(z_0,\delta)$.

Тоді крайова задача (7)-(9) має розв'язок $(x^*(t),\Lambda^*,\delta^*)$, початкове значення якого $x^*(0)=(x_{0,1},\ldots,x_{0,l+1},z^*_0)$, де $z^*_0\in G'$, $\Lambda^*\in I'_\Lambda$, $\delta^*\in I'_\delta$.

В цьому ж параграфі доведено твердження, яке на основі властивостей наближеної визначальної функції (14) дозволяє встановити також і необхідні умови розв'язуваності задачі (7)-(9). Вказано алгоритм наближеного знаходження початкового значення розв'язку.

Розроблену методику дослідження і відшукання розв'язків крайових задач застосовано до конкретного прикладу. В аналітичному вигляді побудовано два перші наближення а також чисельно знайдено два наближення до початкового значення, та значень параметрів.

У третьому розділі "Застосування чисельно-аналітичного методу до систем диференціальних рівнянь другого порядку" ідеї цього методу поширюються на дослідження систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з параметрами

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f(t,x,\frac{dx}{dt},\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_l),\quad n>l+1, \tag{15}$$

підпорядкованих наступним двоточковим умовам:

$$\delta Ax(0)+Bx(T)=d_1,\quad detB\neq 0, \tag{16}$$

$$\dot{x}(0)-\dot{x}(T)=d_2, \tag{17}$$

$$x_1(0)=x_{0,1},\ x_2(0)=x_{0,2},\ \dots,\ x_{l+1}(0)=x_{0,l+1}, \tag{18}$$

Крайова задача (15)-(18) містить в рівнянні векторний параметр $\Lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_l)\in R^l$, а в крайових умовах - скалярний параметр δ.

Задану задачу будемо розглядати в області

$$(t,x,y,\Lambda,\delta)\in[0,T]\times D_1\times D_2\times I_\Lambda\times I_\delta, \tag{19}$$

де D_1, D_2 - замкнені, обмежені області в n-вимірному евклідовому просторі E_n, $\Lambda\in I_\Lambda=I_1\times\dots\times I_l=[\tilde{\lambda}_1,\tilde{\tilde{\lambda}}_1]\times\dots\times[\tilde{\lambda}_l,\tilde{\tilde{\lambda}}_l]$, $\delta\in I_\delta=[\tilde{\delta},\tilde{\tilde{\delta}}]$.

Припускається, що крайова задача (15)-(18) в області (19) задовольняє наступним умовам:

А$_3$) функція $f(t,x,y,\Lambda)$ визначена і неперервна по (t,x,y,Λ) в області $[0,T]\times D_1\times D_2\times I_\Lambda$, і задовольняє в ній умовам обмеженості і Ліпшіця (11), (12);

Б$_3$) існує непорожня множина G $(n-l-1)$- вимірних точок z_0 така, що при всіх значеннях параметрів $\Lambda\in I_\Lambda$, $\delta\in I_\delta$ точки $x_0=(x_{0,1},\dots,\dots,x_{0,l+1},z_0)$ містяться в області D_1 разом із своїм β_1-околом, і β_2-окіл початку координат лежить в області D_2, де

$$\begin{aligned}\beta_1&=\beta_1(z_0,\delta)=\frac{MT^2}{6}+\left|B^{-1}[d_1-(\delta A+B)x_0]\right|+\left|\frac{T}{8}d_2\right|,\\ \beta_2&=\beta_2(z_0,\delta)=\frac{5MT}{6}+\frac{1}{T}\left|B^{-1}[d_1-(\delta A+B)x_0]\right|+\left|\frac{1}{2}d_2\right|,\end{aligned} \tag{20}$$

В$_3$) всі власні значення $s_i(Q)$ матриці $Q=\frac{T^2}{6}K_1+\frac{5T}{6}K_2$ лежать в одиничному крузі:

$$|s_i(Q)|<1,\quad \forall i=\overline{1,n}.$$

В §10 при таких припущеннях побудовано послідовність неперервних функцій вигляду

$$x_{m+1}(t,z_0,\Lambda,\delta)= x_0+\int_0^t\left\{\int_0^t\left\{f(t,x_m,y_m,\Lambda)-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x_m,y_m,\Lambda)ds\right\}dt -\right.$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^t\left\{f(t,x_m,y_m,\Lambda) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s,x_m,y_m,\Lambda)ds\right\}dtdt\Bigg\}dt + \tag{21}$$

$$+\left\{\frac{1}{T}B^{-1}[d_1-(\delta A+B)x_0] + \frac{1}{2}d_2\right\}\cdot t - \frac{1}{2T}d_2t^2 \ ,$$

$$x_0(t,z_0,\Lambda,\delta)=x_0=(x_{0,1},\ldots,x_{0,l+1},z_0), \quad m=0,1,2,\ldots,$$

