

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

КОМАРНИЦЬКИЙ Микола Ярославович

**ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ
КЛАСІВ КІЛЕЦЬ ТА МОДУЛІВ, ВИЗНАЧЕНИХ
СКРУТОМ АБО РАДИКАЛОМ**

01.01.06 - алгебра та теорія чисел

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

КИЇВ - 1996



Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Львівському державному університеті ім. Ів.Франка

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук,
професор Кириченко В.В.,
доктор фізико-математичних наук,
професор Міхальов О.В.,
академік АН Молдови
доктор фізико-математичних наук,
професор Рябухін Ю.М.

Провідна організація - Ужгородський державний університет.

Захист відбудеться "19" квітня 1996 року о 14 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 01.01.01 при Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 252127 Київ - 127, проспект Академіка Глушкова 6, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці університету /вул.Володимирська, 62/.

Автореферат розісланий "1" БЕРЕЗНЯ 1996 року.

Вчений секретар
спеціалізованої ради

Овсієнко С.А.

ЛНБ ім. В. Стефаніка
АН України

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Поява можливості використання логічних мов першого порядку і, взагалі, логічних методів в алгебрі відноситься до початку 20-го століття. Перші важливі результати в цій галузі, що знаходяться на межі математичної логіки і алгебри, були одержані російським алгебраїстом А.І.Мальцевим. Доведений ним факт існування напівгруп, які не вкладаються в жодну групу, показав силу і ефективність застосування методів математичної логіки [1].

Паралельно, методи математичної логіки розвивались у США. Започаткував їх Альфред Тарський, який між іншим, деякий час працював у Львові; він є одним з представників Львівсько-Варшавської філософської школи. Серед його ранніх результатів відмітимо такі: клас алгебраїчно-замкнених полів аксіоматизований, але не скінчено-аксіоматизований; будь-які два дійсно-замкнені поля елементарно-еквівалентні, тобто теорія таких полів є повною.

Поступово логічні методи застосовувались все частіше, а область їх використання швидко розширювалась. Так виник самостійний розділ математики - теорія моделей, яка в даний час налічує в своєму активі більше десятка монографій. В Росії розвиток теорії моделей в значній степені зобов'язаний працям А.І.Мальцева, Ю.Л.Єршова, А.Д.Тайманова, І.А.Лаврова, Е.А.Палютіна, Л.Л.Максімової та їх учнів. Досягнення російської школи теорії моделей в ранній період дуже добре відображені в оглядовій статті [2], де підведено підсумок розвитку алгоритмічного напрямку в теорії моделей до 1963 року. Треба відмітити, що ця стаття дала новий поштовх для активізації пошукових робіт, оскільки в ній поставлено ряд проблем

перспективного характеру.

За кордонами колишнього Радянського Союзу на цей час виникло ряд молодих наукових шкіл теорії моделей, серед яких найбільш яскравою була школа Абрахама Робінсона в США, яка стала засновником перлини теорії моделей - нестандартного аналізу. Сильна школа теорії моделей виникла в Польщі на батьківщині А.Тарського. Тут працювали такі яскраві математики як А.Мостовський, Р.Сікорський, С.Риль-Нардзевський, Є.Лось, Г.Расьова, В.Шмельова, та інші. На Україні, на жаль, теорія моделей розвивалась слабо.

В наш час теоретико-модельні методи притягують увагу багатьох математиків, зокрема алгебраїстів, які працюють в галузі теорії кілець та модулів і в галузі теорії абелевих груп. Це зумовлено тим, що в теорії моделей виник цілий ряд понять, які є природними узагальненими класичних алгебраїчних понять з теорії полів, теорії груп, теорії ґраток, топології і т.д. і які дозволяють проводити паралель з названими теоріями в дослідженнях інших віток алгебри. Серед таких понять відмітимо лише одне - поняття модельного поповнення теорії, яке має своїм прототипом зв'язок теорії полів з теорією алгебраїчно-замкнених полів.

З іншого боку, в теорії кілець та модулів виникла важлива вітка - теорія радикалів і скрутів. Ця теорія бере свій початок з роботи П.Габрієля [3], і швидко розвивається. За короткий час надзвичайно багато напрацьовано, одна за одною виходять монографії [4], [5], [6], [7] і інші. І ці два напрямки не могли не перетнутися.

