Львівський державний університет
ім. Івана Франка

На правах рукопису

Скасків Олег Богданович

Асимптотичні властивості аналітичних функцій, представлених степеневими рядами і рядами Діріхле

01.01.01 - математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Львів - 1996

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теорії функцій і теорії ймовірностей Львівського державного університету ім. І. Франка.

Офіційні опоненти: член-кореспондент НАН, доктор фізико-математичних наук, професор Островський Й.В., доктор фізико-математичних наук, професор Осколков В.А., доктор фізико-математичних наук, професор Кондратюк А.А.,

Провідна установа: державний університет "Львівська політехніка"

Захист відбудеться «18» квітня 1996р. о 15^{30} год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д.04.04.01 при Львівському державному університеті ім. І. Франка за адресою: 290602, м.Львів, вул.Університетська, 1, ауд.377.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Львівського державного університету ім. І. Франка за адресою: м.Львів, вул.Драгоманова, 5.
Автореферат розіслано «12» березня 1996р.

Вчений секретар спеціалізованої ради Микитюк Я.В.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Як цілі, так і, більш загально, аналітичні функції утворюють важливі функціональні класи, які природно виникають в теорії крайових задач (інтеграл типу Коші), теорії ймовірностей (характеристичні функції), інтегральних та операторних рівнянь (резольвента), теорії чисел (ζ – функція Рімана, L – функція Діріхле), теорії диференціальних рівнянь. Крім того, аналітичні функції займають одне з центральних місць в загальній теорії мероморфних функцій. При дальшому розвиткові теорії аналітичних і мероморфних функцій виявляються нові їх зв'язки, як з цими галузями математики, так і з, власне, їх природними розширеннями такими, як теорія субгармонійних функцій, теорія поліаналітичних функцій. Відомі зв'язки її з радіофізикою, задачами лінійної фільтрації і т.п.

Як окремий науковий напрямок теорія цілих та аналітичних функцій виникла наприкінці XIX – початку XX ст. І відразу, починаючи з праць Адамара, Бореля, Вімана, Валірона, Пойя, як один з основних і великих, виділяється в ній напрямок, який можна визначити, як дослідження асимптотичних властивостей аналітичних функцій у залежності від поведінки коефіцієнтів їх тейлорівських розвинень. При цьому переважають дослідження, у яких виявляються класи цілих функцій, що володіють асимптотичними властивостями, максимально подібними до властивостей многочленів, безпосереднім узагальненням яких є цілі функції.

Нехай $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ аналітична при $|z| < R \leq +\infty$ функція. Для $r < R$ позначимо $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}, m_f(r) = \min\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n : n \geq 0\}$ – максимальний член, $\nu_f(r) = \max\{n : |a_n|r^n = \mu_f(r)\}$ – центральний індекс. Якщо f – ціла функція, то один з основних висновків теорії Вімана-Валірона, що виникла як метод дослідження степеневих рядів, можна описати в наступний спосіб: в околах точок максимума $|f(z)|$ (тобто при малих $|\eta|$ і z таких, що $|f(z)|$ в деякому сенсі близький до $M_f(r)$) $f(ze^{\eta}) \sim e^{\eta\nu_f(r)} f(z)$, $\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \sim \left(\frac{\nu_f(r)}{z}\right)^k$, при $|z| = r \to +\infty, r \notin E$ – скінченної логарифмічної міри. Зауважимо, що у випадку, якщо f – многочлен $\deg f = n$, то $\nu_f(r) = n$ $(r \to +\infty)$ і одержані властивості повністю аналогічні до властивостей многочленів. Відзначимо, що описані щойно співвідношення виявились досить корисними при вивченні асимптотичних властивостей цілих розв'язків диференціальних рівнянь та функціональних рівнянь, а їх узагальнення – до дослідження характеристичних функцій ймовірносних законів. До інших властивостей, які можна трактувати як подібні до властивостей многочленів, це різноманітні співвідношення вигляду

$M_f(r) \sim \mu_f(r) \sim m_f(r)$, $\ln M_f(r) \sim \ln m_f(r)$, $\Psi(\ln M_f(r)) \sim \Psi(\ln \mu_f(r))$ та пов'язані з ними нерівності. Так, для цілих функцій скінченного порядку добре відомо, що

$$\ln M_f(r) \sim \ln \mu_f(r) \tag{1}$$

при $r \to +\infty$. Цей елементарний факт часто приписують Е.Борелю. Вкажемо на те, що Е.Борель встановив (при відсутності обмеження $\rho < \infty$), що (1) справджується вздовж деякої послідовності $r_j \to +\infty$, тобто при $r = r_j \to +\infty$.

Аналогічне твердження можна одержати також із одного результату А.Вімана, який показав, що для кожної цілої функції f і для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться послідовність $r_j \to +\infty$ така, що

$$M_f(r) < \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \tag{2}$$

при $r \in \{r_j\}$. Найбільш широке узагальнення згаданих результатів одержав П.Розенблум, який по-суті встановив, що

$$M_f(r) < \mu_f(r)\psi(\ln \mu_f(r))$$

для всіх $r \in (1, +\infty) \setminus E$ (E – множина скінченної логарифмічної міри на $[1, +\infty)$, тобто $\int_{E \cap [1,+\infty)} \frac{dt}{t} < +\infty$), де $\psi(t)$ - додатна неперервна зростаюча на $[0, +\infty)$ функція, для якої $\int_0^{+\infty} (\psi(t))^{-2} < +\infty$. Звідси випливає, зокрема, справедливість (1) і (2) при $r \to +\infty$ поза множиною скінченної логарифмічної міри. Розвитку методу і його застосуванням присвячені також статті А. Макінтайра, В.Фукса, П.Ердеша, П.Фентона, Ш.Стреліца, Й.В.Островського, Т.Кеварі, Л.Сонс і багатьох інших авторів.

В цьому ряду відзначимо праці У.Хеймана (Canad. Math. Bull. 1974, v. 17, N 3), у якій в певній мірі підсумовано наявні на час її написання результати типу Вімана-Валірона для цілих функцій та їх розвиток, М.М.Шеремети, в яких розроблено аналог методу Вімана-Валірона, у якому враховується лакунарність, що дало змогу застосувати метод до цілих рядів Діріхле. Ряди Діріхле

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \tag{3}$$

$0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \le n \to +\infty)$, є, звичайно, природнім узагальненням степеневих рядів. Вони виникають також, як самостійні об'єкти в ролі розв'язків операторних рівнянь для оператора типу згортки та оператора нескінченного диференціювання, в теорії ймовірностей увипадку мір зосереджених на дискретній множині, в теорії чисел. Не в останню чергу зростання інтересу до рядів Діріхле викликано також появою великої кількості праць з теорії зображень аналітичних функцій такими рядами (див. книги А.Ф.Леонтьєва) і у цьому зв'язку – необхідність вивчення їх асимптотичних властивостей. Відзначимо, що при вивченні асимптотичних властивостей в деяких задачах ефективною виявляється методика, яка базується на інтегральних перетвореннях типу Бореля чи Фур'є, що бере свій початок від роботи Пойа (Math. Zeitschrift, 1929, Bd. 29) і активно розвивалась А.Ф.Леонтьєвим та його учнями.

Для цілих рядів Діріхле вперше задачу про справедливість співвідношення

$$\ln M(\sigma, F) \sim \ln \mu(\sigma, F), \tag{4}$$

де $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + iy)| : y \in \mathbb{R}\}, \mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n} : n \geq 0\}$, при $\sigma \to +\infty$ розглянув К.Сугімура (Math. Zeitschrift, 1929, Bd. 29). Однак у найбільш загальному вигляді задачу встановлення умов, при виконанні яких співвідношення (4) справджується при $\sigma \to +\infty$ зовні виняткової множини вперше розглянув М.М.Шеремета (Мат. сб., 1979, т. 110, N 1), при цьому він висловив припущення, що умова

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < +\infty \tag{5}$$

є необхідною і достатньою для того, щоб співвідношення (4) виконувалось при $\sigma \to +\infty$ зовні множини скінченної міри для кожного цілого ряду Діріхле (3) із фіксованою послідовністю показників $\Lambda = (\lambda_n)$. Це припущення, яке вперше доведене автором дисертації, одержимо у вигляді наслідку з теореми, яка стосується умов виконання більш загального співвідношення

$$\omega(\ln M(\sigma, F)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \to 0 \tag{6}$$

при $\sigma \to +\infty$ зовні виняткової множини, де ω – додатна неперервна зростаюча на $[0, \infty)$ функція.

Аналогічні питання, як для функцій аналітичних в крузі, так і для абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле вивчені значно менше. Це не в останню чергу викликано тим, що побудувати задовільну методику дослідження асимптотичних властивостей не вдавалось до останніх років, хоча в цьому напрямку працювали математики, починаючи від А.Вімана, Д.Пойа та Ж.Валірона. Однак, з огляду на важливість вивчення зазначених класів, актуальність розробки ефективного методу не викликає сумніву. Такою могла виявитись методика типу Вімана–Валірона, однак спроби її побудови (див. також праці Т.Кеварі, Л.Сонс, Т.Мураї та інших авторів) до належної загальності одержуваних результатів не приводила. В даній дисертаційній роботі побудовано метод типу Вімана–Валірона для збіжних у півплощині рядів Діріхле. Ідеї, які при цьому виникають приводять до нових формулювань задач для цілих функцій, що приводить до нових результатів, при цьому часом в добре відомих задачах. Зокрема, на цьому шляху буде знайдено неохідні та достатні умови в рамках відомої гіпотези Д.Пойа (1929 р.), та знайдено доведення гіпотези Й.В.Островського (1983 р.). Інші коментарі стосовно зв'язку результатів дисертації з результатами інших авторів та актуальності інших конкретних постановок проблем див. нижче.