де z_0, Λ, δ - невідомі параметри,

$$x_m=x_m(t,z_0,\Lambda,\delta), \qquad y_m=\frac{dx_m(t,z_0,\Lambda,\delta)}{dt},$$

які задовольняють крайовим умовам (16)-(18). Послідовність функцій (21) рівномірно збігається до граничної функції $x^*(t,z_0,\Lambda,\delta)$, а послідовність їх похідних $y_m(t,z_0,\Lambda,\delta)$ - до граничної функції $y^*(t,z_0,\Lambda,\delta)=\dfrac{dx^*(t,z_0,\Lambda,\delta)}{dt}$, і для відхилень при всіх $m=1,2,\ldots$ виконуються наступні оцінки:

$$|x_m(t,z_0,\Lambda,\delta) - x^*(t,z_0,\Lambda,\delta)| \le \frac{T}{6}Q^{m-1}(E-Q)^{-1}R(z_0,\delta),$$

$$|y_m(t,z_0,\Lambda,\delta) - y^*(t,z_0,\Lambda,\delta)| \le \frac{5T}{6}Q^{m-1}(E-Q)^{-1}R(z_0,\delta),$$

де $R(z_0,\delta) = K_1\beta_1(z_0,\delta)+K_2\beta_2(z_0,\delta)$.

Крім того, доведено, що гранична функція $x^*(t,z_0,\Lambda,\delta)$ задовольняє крайовим умовам (16)-(18), тобто є розв'язком збуреної крайової задачі вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=f(t,x,\dfrac{dx}{dt},\Lambda) + \Delta(z_0,\Lambda,\delta), \\ \delta Ax(0) + Bx(T) = d_1, \\ \dot{x}(0) - \dot{x}(T) = d_2, \\ x_1(0)=x_{0,1}, \ x_2(0)=x_{0,2}, \ \ldots, \ x_{l+1}(0)=x_{0,l+1}. \end{cases}$$

де збурення визначається за формулою

$$\Delta(z_0,\Lambda,\delta)=-\frac{1}{T}d_2-\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x^*(t,z_0,\Lambda,\delta),y^*(t,z_0,\Lambda,\delta),\Lambda)dt. \qquad (22)$$

Детально вивчається зв'язок між існуванням розв'язків крайової задачі (15)-(18) та існуванням розв'язків рівняння $\Delta(z_0,\Lambda,\delta)=0$.

В §11 вводиться до розгляду наближена визначальна функція

$$\Delta_m(z_0,\Lambda,\delta) = -\frac{1}{T}d_2-\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x_m(t,z_0,\Lambda,\delta),y_m(t,z_0,\Lambda,\delta),\Lambda)dt,$$

і на підставі вивчення її властивостей одержано достатні умови існування розв'язку задачі (15)-(18).

Доведено теорему про неперервну залежність визначальної вектор-функції $\Delta(z_0,\Lambda,\delta)$ вигляду (22) від параметрів.

Також встановлено необхідні умови розв'язуваності крайової задачі (15)-(18).

Теорема 3. Нехай для крайової задачі (15)-(18) виконуються умови A_3)-B_3).

Тоді для того, щоб деяка область $V''= G''\times I''_\Lambda\times I''_\delta \subset G\times I_\Lambda\times I_\delta$ містила точку $(z_0^*,\Lambda^*,\delta^*)$, яка зводить крайову задачу (15)-(18) до еквівалентної їй задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=f(t,x,\dfrac{dx}{dt},\Lambda^*), \\ x(0)=x_0^*=x_{0,1},\ldots,x_{0,1+1},z_0^*), \\ \left.\dfrac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}=\dfrac{1}{T}B^{-1}[d_1-(\delta^*A+B)x_0^*] + \dfrac{1}{2}d_2 - \\ \qquad -\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T\int_0^t\Big\{f(t,x^*(t,z_0^*,\Lambda^*,\delta^*),y^*(t,z_0^*,\Lambda^*,\delta^*),\Lambda^*) - \\ \qquad -\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(s,x^*(s,z_0^*,\Lambda^*,\delta^*),y^*(s,z_0^*,\Lambda^*,\delta^*),\Lambda^*)ds\Big\}dtdt \end{cases}$$

необхідно, щоб для всіх номерів m і довільної точки $(\overline{y}_0,\overline{\Lambda},\overline{\delta})$ з множини V'' мала місце нерівність

$$|\Delta_m(\bar{z}_0,\bar{\Lambda},\bar{\delta})| \le \sup_{(z_0,\Lambda,\delta)\in V''} \left\{(E-Q)^{-1}\left[K_1|\bar{x}_0-x_0| + L|\bar{\Lambda}-\Lambda| + \right.\right.$$

$$\left.\left. +\left[K_1+\frac{1}{T}K_2\right]\cdot\alpha(\bar{z}_0,\bar{\delta},z_0,\delta)\right]\right\} + Q^m(E-Q)^{-1}R(\bar{z}_0,\bar{\delta}).$$

де $\alpha(z'_0,\delta',z''_0,\delta'') = \left|B^{-1}\left[(\delta''A+B)x''_0 - (\delta'A+B)x'_0\right]\right|$.