Першою роботою, де вивчались абелеві групи з логічної точки зору, була фундаментальна в даному напрямку стаття Шмельової [8]. Інтенсивне вивчення різних класів модулів,

що відіграли важливу роль в розвитку гомологічної алгебри методами теорії моделей починається з роботи П.Екклофа та Г.Саббаха [9], яка вже стала класичною. В цій роботі розв'язане питання про аксіоматизованість класу ін'єктивних модулів, значення яких для гомологічної алгебри важко переоцінити. Виявилось, що аксіоматизованість класу ін'єктивних модулів рівносильна нетеровості основного кільця. Там також встановлено, що теорія модулів володіє модельним поповненням тоді і тільки тоді, коли основне кільце когерентне. Ці результати показують, що більшість важливих класів модулів над довільним кільцем, як правило, не можуть задаватися аксіоматично, а тому важливо знати при яких обмеженнях на кільце ці класи модулів стають аксіоматизованими. Справді, якщо клас модулів аксіоматизований, то до нього можна застосувати весь арсенал здобутків теорії моделей. Із загальних міркувань звичайно ясно, що ці умови повинні бути умовами скінченності, але абсолютно не ясно, якими саме. В даний час теоретико-модельні методи теорії модулів починають проникати навіть у теорію зображень алгебр [10].

Для різноманітних класів кільця питання про аксіоматизованість не стояло так гостро, як для класів модулів. Але ряд результатів в цьому напрямку варто відмітити.

Перш, ніж назвати деякі з цих результатів, нам потрібно пояснити ще один логічний термін - "визначальність" (definability). Визначальні класи описуються формулами мови $L_{\omega_1\omega}$, в якій побудова формул ведеться так само як у випадку мови першого ступеня $L_{\omega\omega}$, з тією відмінністю, що допускаються злічені кон'юнкції і диз'юнкції, а навішування кванторів фінітарне. Коли використовується ця логічна мова, то кажуть, що клас алгебраїчних структур є визначальним, якщо він співпадає з кла-

сом моделей однієї формули мови $L\omega_1\omega$. Якщо на потужність множини формул, диз'юнкція чи кон'юнкція яких записується у матриці формули, не накладається жодних обмежень, то кажуть про $L_{\infty}\omega$ - визначальність. Очевидно, що аксіоматизовні класи є $L_{\infty}\omega$ - визначальними. Еклоф і Саббах в [11] встановили $L\omega_1\omega$ - визначальність таких класів кілець: клас факторіальних кілець; клас областей головних ідеалів; клас дедекіндових областей; клас класично-напівпростих кілець; клас артінових кілець; клас когерентних кілець; клас напівдосконалих кілець. Більше того, вони показали, що класи напівспадкових кілець, Прюферових кілець і кілець нормування аксіоматизовні. Проте класи кілець головних лівих ідеалів і нетерових кілець не є $L_{\infty}\omega$ - визначальними, а, отже, і не є аксіоматизовними.

В даній дисертації неявно розглядається питання про аксіоматизовність класу V -кілець. В загальній постановці ця задача зараз ще не може бути до кінця розв'язана, оскільки ще не розвинуті потрібні методи дослідження цього класу кілець. Разом з тим про цей клас кілець є багато відомостей, які, правда, виглядають фрагментарно. Нагадаємо, що V -кільцем називається асоціативне кільце з одиницею, над якими всі прості ліві і всі прості праві модулі є ін'єктивними. Як довів І.Капланський комутативне кільце є V -кільцем тоді і тільки тоді, коли воно регулярне в сенсі Неймана. Тому, клас комутативних V -кілець є навіть скінченно-аксіоматизовним. Приклад V -області головних ідеалів, побудований Л.А.Койфманом [12] і Дж.Коззенсом [13] показав, що некомутативний випадок абсолютно не схожий на комутативний. В зв'язку з цим прикладом виникло ряд питань про властивості V -кілець, а вірніше, про існування V -кілець з певними властивостями. В 1975 році вийшла монографія К.Фейса і Дж.Коззенса "Прості нетерові