Мета роботи.

1. Дослідити асимптотичні властивості цілих рядів Діріхле. Встановити необхідні і достатні умови для справедливості (6) зовні виняткової множини скінченної міри та зовні множини нульових лінійних щільностей.
2. Розробити метод, що дозволяє одержати аналоги класичних теорем А.Вімана, Ж.Валірона, Е.Бореля для абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле та лакунарних степеневих рядів в одиничному крузі.
3. Вивчити асимптотику рядів Діріхле з монотонними коефіцієнтами в ситуації, коли система показників допускає наявність у неї довільної кількості точок скупчення.
4. В рамках гіпотези Пойа про мінімум модуля лакунарного степеневого ряду встановити необхідні та достатні умови для справедливості асимптотичної рівності логарифмів максимума та мінімума модуля.
5. Одержати узагальнення теореми Пікара, з якого би випливала справедливість гіпотези Островського.

Загальна методика досліджень. При розвязуванні вказаних вище задач використовуються методи теорії функцій комплексної змінної.

Новизна результатів та їх наукова цінність. Всі основні результати дисертації є новими і одержані автором самостійно. Їх зміст полягає в наступному.

1. Розроблено аналог класичного методу Вімана–Валірона для функцій аналітичних в крузі та абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле, що дало змогу вперше одержати у широкій загальності ряд остаточних результатів про асимптотичні властивості

таких функцій, зокрема одержано посилення однієї теореми А. Вімана.

2. Досліджено асимптотичні властивості цілих та абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле з монотонними коефіцієнтами, що дало змогу: а) одержати нові узагальнення теореми Бореля; б) вивчити зростання в горизонтальних смугах; в) дослідити асимптотичну поведінку мінімума модуля, – при цьому вперше встановлено, що якісно в умовах, які забезпечують бажані асимптотичні властивості послідовність логарифмів модулів коефіцієнтів ряду Діріхле виступає у тій же ролі, що й послідовність показників цілого ряду Діріхле.
3. Одержано для цілих рядів Діріхле узагальнення теореми Бореля, з якого випливає справедливість гіпотези та вирішення однієї проблеми сформульованої М.М.Шереметою, а також необхідні та достатні умови справедливості узагальненого співвідношення Бореля.
4. Вивчено асимптотичні властивості цілих рядів Діріхле та лакунарних степеневих рядів при слабих обмеженнях на швидкість зростання та показники, що дало змогу: а) одержати необхідні та достатні умови на послідовність лакун для того, щоб логарифм максимума модуля цілої функції скінченного або скінченного нижнього порядку, зображеної лакунарним степеневим рядом, були асимптотично рівні зовні виняткової множини; цим отримано остаточні результати в рамках гіпотези Д.Пойа; б) вивчити поведінку мінімума модуля цілого ряду Діріхле і одержати завершені результати; в) отримати дальші узагальнення теореми Бореля;
5. Одержано узагальнення теореми Пікара про виняткові значення цілої функції принципово нового характеру, як наслідок вперше одержано доведення гіпотези Й.В.Островського.

Апробація роботи. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на Саратовських зимових школах з теорії функцій (1986, 1988), на конференціях з комплексного аналізу в м. Черноголовка (1985, 1987, 1989), на конференції з теорії цілих і субгармонійних функцій (Харків, 1990), на школі з теорії функцій (Одеса, 1991), на міжнародних конференціях до сторіччя С. Банаха (Львів, 1992), пам'яті акад. М.Кравчука (Київ – Луцьк, 1992, 1995), пам'яті Г.Гана (Чернівці, 1994), на семінарах у Львові (керівник А.А.Гольдберг), в Московському університеті: з класичної теорії функцій (кер. Ю.А. Казьмін), з теорії наближень (кер. Є.П.Долженко),- у Харкові (керівники Б.Я.Левін, Й.В.Островський), в Уфі (кер. В.В.Напалков).

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, списку цитованої літератури, що містить 130 найменувань та списку основних позначень. Загальний обсяг роботи 299 с.

Короткий зміст дисертації.

У вступі дана загальна характеристика роботи, обгрунтовані актуальність теми, мета, теоретичне значення проведених досліджень, викладені основні положення дисертації.

Розділ I повністю присвячений дослідженню співвідношення (6) при $\sigma \to +\infty$ зовні множини скінченної міри. Нехай $H(\Lambda)$ –клас всіх цілих рядів Діріхле з фіксованою послідовністю $\Lambda = (\lambda_n)$, $0 \le \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, $n_\Lambda(a,b] = \sum_{a<\lambda_n\le b} 1$. У §1 встановлено наступну теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Нехай $F \in H(\Lambda)$, ω – додатна, неспадна на $[0,+\infty)$ функція з незростаючою похідною, а функції ψ_j – додатні, неперервні такі, що задовольняють умову*

$$\int^{\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty, \tag{7}$$

ψ_1 – монотонно зростаюча. Якщо $F \in H(\Lambda)$,

$$\frac{1}{t} = O(\omega'(t)) \quad (t \to +\infty), \tag{8}$$

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \omega'\left(\psi_1^{-1}(t)\right) \ln n_\Lambda(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}] \le 0, \tag{9}$$

то співвідношення (6) виконується при $\sigma \to +\infty$ зовні множини скінченної міри, де $n_\Lambda(a,b] = \sum_{a<\lambda_n\le b} 1$.

У §2 показуємо, що в ряді важливих випадків умова (9) є необхідною або близькою до такої. Як встановлено у зауваженні 1 у випадку $\omega'(t)\ln t \to 0$ $(t \to +\infty)$ з умови (9) випливає збіжність інтегралу

$$\int^{\infty} \frac{k(\ln n(t))}{t} dt < +\infty, \tag{10}$$

де $k(t)$ – функція обернена до $\frac{1}{\omega'(t)}$, $n(t) = \sum_{\lambda_n\le t} 1$. Наступна теорема вказує на необхідність в деякому сенсі умови (10).

ТЕОРЕМА 2. *Нехай функція ω – додатна, зростаюча, двічі диференційована на $[0,+\infty)$ така, що ω' – спадає, при цьому $k'(t)$ – не спадає і $\ln(1 + k'(t)/t) = o(t)$ $(t \to +\infty)$. Для кожної послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$, для якої розбіжний інтеграл*

$$\int^{\infty} \frac{k(\ln n(t))}{t^2} dt = +\infty \tag{11}$$

знайдеться функція $F \in H(\Lambda)$ така, що

$$\omega(\ln M(\sigma, F)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \geq b > 0 \ (\sigma \geq \sigma_0) \tag{12}$$

У випадку, коли $\omega(t)$ така, що для $\varepsilon(t) \to +0 \ (t \to +\infty)$

$$\frac{1}{\omega'(t\varepsilon(t))} = o\left(\frac{1}{\omega'(t)}\right) \qquad (t \to +\infty), \tag{13}$$

умови (9) і (10) є рівносильні, а оскільки умова (13) виконується при виконанні, наприклад, умови

$$(\exists c \in [-1; 0)): \ \frac{\omega''(t)}{\omega'(t)} t \leq c \ (t \to +\infty), \tag{14}$$

то з теорем 1 і 2 одержуємо теорему 3.

Теорема 3. *Нехай ω - додатна, зростаюча, двічі диференційована на $[0, +\infty)$ функція із спадною похідною такою, що виконуються умови (8), (14) і $k'(t)$ - не спадає. Для того, щоб для кожної функції $F \in H(\Lambda)$ виконувалось співвідношення (6) при $\sigma \to +\infty$ зовні множини скінченної міри необхідно і досить, щоб виконувалось (10), де $k(t)$ - функція обернена до функції $\frac{1}{\omega'(t)}$.*

Наведемо приклади функцій $\omega(t)$, для яких виконуються умови теореми 3. Такими, очевидно, є $\omega(t) = (\ln t)^{1+\alpha}$ $(\alpha \geq 0)$, $\omega(t) = t^\beta$ $(0 < \beta < 1)$. У другому випадку $k(t) = (\beta t)^{\frac{1}{1-\beta}}$, а у першому $k(t) \sim (1+\alpha) t (\ln t)^\alpha$. У відповідності з цим одержуємо наступні наслідки теореми 3.

Наслідок 2. *Для того, щоб для кожної функції $F \in H(\Lambda)$ виконувалось співвідношення (4) при $\sigma \to +\infty$ зовні множини скінченної міри, необхідно і досить, щоб виконувалась умова (5).*

Твердження наслідку 2 показує справедливість гіпотези сформульованої М.М.Шереметою (Мат. сб., 1979, т.110, N 1).

Наслідок 3. *Нехай $0 < \beta < 1$. Для того, щоб для кожної функції $F \in H(\Lambda)$ виконувалось співвідношення*

$$(\ln M(\sigma, F))^\beta - (\ln \mu(\sigma, F))^\beta \to 0$$

при $\sigma \to +\infty$ зовні множини скінченної міри, необхідно і досить, щоб

$$\int^{+\infty} t^{-2} (\ln n(t))^{\frac{1}{1-\beta}} \, dt < +\infty.$$

При $\beta = \frac{1}{2}$ одержуємо розв'язок проблеми 5 сформульованої М.М.Шереметою (Матем. студії, 1994, вип. 3, с.118). Якщо ж $\omega(t) = t$, то у відповідності із зауваженням 6 умова (9) і умова

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < +\infty \tag{15}$$

є рівносильні.