В останньому параграфі роботи на конкретному прикладі проілюстровано ефективність застосування розробленої методики. Знайдено два послідовні наближення до точного розв'язку, оцінено їх похибку.

Користуючись нагодою, автор висловлює щиру подяку своїм науковим керівникам - доктору фізико-математичних наук М.Й.Ронто та кандидату фізико-математичних наук, доценту В.В.Маринцю за постійну увагу, цінні поради та зауваження.

ПІДСУМКОВІ ВИСНОВКИ

1. В роботі запропоновано та обґрунтовано нову модифікацію чисельно-аналітичного методу послідовних наближень для дослідження систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку нормального вигляду з параметрами у випадку нерозділених двоточкових крайових умов, які містять параметри.
2. Метод послідовних наближень узагальнено на двоточкові крайові задачі у випадку систем нелінійних диференціальних рівнянь, які частково розв'язані відносно похідної, коли і крайові умови, і рівняння залежать від параметрів.
3. Чисельно-аналітичний метод послідовних наближень поширено та обґрунтовано для двоточкових крайових задач з параметрами у випадку систем диференціальних рівнянь другого порядку.
4. Для вказаних вище типів задач одержано необхідні та достатні умови існування розв'язків, розроблено ефективні алгоритми побудови наближених розв'язків у вигляді рівномірно збіжних послідовностей функцій та одержано оцінку їх похибки.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Ронто Н.И., Король И.И. Исследование и решение краевых задач с параметрами численно-аналитическим методом //Укр.мат. журн. - 1994.- 46, №8.- С. 1031-1043.
2. Король І.І. Про дослідження двоточкових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з параметрами //Доп. НАН України.- 1995.- № 9.- С. 9-12.
3. Король И.И. О решении двухточечной задачи с параметрами //Сб. науч. трудов "Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения".- Киев: Ин-т математики АН Украины.- 1993.- С. 73-75.
4. Король І.І. Застосування чисельно-аналітичного методу для дослідження двоточкових крайових задач //Сб.научн.трудов "Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения".- Киев: Ин-т математики АН Украины.- 1994.- С. 109.
5. Король І.І. Про послідовні наближення для двоточкових крайових задач з параметрами //Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь. Тези доп. Всеукр. наук. конф.- Дрогобич. 1994.- С. 75-76.
6. Король І. Про застосування чисельно-аналітичного методу для систем диференціальних рівнянь другого порядку з параметрами //Тези доп. Всеукр. наук. конф. "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях". Част.3. - Львів.- 1995.- С. 107.
7. Король І.І. Про модифікацію чисельно-аналітичного методу для періодичних систем другого порядку //Підсумкова наук. конфер. проф. - виклад. складу матем. ф-ту УжДУ. Тези доп. - Ужгород, 1995.- С. 28-29.

Король I.I. Численно-аналитические методы исследования решений двухточечных краевых задач с параметрами. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения. Ужгородский государственный университет, Ужгород, 1996.

В диссертации содержится обоснование применения численно-аналитического метода последовательных приближений при исследовании систем нелинейных обыкновенных уравнений первого и второго порядков с параметрами в случае двухточечных краевых условий, содержащих параметры. Изучаются вопросы существования и приближенного построения решений рассматриваемых задач.

KOROL I.I. The numerical-analytic methods for the investigation of the solutions of two-point boundary value problems with parameters.Thesis for a degree of Candidate of Science (Ph.D) in Physics and Mathematics, speciality 01.01.02 - Differential equations. Uzhhorod State University, Uzhhorod, 1996.

Thesis containe the substantiation of the numerical-analytic method for successive approximations when the systems of the nonlinear ordinary differential equations of the first and the second order under the nonseparable two-point boundary conditions are investigated in case when the equations and the boundary conditions contains parameters. We investigate the problems of existence and approximate construction of the solutions of the given boundary problems.

Ключові слова: чисельно-аналітичний метод послідовних наближень, крайові умови, крайова задача, параметр, збурена крайова задача, точне визначальне рівняння, наближене визначальне рівняння.

Підписано до друку 06.03.96.
Формат 60x84/16.
Папір друкарський № 1
Офсетний друк. Умов. друк. л.
1,25. Умов. листо-відб. 1,37.
Умов.-видав. л. 1,13. Тираж
100 шт. Заказ 0160.
Безплатно.
Міська друкарня.
294005, м. Ужгород, в. Руська, 13.

Ужг. друк., з. 0160-96 р., т. 100x16