кільця" [14], в якій викладені всі факти про V -кільця, відомі на момент виходу книги. Разом з тим, там поміщено список відкритих питань. Більшість з цих питань на даний час розв'язані. Довгий час залишалась відкритою проблема (N9): чи буде злічення ультрастепенів V -області Койфмана-Коззенса відносно злічення неповного ультрафільтру над множиною натуральних чисел знову V -областю. Тепер вона розв'язана позитивно і становить основний результат глави III даної дисертації. Важкість проблеми полягала ось в чому. Як відомо, Міхлер і Вільямейор [15] довели, що умова бути лівим V -кільцем еквівалентна тому, що кожний лівий ідеал кільця є перетином максимальних лівих ідеалів, а це еквівалентно тому, що радикал Джекобсона кожного лівого модуля є нульовим. Тому, проблема гальмувалась відсутністю інформації про ідеали в ультрадобутках кілець. Деякі незначні факти про найпростіші з ідеалів в ультрадобутках можна знайти в статтях різних авторів. Найбільш повний опис ідеалів в ультрадобутках кілець алгебраїчних чисел отримав Г. Черлін [16]. Для некомутативного випадку авторові не відома жодна робота, де б описувались ліві чи праві ідеали в ультрадобутках (ультрастепенях) некомутативних кілець. Зауваживши певну аналогію ультрадобутків кілець з кільцями функцій, за модель підходу до описання ґратки ідеалів ультрадобутків кілець автор взяв теорію ідеалів кілець мероморфних функцій, побудовану Алінгом [17]. Побудоване в дисертації описання лівих ідеалів і максимальних лівих ідеалів дозволило довести, що кожний лівий ідеал в ультрастепені кільця Койфмана-Коззенса відносно злічення неповного ультрафільтру над множиною натуральних чисел є перетином деякої сім'ї максимальних лівих ідеалів.

Як і у всякій галузі математики, в теорії моделей модулів виникає питання про найпростіші форми аксіом, якими задаються ті чи інші класи кілець чи модулів. Спрощення формул в мові теорії модулів вперше зацікавило Преста [18], де він пояснив проблему у найпростішому випадку, коли кільце є комутативною областю головних ідеалів.

Справа в тому, що можливість діагоналізації матриць над тим чи іншим кільцем приводить до суттєвого спрощення формул.

Задача про діагоналізацію матриць є класичною. Зауважимо, що діагоналізація здійснюється домноженням даної матриці на оборотні матриці зліва і справа, а самі матриці можуть бути прямокутними. Розв'язанням цієї задачі займалися відомі алгебраїсти минулого і сучасності. Серед них відмітимо С.Аміцура, Б.ван дер Вардена, Д.Веддербарна, Н.Джекобсона, П.С.Казімірського, І.Капланського, П.Кона, Г.Смітта, О.Тейхмюллера, О.Хелмера.

В дисертації зроблена спроба зосередитись на формі Смітта матриць і підібрати таку, яка б для якомога ширшого класу некомутативних кілець Безу давала б можливість отримати критерій типу критерію Капланського [19].

Відмітимо, що результати автора включені в огляд [20]. Ряд результатів також відмічені в монографіях [6], [7], [18]. Звернемо увагу також на препринт [21] Джонатана Голана, в якому він пропонує назвати один клас скрутів S -скрутами Комарницького.

Викладені вище міркування підтверджують актуальність, виконаних в дисертації досліджень і що дана тематика є достатньо популярною ділянкою досліджень.

Мета роботи:

- провести систематичне дослідження теоретико-модельних властивостей радикальних та напівпростих класів заданого напівскруту, скруту або радикалу в категорії модулів над асоціативним кільцем;
- описати ґратку лівих ідеалів ультрадобутку сім'ї лівих V -областей Безу;
- розв'язати проблему Коззенса-Фейса про ультрастепінь V -областей головних ідеалів, поставлену в 1975 році;
- провести систематичне дослідження класу кілець елементарних дільників з метою застосування одержаних результатів до задачі про спрощення формул теорії модулів першого порядку.

Методика досліджень. В дисертації використовуються поняття і методи теорії моделей, загальної теорії кілець і модулів, теорії категорій та нестандартного аналізу.

Наукова новизна і практичне значення. Результати, отримані в дисертації, є новими і можуть бути корисними для математиків, які цікавляться теорією радикалів, теорією моделей, загальною теорією кілець та модулів, арифметичною теорією ідеалів в нестандартних моделях кілець алгебраїчних чисел та алгебраїчних функцій. Ряд запропонованих конструкцій можна використати при викладанні загальних і спеціальних курсів з алгебри. Всі одержані в дисертації факти мають загально-теоретичний характер і прямого практичного впровадження їх у виробничій сфері не передбачається.