Теореми 4 і 6 містять твердження про те, що умова (15) є необхідна і достатня для того, щоб співвідношення

$$M(\sigma, F) \sim \mu(\sigma, F), \tag{16}$$

$$M(\sigma, F) \sim m(\sigma, F), \tag{17}$$

де $m(\sigma, F) = \inf\{|F(\sigma + iy)| : y \in \mathbb{R}\}$, виконувались для кожної функції $F \in H(\Lambda)$ при $\sigma \to +\infty$ зовні множини скінченної міри. Вказані теореми, а також теорема 5 посилюють, або узагальнюють наступні результати. Для цілих функцій f, представлених лакунарними степеневими рядами

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}, \quad 0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty \ (n \to +\infty), \lambda_n \in \mathbb{N} \ (n \geq 1), \tag{18}$$

достатні умови для справедливості співвідношення $M_f(r) \sim m_f(r)$ при $r = r_j \uparrow +\infty$ вказано вже у статтях А.Вімана та Д.Пойа. В 1953р. П.Ердеш і А.Макінтайр показали, що умова (15) (з $\lambda_n \in \mathbb{N}$) є достатньою для справедливості співвідношень

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\mu_f(r)}{M_f(r)} = 1, \quad \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{m_f(r)}{M_f(r)} = 1,$$

де $M_f(r)$ і $m_f(r)$, відповідно максимум та мінімум модуля на колі радіуса r, а також у певному сенсі – не покращувана. П.Фентон показав, що умова (15) є достатньою для справедливості співвідношень $M_f(r) \sim \mu_f(r)$, $M_f(r) \sim m_f(r)$ при $r \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри. Для цілих функцій $F \in H(\Lambda)$ в 1981р. Ш.Стреліц і І.Вейт показали, що якщо $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)^2 \geq \lambda_{n+1} \ln^{3+\delta} \lambda_{n+1}$ $(n \geq n_0), \delta > 0$, то співвідношення

$$F(\sigma + i\tau) = (1 + o(1)) a_{\nu(\sigma)} e^{(\sigma+i\tau)\lambda_{\nu(\sigma)}} \tag{19}$$

виконується при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри, рівномірно по $\tau \in \mathbb{R}$, де $\nu = \nu(\sigma) = \nu(\sigma, F)$ – центральний індекс ряду Діріхле (3). Із одержаних раніше М.М.Шереметою результатів випливає, що аналогічне твердження справджується при виконанні умови $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)^2 \geq \lambda_{n+1} \ln^{2+\delta} \lambda_{n+1} \quad (n \geq n_0), \delta > 0$.

У твердженнях 1 і 2, встановлених в §2, для випадків, доповняльних до тих, що розглянуті в теоремах 3–6, встановлюється остаточність умови (9). Крім того, знайдено умови, при яких виконуються аналоги нерівності Вімана (2), а також встановлена їх непокращуваність. Метод дослідження, який використовується при доведенні достатності у розділі І, а також в §4.2 відмінний від варіантів методу Вімана-Валірона, що належать У.Хейману і М.М.Шереметі, і є близьким до П.Розенблума. Загальні конструкції функцій, що забезпечують доведення необхідності тут і в інших розділах, вперше були побудовані автором дисертації.

Розділ II, який присвячений вивченню властивостей абсолютно збіжних рядів Діріхле з монотонними коефіцієнтами, починається теоремою, яка показує, що повна аналогія результатів в $H_0(\Lambda)$ (клас всіх абсолютно збіжних в $\{z : \mathrm{Re} z < 0\}$ рядів Діріхле) і результатів в класах цілих функцій є не можлива.

Для цілих функцій, представлених як лакунарними степеневими рядами, так і рядами Діріхле, а також в цілому мероморфних в усій площині функцій, добре відомо, що наявність обмежень на зростання зверху, як от: умови на скінченний порядок або на скінченний нижній порядок і т. п., – надає додаткові (часом вирішальні) можливості для описання асимптотичних властивостей функцій із відповідних класів. Прикладом можуть служити, як і особливо характерні у цьому плані $\cos \pi\rho$-теорема та гіпотеза Пелі, так і велика кількість інших тверджень, які можна знайти у будь-якій монографії з теорії цілих і мероморфних функцій.

Однак, теорема 2.1 показує, що ніякі обмеження на показники, навіть вкупі з обмеженням на зростання суми ряду Діріхле (з класу $H_0(\Lambda)$) зверху, не можуть забезпечувати бажаних асимптотичних властивостей.

Нехай L – клас додатних, неперервних на $[0, +\infty)$ функцій, що зростають до $+\infty$.

Теорема 2.1. *Нехай $\omega(t)$, $\Psi(t) \in L$ – довільні функції, $\omega(t) \equiv 0$ для $t < 0$. Для кожної послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty (n \to +\infty)$ існує функція $F \in H_0(\Lambda)$, для якої*

$$\omega(\ln M(\sigma, F)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \to +\infty \quad , \tag{20}$$

при $\sigma \to -0$, а також

$$\sup\{|a_n| : n \geq 0\} = +\infty, \tag{21}$$

і для всіх $\sigma \in [\sigma_0; 0)$ – нерівність

$$\ln \mu(\sigma, F) \leq \Psi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right). \tag{22}$$

§2.1 присвячений одержанню оцінок загального члена через максимальний для рядів, як з $H = \cup_\Lambda H(\Lambda)$, так і з $H_0 = \cup_\Lambda H_0(\Lambda)$. Характерною у цьому плані є наступна теорема.

ТЕОРЕМА 2.2. *Нехай $F \in H_0 \stackrel{def}{=\!=} \cup_\Lambda H_0(\Lambda)$, а $v(t)$ невід'ємна на $[0, +\infty)$ і додатна при $t \to +\infty$ функція така, що $\int_0^{+\infty} v(t)dt < +\infty$. Якщо $\ln n = o(\lambda_n)(n \to +\infty)$ і $\sup\{|a_n| : n \geq 0 = +\infty\}$, то існує функція $c_1(t) \uparrow +\infty \quad (t \to +\infty)$ така, що для всіх $n \geq 0$ і для всіх $\sigma < 0(\sigma \in E_1, l_0 - meas(E_1) \stackrel{def}{=\!=} \int_{E_1 \cap [-1,0)} d\ln\frac{1}{|\sigma|} < +\infty)$ – виконується нерівність*

$$a_n^* e^{q\lambda_n} \leq \mu(\sigma, F) \exp\left\{-|\sigma| \int_{\mu_\nu}^{\mu_n} (\mu_n - t) C_1(t) \varphi_1\left(\frac{t}{2}\right) v(4t) dt\right\}, \tag{23}$$

де $\mu_n = \ln a_n^*, \varphi_1(t)$ – функція, обернена до функції $\Phi_1(t) = \ln \mu\left(-\frac{1}{t}, F\right)$, $t > 0$, $\nu = \nu(\sigma, F)$, a_n^* - коефіцієнти мажоранти Ньютона функції F.

Використовуючи властивості мажоранти Ньютона, ми задачу одержання оцінок загального члена ряду із H_0 через його максимальний член звели спочатку до аналогічної задачі для ряду Діріхле із класу H (для цілого ряду Діріхле), спосіб розв'язання останньої складає суть класичного методу Вімана-Валірона та його модифікацій. Проте використання тут, у зазначеному колі питань, логарифмічної міри – є новим і приводить до нових результатів також у випадку цілих рядів Діріхле ($F \in H$).

Крім того, міркуючи "навпаки", задачу одержання оцінок для цілих рядів Діріхле зводимо до аналогічної задачі для рядів із $H_0(\Lambda)$. Слід відзначити, що до розв'язання останньої застосувати аналог методу Вімана–Валірона нікому, аж до робіт автора, не вдавалось через значні проблеми технічного характеру, що при цьому виникають. Зауважимо, що інша обставина, яка, мабуть, зіграла не останню роль – це те, що вівся пошук прямих аналогів (як для лакунарних степеневих рядів в одиничному крузі $\mathbb{D}$, так і для абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле) результатів, відомих для цілих функцій та цілих рядів Діріхле. Однак, як показує теорема 2.1, прямі аналоги принципово неможливі (принаймні ті, що стосуються співвідношень вигляду (6), (2) і т. п.).

Крім того, у цьому ж параграфі встановлено в класі H теорему 2.3 подібну до теореми 2.2. Обидві ці теореми дозволяють одержати ряд результатів, з яких буде слідувати, що якісно, послідовність $(\ln|a_n|)$ у випадку класу H_0 та послідовність $\left(\ln\frac{1}{|a_n|}\right)$ і (λ_n) у випадку класу H відіграють однакову роль, що полягає у тому, що достатні умови (які при цьому є непокращуваними) для справедливості аналогічних теорем є однаковими.

§2.2 присвячений встановленню узагальнень теорем Бореля для рядів з монотонними коефіцієнтами. Центральними тут є теореми 2.4–2.7, наслідок 1 з теореми 2.8 і теорема 2.4. У теоремах 2.5, 2.6 і 2.7 розглядається випадок співвідношення (6).

ТЕОРЕМА 2.4. *Нехай $F \in H_0$. Якщо для її мажоранти Ньютона виконується умова*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln a_n^*} < +\infty \tag{24}$$

то

$$\ln M(\sigma, F) = o\left(\frac{1}{|\sigma|} \ln \mu(\sigma, F)\right), \tag{25}$$

при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини E_1 скінченної логарифмічної міри (тобто, $l_0 - meas\,(E_1 \cap [-1;0)) < +\infty$). Якщо додатково вимагати виконання умови

$$(\exists q > 0) \ \ (|\sigma|^q \ln \mu(\sigma, F) \uparrow (\sigma_0 \le \sigma < 0)), \tag{26}$$

то справджується співвідношення (4) при $\sigma \to -0$ зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри.

На непокращуваність теореми 2.4 вказує теорема 2.7.

ТЕОРЕМА 2.7. *Для кожної послідовності (a_n) такої, що $0 < |a_n| \uparrow +\infty, \ln n = O(\ln|a_n|)(n \to +\infty)$ і умова (24) не виконується існує функція $F \in H_0$, для якої*

$$\ln M(\sigma, F) \ge \frac{\beta_1}{|\sigma|} \ln \mu(\sigma, F) \quad (\sigma_0 \le \sigma < 0), \beta_1 > 0,$$

а умова (26) виконується з $q = 1$.

Аналогом теореми 2.4 для класу H є наступне твердження.

Наслідок 1. *Нехай $F \in H$. Якщо для її мажоранти Ньютона виконуються умови: $\frac{\ln n}{\ln \frac{1}{a_n^*}}$ – не зростає і*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln \frac{1}{a_n^*}} < +\infty \tag{27}$$

а також $\frac{1}{\sigma} \ln \mu(\sigma, F) \in L_1$, то співвідношення (4) виконується при $\sigma \to +\infty$ зовні множини E скінченної логарифмічної міри, тобто $\ln -meas(E) \stackrel{def}{=} \int_{E \cap [1,+\infty)} d \ln \sigma < +\infty$, де L_1 – клас тих функцій $\Phi \in L$, що $\int^t \frac{\Phi(x)}{x} dx = O(\Phi(t)), t \to +\infty$.

На непокращуваність твердження наслідку 1 вказує

Теорема 2.9. *Для кожної послідовності (a_n) такої, що $0 < |a_n| \downarrow 0$ $(n \to +\infty)$, $\overline{\lim}_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{|a_n|}} = \theta < 1$, і умова (27) не виконується, існує функція $F \in H$, для якої $\frac{\ln M(\sigma,F)}{\ln \mu(\sigma,F)} \to +\infty$ $(\sigma \to +\infty)$.*

У §2.3 вивчається зростання у горизонтальних смугах рядів з H і H_0. Істотно тут використовується, крім результатів §2.1, лема П.Турана (Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen, Budapest, 1953).

Основними результатами тут є теорема 2.10 та наслідок 1 з неї, а також теорема 2.15 та наслідок 1 з неї.

Нехай $a_1(x)$ і $a_2(x)$ – додатні на $\mathbb{R}$ функції такі, що $a_1(x) \le a_2(x)$ для всіх x з $\mathbb{R}$, а $t_j(x)$ – деяка довільна дійсна функція на $\mathbb{R}$. Крім того, визначимо

$$S_j(\sigma, t_j, a_j) = \{z = \sigma + iy : |y - t_j(\sigma)| \le a_j(\sigma)\},$$
$$S_j^0 = \bigcup_{\sigma < 0} S_j(\sigma, t_j, a_j), \quad S_j = \bigcup_{\sigma \in \mathbb{R}} S_j(\sigma, t_j, a_j),$$
$$M(\sigma, F, S_j) = \sup\{|F(\sigma + iy)| : \ |y - t_j(\sigma)| \le a_j(\sigma)\}.$$

Теорема 2.10. *Нехай $F \in H_0$. Якщо для коефіцієнтів мажоранти Ньютона ряду (1.3) виконується умова*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln a_n^*} < +\infty \tag{28}$$

то для будь-яких горизонтальних півсмуг $S_1^0 \subset S_2^0$ (тут $a_j(\sigma) \equiv const$, $t_j(\sigma) \equiv const$) виконується співвідношення

$$\ln M(\sigma, F, S_2) \ge \ln M(\sigma, F, S_1) \ge$$
$$\ln(M(\sigma, F, S_2) + o(\mu(\sigma, F))) + o(\ln \mu(\sigma, F)) \tag{29}$$

при $\sigma \to -0$ зовні деякої множини E_1 скінченної логарифмічної міри на $[-1; 0)$, якщо тільки виконується умова (26).

Наслідок 1. *Нехай $F \in H_0$ і виконуються умови (28) і (26), а коефіцієнти $a_n = |a_n|e^{i\theta_n}$ такі, що*

$$|\theta_n - \theta| \le \gamma < \frac{\pi}{2} \quad (n \ge n_0), \ \theta \in [-\pi; \pi) \tag{30}$$

Тоді для кожної півсмуги $S^0 = \cup_{\sigma<0} S(\sigma, t, a)$, $a > 0, t \in \mathbb{R}$, при $\sigma \to -0(\sigma \notin E_1, l_0 - meas(E_1) < +\infty)$ виконуються співвідношення

$$\ln M(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln M(\sigma, F, S). \tag{31}$$

Умова (28) близька в деякому сенсі до остаточної (необхідної). На це вказує теорема 2.13. Теорема 2.15, яка встановлена для класу H є повністю подібна до теореми 2.10. Це ж стосується і наслідків. У §2.4 встановлено, що умова

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_{n+1} - \mu_n} < +\infty \tag{32}$$

є необхідна і достатня для справедливості співвідношень (17), (16): а) у випадку $F \in H$, $\mu_n = \ln \frac{1}{|a_n|}$, $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \notin E, \ \ln - \text{meas} E < \infty)$, б) у випадку $F \in H_0$, $\mu_n = \ln |a_n|$, $\sigma \to 0$ $(\sigma \notin E, l_0 - \text{meas} E < \infty$. При цьому у випадку $F \in H$ від послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$ досить вимагати, щоб $\lambda_n < \sup\{\lambda_j : j \ge 0\} = \Delta (n \ge 0)$.

У розділі III продовжуємо дослідження асимптотичних властивостей функцій $F \in H_0$, що розпочаті у розділі II. Не зважаючи на виявлену там нову якісну картину, що послідовність (μ_n) у випадку класу H_0 відіграє в цілому ряді питань ту ж роль, що і послідовність (λ_n) в класі H, а також на необхідний і достатній характер одержуваних при цьому результатів, слід відзначити, що всі твердження цього розділу формулюються з тими чи іншими додатковими умовами, які стосуються певної правильності зростання $\ln \mu(\sigma, F)$. І хоча при побудові функцій, які покликані показати непокращуваність (необхідність) основних умов, як правило, просто перевіряється виконання додаткових, наявність останніх в певній мірі обмежує зону застосування одержуваних результатів. В теоремі 2.1 показана принципова неможливість в ідейному плані повних аналогій теорем про співвідношення вигляду (6) в класах $H_0(\Lambda)$ і $H(\Lambda)$. Розділ III починається з теореми 3.1, в якій подібне твердження встановлюється стосовно співвідношення

$$L(\sigma, F) = (1 + o(1))\lambda_{\nu(\sigma,F)}, \tag{33}$$

де $L(\sigma, F) = (\ln M(\sigma, F))'_+$.

Як випливає із результатів цього розділу, досить хороше описання умов, що забезпечують справедливість тих чи інших асимптотичних властивостей рядів Діріхле із H_0, є можливе, якщо швидкість прямування (λ_n) до $+\infty$ певним чином пов'язувати із швидкістю зростання $\mu(\sigma, F)$ до $+\infty$ при $\sigma \to -0$. Зокрема, для співвідношення (33) слід вимагати апріорного виконання умови (5), тобто збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n}$, а потім швидкість збіжності цього ряду пов'язувати із зростанням до $+\infty$ максимального члена $\mu(\sigma, F)$.

§3.1 містить оцінки загального члена через максимальний. Характерною тут є теорема 3.2.

Нехай L_0 — клас додатних неспадних на $[0, +\infty)$ функцій $v(t)$ таких, що $\int^{+\infty} \frac{dv(t)}{t} < +\infty$.

Теорема 3.2. *Нехай* $\Phi(t) = \frac{\Phi_1(t)}{t} \in L_1$; $v(t) \in L_0$ *і* $F \in H_0(\Lambda)$. *Якщо* $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$ *і виконуються умови*

$$(\exists b > 0): \quad \varlimsup_{\sigma \to -0} \frac{\lambda_{\nu(\sigma)}}{\Phi_1\left(\frac{b}{|\sigma|}\right)} > 0, \tag{34}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\Phi(t)} \int_0^{\Phi_1(t)} \left(\int_u^{+\infty} \frac{1}{x} dv(x) \right) du = 0, \tag{35}$$

то для всіх $n \geq 0$ *і всіх* $\sigma \in [-1; 0) \setminus E$ $(dE = \underline{\lim}_{\sigma \to -0} \frac{1}{|\sigma|} meas(E \cap [-1, \sigma]) = 0)$ *справджується нерівність*

$$|a_n| e^{\sigma \lambda_n} \leq \mu(\sigma, F) \exp\left\{ -\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t} dv(t) \right\}, \tag{36}$$

де $\nu = \nu(\sigma) = \nu(\sigma, F)$ – *центральний індекс ряду* (3).