Апробація роботи. Результати дисертації неодноразово доповідались на Львівському міському алгебраїчному семінарі, на алгебраїчних семінарах в Київському, Московському і Ужгородському університетах, на алгебраїчному семінарі Ін-

ституту математики з ОІ Молдови, на алгебраїчному семінарі Братиславського університету, доповідались або були представлені на всіх всесоюзних алгебраїчних конференціях та симпозіумах з теорії кілець, алгебр і модулів, починаючи з 1976 року. Вони також доповідались на міжнародних алгебраїчних конференціях в Новосибірську, Барнаулі та Казані. Ряд фактів і конструкцій, одержаних в дисертації, використовувались при читанні загальних та спеціальних курсів з алгебри у Львівському університеті.

Публікації. Результати дисертації опубліковані в роботах: [24-43].

Об'єм і структура роботи: Загальний обсяг дисертації становить 270 сторінок машинопису. Дисертація складається зі вступу та чотирьох розділів, розбитих на параграфи. Список літератури містить 298 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ

В нульовому параграфі, для повноти викладу, зібрані необхідні означення та факти, які використовуються в дисертації.

У першій і другій главах розв'язуються питання про аксіоматизованість класів модулів над асоціативним кільцем.

Нехай σ - скрут в категорії лівих A -модулів над кільцем A , яке завжди припускається асоціативним і з одиницею. Цю категорію позначатимемо через $A - mod$.

Позначимо через T_σ клас σ -періодичних модулів, а через \mathcal{F}_σ - клас σ -напівпростих модулів. Символ \mathcal{E}_σ використовуватиметься для позначення радикального (або передрадикального у випадку передскруту) фільтру скруту σ .

Якщо радикальний фільтр \mathcal{E}_σ володіє базою, що складається із скінченнопороджених лівих ідеалів, то кажуть, що скрут σ

є скрутом скінченного типу. Нагадаємо, що лівий модуль M називається σ -скінченнопородженим, якщо він містить такий скінченнопороджений підмодуль N , що M/N є σ -періодичним. Якщо M є скінченнопородженим лівим A -модулем і для будь-якої скінченної системи твірних x_1, \dots, x_n модуля M канонічний гомоморфізм $f: A^n \rightarrow M$ заданий за правилом

$$f((a_1, \dots, a_n)) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$$

має σ -скінченнопороджене ядро, то модуль M називатимемо σ -скінченно зображуваним.

В § 1.1 описані скрути з аксіоматизованим класом σ -нашів-простих модулів \mathcal{F}_σ , а також напередскрути з аксіоматизованим класом σ -періодичних модулів \mathcal{T}_σ . Це становить суть першого важливого результату дисертації:

Теорема 1.2. *Нехай σ - скрут в категорії $A - \text{Mod}$. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

- 1) Клас \mathcal{F}_σ замкнений відносно ультрастепенів;
- 2) Клас \mathcal{F}_σ замкнений відносно фільтрованних добутків;
- 3) Клас \mathcal{F}_σ замкнений відносно ультрадобутків;
- 4) Клас \mathcal{F}_σ замкнений відносно переходу до прямих (індуктивних) границь;
- 5) Клас \mathcal{F}_σ аксіоматизований;
- 6) Клас \mathcal{F}_σ універсально аксіоматизований;
- 7) Клас \mathcal{F}_σ є квазімногovidом;
- 8) Клас \mathcal{F}_σ задається системою квазітотожностей, кожна з яких має вигляд: $(\forall x)(\lambda_1x = 0 \ \& \ \dots \ \& \ \lambda_nx = 0 \rightarrow x = 0)$, де $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in A$ і $A\lambda_1 + \dots + A\lambda_n \in \mathcal{E}_\sigma$;
- 9) Скрут σ є скрутом скінченного типу.

Відмітимо, що теорема 1.2 анонсована автором в 1977 році, [34]. В 1978 році еквівалентність умов 2), 5) і 9) незалежно встановлена також Престом [22].

Нагадаємо, що напередскрут в категорії модулів називається Джансовим (або, в іншій термінології, радикально напівпростим [4]), якщо його напередрадикальний фільтр володіє базою, що складається з одного лівого ідеалу.