Зауважимо, що у випадку теореми 3.2 і теорем 3.3, 3.4, порівняно з доведенням подібних тверджень, як для цілих функцій, зображених степеневими рядами, так і для цілих рядів Діріхле, виникають принципово нові технічні ускладнення, які вдалось здолати лише на основі нового в ідейному плані підходу до одержання таких результатів.

В §3.2 встановлено подальші аналоги теореми Бореля.

Нехай

$$H_0(\Lambda, \Phi) = \left\{ F \in H_0(\Lambda) : (\exists b > 0) \left[\varlimsup_{\sigma \to -0} \frac{\lambda_{\nu(\sigma)}}{\Phi_1\left(\frac{b}{|\sigma|}\right)} > 0 \right] \right\},$$

$$\overline{H}_0(\Lambda,\Phi) = \left\{ F \in H_0(\Lambda) : (\exists b > 0) \left[\overline{\lim_{\sigma\to -0}} \frac{\ln\mu(\sigma,F)}{\Phi\left(\frac{b}{|\sigma|}\right)} > 0 \right] \right\},$$

де $\Phi_1(t) = t\Phi(t)$, $\Phi \in L$.

Теорема 3.5. *Нехай $\Phi \in L_1$, $\Phi_1(t) = t\Phi(t)$. Для того, щоб для кожної функції $F \in \overline{H}_0(\Lambda,\Phi)$ виконувалось співвідношення (4) при $\sigma \to -0$ ($\sigma \notin E_1$, $dE_1 = 0$) необхідно і досить, щоб*

$$\lim_{t\to+\infty} t \sum_{\lambda_n \geq \Phi_1(t)} \frac{1}{n\lambda_n} = 0.$$

Твердження цієї теореми, а також подібних – в класі $H_0(\Lambda,\ \Phi)$ одержуємо із більш загальних теорем, що стосуються умов виконання співвідношень (6).

Теорема 3.6. *Нехай $\Phi \in L_1$, $\Phi_1(t) = t\Phi(t)$ і $F \in \overline{H}_0(\Lambda,\Phi)$, а $\omega(t)$ – неперервно диференційована функція на $[0,\infty)$ із спадною похідною, для якої виконуються умови (13) і $(t\omega'(t)) \nearrow$ $(t \to +\infty)$. Якщо виконується умова*

$$\lim_{t\to+\infty} t \sum_{\lambda_n > \Phi_1(t)} \frac{k(\ln(n+1)) - k(\ln n)}{\lambda_n} = 0, \tag{37}$$

то співвідношення (6) справджується при $\sigma \to -0$ ($\sigma \notin E_1$, $dE_1 = 0$).

На непокращуваність теореми 3.6 вказує наступна

Теорема 3.7. *Нехай функція ω – додатна, зростаюча, двічі диференційована на $[0,+\infty)$ така, що при цьому $k(t)$ – вгнута від $\ln t$, $k'(t)$ не спадає*

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{k'(t)}{t}\right) < 1, \tag{38}$$

де $k(t)$ –функція обернена до $\frac{1}{\omega'(t)}$. Для кожної $\Phi \in L$ і кожної послідовності (λ_n) такої, що умова (37) не виконується знайдеться функція $F \in \overline{H}_0(\Lambda,\Phi)$ така, що нерівність (12) виконується при $\sigma_0 \leq \sigma < 0$.

Враховуючи, що при виконанні умови (14) умови теорем 3.6 і 3.7 на функції $\omega(x)$ і $k(t)$ виконуються одночасно, тому з цих теорем одержуємо наступну теорему.

Теорема 3.8. *Нехай $\Phi \in L_1$, $\Phi_1(t) = t\Phi(t)$, а $\omega(t)$ – неперервно диференційована функція на $[0, +\infty)$, для якої виконується умова (14), $(t\omega'(t))$ і $k'(t)$ не спадають, $k(t)$ вгнута відносно $\ln t$. Для того, щоб для кожної функції $F \in \overline{H}_0(\Lambda, \Phi)$ співвідношення (6) виконувалось при $\sigma \to -0$ $(\sigma \in [-1; 0) \setminus E_1,\ dE_1 = 0)$ необхідно і досить, щоб виконувалась умова (37), де $k(t)$ – функція обернена до $\frac{1}{\omega'(x)}$.*

Позначення $H_0(\Lambda_1, \Phi)$ означає, клас $H_0(\Lambda, \Phi)$ з фіксованою послідовністю $\Lambda = \Lambda_1$, яка задовольняє умову

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{k(\ln n(t))}{t} \varphi_1(t) = 0, \tag{39}$$

з функцією $\varphi_1(t)$ оберненою до $\Phi_1(t) = t\Phi(t)$.

Теорема 3.9. *Нехай $\Phi \in L$, $\Phi_1(t) = t\Phi(t)$, а функція $\omega(x)$ така, як в теоремі 3.6. Якщо $F \in H_0(\Lambda_1, \Phi)$ і виконується умова*

$$\underline{\lim_{t \to +\infty}}\ t \sum_{\lambda_n \geq \Phi_1(t)} \frac{k(\ln(n+1)) - k(\ln n)}{\lambda_n} = 0, \tag{40}$$

то співвідношення (6) справджується при $\sigma \to -0$ $(\sigma \notin E_3, dE_3 = 0)$, де $k(t)$ – функція обернена $\frac{1}{\omega'(x)}$.

На необхідність умови (40) в класі $H_0(\Lambda, \Phi)$ вказує наступна теорема.

Теорема 3.10. *Нехай $\omega(x)$ – функція така, як в теоремі 3.7. Для кожної функції $\Phi \in L$ і кожної послідовності (λ_n) такої, що умова (40) не виконується, знайдеться функція $F \in H_0(\Lambda, \Phi)$ така, що нерівність (12) справджується для всіх $\sigma \in [\sigma_0; 0)$ з деякими $\sigma_0 < 0$, $b > 0$.*

З теореми 3.9 і 3.10 негайно одержуємо наступний критерій.

Теорема 3.11. . *Нехай $\Phi \in L$, $\Phi_1(t) = t\Phi(t)$, а $\omega(x)$ – така як в теоремі 3.8. Для того, щоб для кожної функції $F \in H_0(\Lambda_1, \Phi)$ співвідношення (6) виконувалось при $\sigma \to -0$ $(\sigma \in [-1; 0) \setminus E_3,\ dE_3 = 0)$ необхідно і досить, щоб виконувалась умова (40), де $k(t)$ – функція обернена до $\frac{1}{\omega'(x)}$.*

Наслідок. *Нехай $\Phi \in L$, $\Phi_1(t) = t\Phi(t)$. Для того, щоб для кожної функції $F \in H_0(\Lambda_1, \Phi)$ співвідношення (4) виконувалось при $\sigma \to -0$ $(\sigma \notin E_3,\ dE_3 = 0)$ необхідно і досить, щоб*

$$\underline{\lim_{t \to +\infty}}\ t \sum_{\lambda_n \geq \Phi_1(t)} \frac{1}{n\lambda_n} = 0. \tag{41}$$

Наступна теорема містить значно більше інформації про виняткову множину, ніж теореми 3.6, 3.8, 3.9, 3.11.

ТЕОРЕМА 3.12. *Нехай $\Phi \in L$, $\Phi_1(t) = t\Phi(t)$, а функція $\omega(x)$ така, як в теоремі 3.6. Якщо $F \in H_0(\Lambda, \Phi)$ і виконується умова* (37), *то співвідношення* (6) *справджується при $\sigma \to -0$ ($\sigma \notin E_2$, $DE_2 = 0$).*

У §3.3 встановлюємо умови достатні для справедливості співвідношення (33) при $\sigma \to -0$ зовні деякої множини для функцій $F \in H_0(\Lambda)$. Вкажемо на природність задачі про встановлення зв'язку між $L(\sigma)$ і центральним показником. Оскільки, з одного боку, $L(\sigma)$ відіграє важливу роль в застосуваннях теорії Вімана-Валірона, а з іншого боку, відновити функцію F (тим паче, обчислити $L(\sigma)$) за заданими послідовностями коефіцієнтів (a_n) і показників λ_n досить складна задача, яка допускає пряме розв'язання лише у часткових випадках. Як і в §3.2 для співвідношення (4), важливу роль при вивченні співвідношення (33) відіграє поведінка залишку ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n}$, який надалі вважатимемо збіжним, тобто таким що виконується умова (5). При цьому виявляється, що, як і у випадку цілих рядів Діріхле (див. Мат. заметки, 1985, т. 37, N 1; Мат. сборник, 1988, т.137, N 1), умови, при виконанні яких справджуються зовні виняткових множин співвідношення (4) і (33), в цілому, збігаються.

ТЕОРЕМА 3.13. *Нехай $\Phi \in L_1, \Phi_1(t) = t\Phi(t)$. Якщо $F \in \overline{H}_0(\Lambda_1, \Phi)$ і виконуються умови (37) (з $k(t) = t$) та*

$$\lambda = \varliminf_{\sigma \to -0} \frac{\ln L(\sigma)}{\ln \frac{1}{|\sigma|}} > 1 \,, \tag{42}$$

то співвідношення (33) справджується при $\sigma \to 0$ ($\sigma \notin E_4$, $dE_4 = 0$).

ТЕОРЕМА 3.14. *Нехай $\Phi \in L_1, \Phi_1(t) = t\Phi(t)$. Якщо $F \in H_0(\Lambda_1, \Phi)$, виконується умова (41), то співвідношення (33) справджується при $\sigma \to 0$ ($\sigma \notin E_5, dE_5 = 0$).*

ТЕОРЕМА 3.15. *Нехай $\Phi \in L_1, \Phi_1(t) = t\Phi(t)$. Якщо $F \in H_0(\Lambda_1, \Phi)$, виконується умова (37) (з $k(t) = t$), то співвідношення (33) справджується при $\sigma \to 0$ ($\sigma \notin E_6, DE_6 = 0$).*

При доведенні цих теорем використовуються теореми з §3.1, дві леми з праці Укр. мат. журн., 1979, т.31, N 6 та одне твердження з книги Ш.И.Стрелиц, Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений, Вильнюс: Минтис, 1972. Ключовими у доведенні є леми 3.6 і 3.7, які описують поведінку $F \in H_0(\Lambda)$ та її похідних в околі точки максимума $|F(z)|$. Наступна теорема 3.16 показує непокращуваність теореми 3.15

Через $\Lambda_\varphi = (\lambda_n)$ позначимо послідовність $\Lambda = (\lambda_n)$, для якої існує границя

$$\lim_{t\to+\infty} t \sum_{\lambda_n \ge \Phi_1(t)} \frac{1}{n\lambda_n} \stackrel{def}{==} \Delta_\varphi$$

для фіксованої функції Φ_1, що визначає клас $H_0(\Lambda, \Phi)$. Справедлива наступна теорема.

ТЕОРЕМА 3.16. *Нехай $\Phi \in L_1$, $\Phi_1(t) = t\Phi(t)$. Для того, щоб для кожної функції $F \in H_0(\Lambda_\varphi; \Phi)$ виконувалось при $\sigma \to -0$ ($\sigma \notin E_6$, $DE_6 = 0$) співвідношення* (33), *необхідно і досить, щоб $\Delta_\varphi = 0$.*

Твердження теореми 3.16 одержуємо поєднуючи теореми 3.15 і 3.10 (при $\omega(x) = \ln x$), та застосовуючи наступну лему.

ЛЕМА 3.9. *Нехай $f(x)$ і $g(x) \uparrow +\infty (x \to -0)$ – невід'ємні опуклі при $x < 0$ функції такі, що правосторонні похідні $f'_+(x)$, $g'_+(x) \nearrow +\infty$ $x \to -0$). Якщо*

$$f(x) \le g(x), \quad x \in [\sigma_0; 0),$$

то для кожних $K > 1$ і $\varepsilon > 0$ знайдеться множина $E \subset (-\infty; 0)$ така, що

$$DE \ge \frac{K-1}{K}$$

і для всіх $x \in E$ виконується нерівність

$$f'(x) \le (1+\varepsilon)Kg'(x). \tag{43}$$

Доведення леми 3.9 подібне до доведення теореми 1 (Bergweiler W. Bull. London Math. Soc., 1989, v.21).

У §3.4 досліджуються умови, достатні для виконання співвідношень (16), (17) і т.п. в класі $H_0(\Lambda)$. Як випливає з теореми 2.1, ніяке обмеження на показники (λ_n) навіть у сукупності з обмеженням зверху на зростання функції $F \in H_0(\Lambda)$ не може забезпечувати виконання співвідношення (6). Якщо послідовність (λ_n) така, що умова (15) не виконується, тоді ніяке обмеження знизу на $\mu(\sigma, F)$ також не дозволяє одержати співвідношення (16), (19) і (17) навіть для деякої послідовності $\sigma = \sigma_j \to -0$ (для кожного із співвідношень своєї).

ТВЕРДЖЕННЯ 3.2. *Нехай $\Psi \in L$ – довільна функція. Для кожної послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ такої, що умова* (15) *не виконується, існує функція $F \in H_0(\Lambda)$, для якої співвідношення* (16), (17) *і* (19) *не можуть виконуватись хоча б вздовж деякої послідовності значень $\sigma \to -0$ при цьому*

$$\ln \mu(\sigma, F) \ge \Psi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right) \quad (\sigma_0 \le \sigma < 0).$$

Із тверджень 3.1 і 3.2 випливає, що бажаного результату (справедливості співвідношень (16), (17), (19) при $\sigma \to -0$ зовні малої множини) можна досягти лише накладаючи обмеження на зростання $\mu(\sigma, F)$ знизу, вважаючи при цьому умову (15) виконаною.

Встановлені у §3.4 теореми 3.17 – 3.19 містять достатні умови для справедливості (19) при $\sigma \to -0$ зовні множини E з $DE = 0$ чи $dE = 0$ в класах $H_0(\Lambda, \Phi)$, $\overline{H}_0(\Lambda, \Phi)$. Характерною тут є наступна теорема.

ТЕОРЕМА 3.17. *Нехай* $\Phi_1 \in L_5$, $\Phi_1(t) = t\Phi(t)$. *Якщо* $F \in \overline{H}_0(\Lambda, \Phi)$ *і виконується умова*

$$\lim_{t \to +\infty} t \sum_{\lambda_n \geq \Phi_1(t)} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)^{-1} = 0, \tag{44}$$

то співвідношення (19) справджується при $\sigma \to -0(\sigma \notin E_7, dE_7 = 0)$ *рівномірно по* $\tau \in \mathbb{R}$, *де* $L_5 = \{\Phi \in L : \varphi\left(\frac{t}{\varphi(t)}\right) \sim \varphi(t)\ (t \to +\infty)\}, \varphi$ — *обернена до* $\Phi\}$.

В теоремах 3.20-3.22 містяться твердження про необхідність одержаних в теоремах 3.17-3.19 умов. З теорем 3.17-3.22 одержуємо наступні.

ТЕОРЕМА 3.23. *Нехай* $\Phi_1 \in L_5$, $\Phi_1 = t\Phi(t)$. *Для того, щоб для кожної функції* $F \in \overline{H}_0(\Lambda, \Phi)$ *співвідношення* (19) *виконувалося при* $\sigma \to -0$ $(\sigma \notin E_7,\ dE_7 = 0)$ *рівномірно по* $\tau \in \mathbb{R}$, *необхідно і досить, щоб справджувалось* (44).

ТЕОРЕМА 3.24. *Нехай* $\Phi \in L_4$, $\Phi_1(t) = t\Phi(t)$. *Для того, щоб для кожної функції* $F \in H_0(\Lambda, \Phi)$ *справджувалось співвідношення* (19) *при* $\sigma \to -0$ $(\sigma \notin E_8,\ dE_8 = 0)$ *рівномірно по* $\tau \in \mathbb{R}$, *необхідно і досить, щоб виконувалась умова* (44) *із заміною* lim *на* $\underline{\lim}$, *де* $L_4 = \{\Phi \in L : \frac{\varphi(t)}{t} \ln^2 t \to 0\ (t \to +\infty)\}, \varphi$ *– обернена до* $\Phi\}$.

ТЕОРЕМА 3.25. *Нехай* $\Phi \in L_4$, $\Phi_1(t) = t\Phi(t)$. *Для того, щоб для кожної функції* $F \in H_0(\Lambda, \Phi)$ *справджувалось співвідношення* (19) *при* $\sigma \to -0$ $(\sigma \notin E_9,\ DE_9 = 0)$ *рівномірно по* $\tau \in \mathbb{R}$, *необхідно і досить, щоб виконувалась умова* (44).

Функція, яка побудована при доведенні теорем 3.20 і 3.21, крім того, що для неї співвідношення (19) не може виконуватись, очевидно володіє властивістю (21) не залежно від будь-яких умов на показники $\Lambda = (\lambda_n)$. Тому можна чекати, що ця функція може виступати в якості оптимальної оцінки знизу вигляду

$$(\exists b > 0) : \varlimsup_{\sigma \to -0} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\Phi\left(\frac{b}{|\sigma|}\right)} > 0,$$

яка забезпечує справедливість співвідношення (19). Нехай $\Delta_n(q) = \ln a_n, a_n$ – коефіцієнти ряду, визначеного при доведенні теореми 3.20.

ТЕОРЕМА 3.26. *Нехай $F \in H_0(\Lambda)$ і виконується умова* (15). *Якщо виконується умова*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\ln|a_n|}{\Delta_n(1)} = +\infty,$$

то співвідношення (19) *справджується при $\sigma \to -0$ ($\sigma \notin E_{14}, dE_{14} = 0$) рівномірно по $\tau \in \mathbb{R}$.*

Із теореми 3.26, зокрема, одержуємо наступне посилення теореми Вімана (Wiman A. Acta Math., 1916, v.41, p. 1-28).

НАСЛІДОК 3.2. *(посилення теореми А. Вімана). Для того, щоб для кожної функції $F \in H_0(\Lambda)$ такої, що*

$$\overline{\lim_{\sigma\to-0}} |\sigma|^{\rho} \ln M(\sigma, F) > 0,$$

співвідношення (19) *виконувалось при $\sigma \to -0$ ($\sigma \notin E, dE = 0$) необхідно і досить, щоб*

$$\lambda_n^{\frac{1}{1+\rho}} \sum_{k\geq n} (\lambda_{k+1} - \lambda_k)^{-1} = o(1) \quad (n \to +\infty).$$

У Розділі IV продовжуються вивчення асимптотичних властивостей цілих функцій $F \in H(\Lambda)$. При цьому, також, уточнюємо одержані вище у розділах I і II теореми у різних підкласах $H(\Lambda)$. Шеремета М.М. (Мат. заметки, 1987, т. 42, N 2, с. 215-226) показав, що якщо послідовність $\Lambda = (\lambda_n)$ така, що

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\, n}{\lambda_n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\lambda_k} \right)^{-1} = 0 \quad ,$$

то для того, щоб співвідношення (4) виконувалось для кожної функції $F \in H_a(\Lambda, \psi) \stackrel{def}{=\!=} \{F \in H(\Lambda) : \ln|a_n| \leq -\lambda_n \Psi(K\lambda_n)\ (n \to +\infty), K > 0\}$, для $\Psi \in L$, при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини нульової щільності, необхідно і досить, щоб

$$(\forall \eta > 0) : \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\psi(\eta t)} \sum_{0<\lambda_n\leq t} \frac{1}{n\lambda_n} = 0$$

Хомяк М.М. (Изв. вузов. Мат., 1982, N 10, с. 79-81) встановила при деяких умовах на гладкість та повільне зростання функції $\psi \in L$, що умова

$$\ln\ n(t) = o(t\ \psi(t)) \quad (t \to +\infty) \tag{46}$$

є достатня для того, щоб для кожної функції $F \in H_a(\Lambda, \psi)$ співвідношення

$$\psi(\ln M(\sigma, F) \sim \psi(\ln \mu(\sigma, F)) \tag{47}$$

виконувалось при $\sigma \to +\infty$ зовні множини нульової щільності. Якщо ψ повільно зростаюча і така, що $\psi(t\psi(t)) \sim \psi(t \ln t) \sim \psi(t) \quad (t \to +\infty)$, то Шереметою М.М. (Мат. заметки, 1995, т. 57, N 2, с. 283-296) показано, що умова (46) є необхідна і достатня для справедливості (47), при $\sigma \to +\infty$ зовні множини нульової щільності, для кожної функції $F \in H_a(\Lambda, \psi)$. Однак, у випадку, коли функції ψ, які виступають у співвідношенні (47) і у визначенні класу $H_a(\Lambda, \psi)$, є різні, то така умова є не відома. Відкритим залишається питання і у випадку однакових функцій ψ, якщо ψ не є повільно зростаючою (див. також щойно цитовані статті М.М.Шеремети). У цьому розділі розглядаємо питання про умови справедливості співвідношення (47) для $x \leq \psi(x) \leq e^x$ або, що те ж саме, співвідношення (6) з $\ln x \leq \omega(x) \leq x$ у наступних підкласах класу $H(\Lambda)$

$$H(\Lambda, \Phi) = \{F \in H(\Lambda) : \ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \leq O(\sigma \Phi(O(\sigma))),\ \sigma \to +\infty\},$$

$$\overline{H}(\Lambda, \Phi) = \{F \in H(\Lambda) : \ln \mathfrak{M}(\sigma_j, F) \leq O(\sigma_j \Phi(O(\sigma_j))),\ \sigma_j \to +\infty\},$$

$$H_\mu(\Lambda, \Phi) = \{F \in H(\Lambda) : \ln \mu(\sigma, F) \leq O(\sigma \Phi(O(\sigma))),\ \sigma \to +\infty\},$$

$$\overline{H}_\mu(\Lambda, \Phi) = \{F \in H(\Lambda) : \ln \mu(\sigma_j, F) \leq O(\sigma_j \Phi(O(\sigma_j))),\ \sigma_j \to +\infty\},$$

для $\Phi \in L$,

$$\mathfrak{M}(\sigma, F) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| e^{\sigma \lambda_n}.$$

Крім того, розглядаємо поведінку мінімуму модуля $m(x, F)$ цілих рядів Діріхле, та мінімума модуля $m_f(r)$ лакунарних степеневих рядів вигляду (18). При цьому встановлюємо необхідні і достатні умови для справедливості асимптотичної рівності $\ln m_f(r_j) \sim \ln M_f(r_j)$ при $r_j \to +\infty$, які, зрозуміло, містять в собі твердження відомої гіпотези Г.Пойа (Math. Zeitschrift, 1929, Bd. 29, S. 549-640). Встановлюємо також деякі інші властивості $m_f(r)$ в залежності від ступеня лакунарності ряду, який зображає f, доповнюючи один результат У.Хеймана (Proc. London Math. Soc., 1972, v. 24, N 4, P. 590-624) та застосовуючи їх до розв'язання однієї гіпотези Й.В.Островського (див. Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. Фундам. напр. / ВИНИТИ, 1990, с. 5-186).

У §4.1 встановлено деякі нові оцінки загального члена через максимальний для функцій із $H(\Lambda)$ при слабких обмеженнях на зростання та на показники. В ідейному плані ці твердження близькі до результатів П. Фентона (Trans. Amer. Math. Soc., 1982, v. 271, N 1, P. 183-195). В цьому ж §4.1 встановлюються деякі інші допоміжні твердження, які дають змогу встановити в §4.2 теореми 4.1-4.3.

Нехай

$$L_6 = \{\psi \in L : \psi(t) \le t^2, t = o(\psi(t\varphi(t)))\ (t \to +\infty),$$

$$\left[(\forall b > 0)\ \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int^{b\Phi(t)} \frac{d\psi^{-1}(x)}{x} = 0\right]\},$$

$$L_7 = \{\psi \in L : \psi(t) \le t^2, t = o(\psi(t\varphi(t)))\ (t \to +\infty),$$

$$\left[(\forall b > 0)\ \underline{\lim}_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int^{b\Phi(t)} \frac{d\psi^{-1}(x)}{x} = 0\right]\},$$

де $\psi^{-1}(x)$ — функція обернена до ψ, φ – обернена до Φ.

Характерною тут є наступна теорема.

ТЕОРЕМА 4.1. *Нехай $\Phi \in L$, $\psi \in L_6(\Phi)$, $F \in H(\Lambda, \Phi)$ а функція $\omega(t)$ – додатна, неспадна з незростаючою похідною такою, що задовольняє умову (8). Якщо виконується умова*

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, \omega'(\psi^{-1}(t)) \ln n_\Lambda(t - \sqrt{\psi(t)},\ t + \sqrt{\psi(t)}] \le 0,$$

то співвідношення (6) справджується при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \notin E$, $DE = 0$), де $DE = \overline{\lim}_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\sigma} meas(E \cap [0, \sigma])$.

Теореми 4.4 і 4.5 встановлюють необхідність умов в теоремах 4.2 і 4.3, при додаткових обмеженнях на ω таких, як в §2 розділ І. Основними в §4.2 є теореми 4.6-4.9 та 4.12. Наведемо деякі з них.

Теорема 4.6. *Нехай ω – функція така, як в теоремі 3, $\Phi \in L$, а $\Lambda = (\lambda_n)$ – послідовність, для якої виконується умова*

$$(\forall b > 0) \; : \; \lim_{x \to +\infty} \frac{k(\ln n(x))}{x\varphi(bx)} = 0,$$

де φ – функція обернена до Φ.

Для того, щоб для кожної функції $F \in H_\mu(\Lambda, \Phi)$ співвідношення (6) виконувалось при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини E ($dE = 0$), необхідно і досить, щоб

$$(\forall b > 0) \; : \; \varliminf_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int^{b\Phi(t)} \frac{dk(\ln n(x))}{x} = 0.$$

Теорема 4.9. *Нехай $\Phi \in L$. Для того, щоб для кожної функції $F \in H(\Lambda, \Phi)$ виконувалось при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \notin E$, $dE = 0$) співвідношення (19) рівномірно по $\tau \in \mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб справджувалась умова*

$$(\forall b > 0) \; : \; \varliminf_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \sum_{\lambda_n \le b\Phi(t)} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0.$$

Теорема 4.12. *Нехай $\Phi \in L$. Для того, щоб для кожної функції $F \in H_\mu(\Lambda, \Phi)$ виконувалось при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \notin E$, $DE = 0$) рівномірно по $\tau \in \mathbb{R}$ співвідношення (19), необхідно і досить, щоб справджувалась умова*

$$(\forall b > 0) \; : \; \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\varphi(b\lambda_n)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = 0.$$

Для цілої функції f вигляду (18) в 1929 році Д.Пойа висловив припущення, що у випадку скінченного порядку для справедливості співвідношення

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln m_f(r)}{\ln M_f(r)} = 1$$

досить, щоб виконувалась умова Фабрі

$$n = o(\lambda_n) \quad (n \to +\infty). \tag{48}$$

Це припущення Д.Пойа довів У.Фукс, який, базуючись на результатах Т.Кевարі та своїх оцінках інтегралів по малих дугах від логарифмічної похідної, показав, що якщо для цілої функції скінченного порядку виконується умова (48), то для кожного $\varepsilon > 0$ нерівність

$$\ln m_f(r) > (1 - \varepsilon) \ln M_f(r) \tag{49}$$

виконується для всіх $r \in [1, +\infty) \setminus E, D_{\ln}E = 0$. Далі Л.Сонс довела, що при виконанні умови (48) для цілої функції скінченного нижнього порядку (49) виконується на деякій множині E нескінченної логарифмічної міри, $\ln-\text{meas}E = +\infty$. Із одного результату У.Хеймана випливає, що в умовах теореми Л.Сонс (49) виконується для $r \notin E, d_{\ln}E = 0$. Базуючись на лемах 4.1 і 4.2 встановлюємо тут теореми, які містять необхідні і достатні умови для справедливості (49). Тут всюди $D_{\ln}E$ та $d_{\ln}E$, відповідно, верхня та нижня логарифмічні щільності множини E на промені.

ТЕОРЕМА 4.13. *Для того, щоб для кожної цілої функції вигляду (18) скінченного порядку співвідношення (49) з $\varepsilon = \varepsilon(r) \to +0$ $(r \to +\infty)$ виконувалось для всіх $r \in [1, +\infty) \setminus E$, $d_{\ln}E = 0$, необхідно і досить, щоб*

$$\varliminf_{t \to +\infty} \frac{1}{\ln t} \sum_{\lambda_n \le t} \frac{1}{\lambda_n} = 0. \tag{50}$$

ТЕОРЕМА 4.14. *Для того, щоб для кожної цілої функції вигляду (18) скінченного нижнього порядку співвідношення (49) з $\varepsilon = \varepsilon(r) \to +0$ $(r \to +\infty)$ виконувалось для всіх $r \in [1, +\infty) \setminus E, d_{\ln}E = 0$, необхідно і досить, щоб*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\ln t} \sum_{\lambda_n \le t} \frac{1}{\lambda_n} = 0. \tag{51}$$

Зауважимо, що умова (51) (тим паче (50)) слабша за умову Фабрі (48). Крім того, тут встановлено теорему 4.15, яка посилює теорему У.Хеймана.

У цьому пункті, використовуючи встановлені вище результати, а також деякі результати із цитованої вище книги Ш.Стреліца одержимо твердження про неможливість у різних класах цілих та аналітичних функцій однієї функціональної тотожності, що узагальнює теорему Пікара про виняткові значення цілих функцій. Добре відомо, що ця теорема еквівалентна до твердження про неможливість тотожності

$$e^{g_1(z)} + e^{g_2(z)} = F(z), \tag{52}$$

де g_j – довільні цілі функції, при цьому $g_1(z) \not\equiv g_1(0)$, а $F(z) \equiv 1$. Й.В. Островський в 1983р. на конференції з теорії функцій і диференціальних рівнянь (м. Черноголовка) сформулював задачу, вияснити, при яких умовах на лакунарність степеневого розвинення функції F тотожність (52) залишається неможливою, при цьому він висловив припущення, що тотожність (52) неможлива, якщо степеневе розвинення функції F має адамарівські лакуни, тобто і $\lambda_{n+1}/\lambda_n \ge \theta > 1$

($n \geq 1$). Із встановлених в цьому параграфі результатів одержимо, зокрема, справедливість наступного твердження, яке очевидно містить твердження гіпотези Й.В. Островського.

ТЕОРЕМА 4.16. *Якщо ціла функція F вигляду (18) задовольняє умову* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\ln^+ \lambda_n}{\lambda_n} < +\infty$, *то тотожність (52) неможлива, як тільки* $F(z) \not\equiv 0$, $g_1(z) \not\equiv g_1(0)$.

Висновки. Дисертація містить нові науково обгрунтовані теоретичні результати в теорії цілих та аналітичних функцій, представлених рядами Діріхле та лакунарними степеневими рядами. Сукупність одержаних результатів дозволила розвинути напрямок, що базується на комплексному дослідженні основної частини відомих асимптотичних співвідношень у внутрішній теорії таких рядів, та дає новий підхід до розв'язання ряду класичних задач та їх узагальнень. Ефективність такого підходу продемонстровано при доведенні гіпотез Й.В.Островського, М.М.Шеремети, та остаточному вирішенні проблеми, що випливає з гіпотези Д.Пойа, а також при одержанні, як посилень відомих теорем, так і при доведенні принципово нових.

Результати дисертації опубліковані у наступних статтях.

1. Скасків О.Б. *Максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле* // Доп.АН УРСР, сер. А. – 1984. – N 11. – С.22–24.
2. Скаскив О.Б. *О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию* // Матем.заметки. – 1985. – Т.37, N 1. – С. 41–47.
3. Скаскив О.Б., Шеремета М.Н. *Об асимптотическом поведении целых рядов Дирихле* // Матем.сб. – 1986. – Т.131(173), N 3(11). – С. 385–402.
4. Скасків О.Б. *Про ріст цілих рядів Діріхле нульового порядку за fіттом* // Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1985. – Вип. 24. – С. 36–39.
5. Скаскив О.Б. *Обобщение малой теоремы Пикара*// *Теория функций, функцион. анализ и их прилож.* (Харьков). – 1986. – Вып. 46. – С. 90–100.
6. Скасків О.Б. *Припущення Макінтайра про відсутність скінченних асимптотичних значень у цілої функції з лакунами Фейєра* // Вісн.Львів.ун-ту, сер.мех.-мат. – 1987. – Вип.28. – С.80–81.
7. Скаскив О.Б., Шеремета М.Н. *Об асимптотическом поведении целых рядов Дирихле* // Исследов. по комплексн.анализу. Межвуз. науч. сб. – Уфа: БФАН СССР, 1987. – С. 206–217.
8. Скаскив О.Б. *К предположению Пойа о минимуме модуля целой функции, представленной лакунарным степенным рядом* // Тру-

ды 3-ей Саратов.зимн.школы. Межвуз.науч.сб., ч.3.: Изд. Саратов. ун-та, 1988. – С. 51–53.

9. Скасків О.В. *Про поведінку максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле* // Доп. АН УРСР, сер. А. – 1988. – N 8. – С. 19–21.
10. Скасків О.В. *Про наявність виняткових значень у співвідношенні типу Бореля для цілих рядів Діріхле* // Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1988. – Вип. 30. – С. 53–54.
11. Скаскив О.В. *К теореме Вимана о минимуме модуля аналитической в единичном круге функции* // Изв. АН СССР, сер.матем.- 1989. – Т.53, N 4. – С. 833–850.
12. Скаскив О.В. *О теореме типа Бореля для ряда Дирихле, имеющего нулевую абсциссу абсолютной сходимости* // Укр.мат.ж. – 1989. – Т.41, N 11. – С. 1532–1541.
13. Скаскив О.В., Сорокивский В.М. *О росте на горизонтальных лучах аналитических функций, представленных рядами Дирихле* // Укр.мат.ж. – 1990. – Т.42, N 3. – С. 363–371.
14. Скаскив О.В. *О росте в полуполосах аналитических функций, представленных рядами Дирихле* // Укр.мат.ж. – 1993. – Т.45, N 5. – С. 681–693.
15. Скасків О.В.*Про центральний показник абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле* // Мат.студії. Праці Львів. мат. т-ва. – 1993. – Вип. 2. – С. 35–40.
16. Скаскив О.В. *О минимуме модуля суммы ряда Дирихле с ограниченной последовательностью показателей* // Мат.заметки. – 1994. – Т.56, N 5. – С. 117–128.
17. Скаскив О.В. *Обобщенное соотношение Бореля для целых рядов Дирихле.* – Міжнародна матем. конф. присв'ячена пам'яті Ганса Гана (10 – 15 жовтня 1994 р., Чернівці): тези доповідей. – Чернівці: Рута, 1994. – С. 134.
18. Skaskiv O.B. *On the Polya conjecture concerning the maximum and minimum of the modulus of an entire functions of finite order given by a lacunary power series* // Anal.Math. – 1990. – V.16, N 2. – P. 143–157.

Основні положення, які виносяться на захист. 1. Зв'язок між максимумом модуля і максимальним членом рядів Діріхле зовні виняткових множин. Узагальнення теорем Бореля і Шеремети. 2. Мінімум і максимум модуля функцій, зображених рядом Діріхле. Узагальнення теорем Фентона і Вімана. 3. Критеріальне узагальнення теореми Фукса про гіпотезу Пойа. 4. Нове узагальнення теореми Пікара. Гіпотеза Островського.

Скаскив О.Б. Асимптотические свойства аналитических функций, представленных степенными рядами и рядами Дирихле.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико–математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ. Львовский государственный университет, Львов, 1996.

Для рядов Дирихле абсолютно сходящихся в полуплоскости разработан аналог классического метода Вимана-Валирона. Изучено асимптотическое поведение таких рядов и целых рядов Дирихле, при этом получены решения известных задач как во внутренней теории таких рядов, так и в приложениях. Исследованы асимптотические свойства рядов Дирихле с монотонными коэффициентами. Получено новое обобщение теоремы Пикара.

Skaskiv O.B. Asymptotic behaviours analytical functions represented by power series and by Dirichlet series.

The Doctor's Degree (Physics and Mathematics) thesis in speciality 01.01.01 – mathematical analysis, Lviv State University, Lviv, 1996.

For Dirichlet series absolutely convergent in half-plane, an analogue of classical Wiman-Valyron method is developed. Asymptotic behaviours of such series and entire Dirichlet series is studied. Furthermore, the solutions of well-known problems, both in the internal theory of such series and in applications, is obtained. The asymptotic properties of Dirichlet series with monotone coefficients are investigated. A new generalization of the Picard theorem is obtained.

Ключові слова: ціла функція, аналітична функція, ряд Діріхле, лакунарний степеневий ряд, метод Вімана-Валірона.

Підписано до друку 1.03.96. Формат 60х84/16. Папір друк. № 1.
Друк офсетн. Умовн.друк.арк.2,0. Умовн.фарб.відб.2,0.
Обл.вид.арк. 2,2. Тираж 100. Зам. 47.

Машинно-офсетна лабораторія Львівського держуніверситету
ім. І.Франка. 290602 Львів, вул. Університетська, 1.