Сформулюємо другий важливий результат дисертації

Теорема 1.5. *Нехай σ - напередскрут в категорії $A - \text{Mod}$.*

Тоді наступні твердження еквівалентні:

- 1) Клас T_σ аксіоматизований;
- 2) Клас T_σ є многовидом;
- 3) Клас T_σ задається сукупністю тотожностей:

$$\{(\forall x)(\lambda x = 0) / \lambda \in I_0 = \bigcap_{I \in \mathcal{E}_\sigma} I\};$$

- 4) Клас T_σ є ультразамкненим;
- 5) Клас T_σ замкнений відносно прямих добутків;
- 6) Напередрадикальний фільтр \mathcal{E}_σ замкнений відносно довільних перетинів сімейства лівих ідеалів;
- 7) Напередскрут σ є Джансовим.

В другому параграфі розв'язане питання про аксіоматизованість класу σ -абсолютно чистих модулів, а для стабільного скруту отримані необхідні і достатні умови аксіоматизованості класу σ -ін'єктивних σ -періодичних модулів. Основний результат глави є такий:

Теорема 1.12. *Нехай σ - скрут в категорії $A - \text{Mod}$. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

- 1) Клас σ -абсолютно чистих модулів є аксіоматизованим;
- 2) Клас σ -абсолютно чистих модулів є ультразамкненим;
- 3) Скрут σ є скрутом скінченного типу і кожний скінченнопороджений лівий ідеал радикального фільтру \mathcal{E}_σ скруту σ є σ -скінченнозображуваним;

- 4) Радикальний фільтр \mathcal{E}_σ скруту σ володіє базою, що скла-

дається з σ -скінченнозображуваних лівих ідеалів.

Ця теорема є аналогом теореми Саббаха, яка стверджує, що клас звичайних абсолютно чистих модулів є аксіоматизованим тоді і лише тоді, коли кільце є когерентним. Відмітимо також, що еквівалентність тверджень 1), 2) і 4) отримана також Престом ([22], теорема 2.6) з тією різницею, що він вимушений умову скінченності тишу скруту постулювати, тоді як наша теорема не має цього педоліку.

Нагадаємо, що скрут в категорії модулів називається стабільним, якщо його періодичний клас є замкненим відносно ін'єктивних оболонок.

Теорема 1.14. *Нехай σ -стабільний скрут в категорії $A - Mod$. Клас σ -періодичних σ -ін'єктивних модулів аксіоматизований тоді і тільки тоді, коли скрут σ є Джансовим, а його радикальний фільтр задовольняє умову обриву зростаючих ланцюгів лівих ідеалів.*

У другій главі розв'язується питання про аксіоматизованість деяких класів модулів, заданих радикалом, який не обов'язково є скрутом.

У § 4 знайдені необхідні і достатні умови аксіоматизованості напівпростого класу радикалу над дуобластю головних ідеалів. З цих умов випливає, що в категорії абелевих груп напівпрості класи радикалів аксіоматизовані лише у випадку скрутів.

В наступних параграфах більш повно вивчається поняття I -радикала, яке раніше ввів і досліджував О.Л.Горбачук. Нагадаємо, що радикал τ називається I -радикалом, якщо його радикальний клас визначається рівністю

$$T_I = \{M/M \in A - Mod, IM = M\},$$

де I - деякий фіксований лівий ідеал кільця A . Якщо I - лівий ідеал кільця A і система лівих ідеалів

$$\mathcal{E}_I = \{K \in \mathcal{L}(A) / K + I = A\}$$

є радикальним фільтром, то скрут, який йому відповідає, називається I -скрутом. Лівий ідеал I кільця A називається T -нільпотентним зліва, якщо для будь-якої послідовності $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ елементів з I існує таке натуральне n , що $a_1 a_2 \dots a_n = 0$.

У § 5 доведено критерій того, щоб I -радикал був скрутом.

Основний результат § 6 полягає в описанні I -радикалів з аксіоматизованим напівпростим класом.

Нагадаємо, що кільце A досконале зліва, якщо $A/J(A)$ є класично напівпростим, а $J(A)$ - T -нільпотентний зліва.

Теорема 2.19. *Нехай A - дуокільце. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

- 1) Напівпростий клас будь-якого радикалу в категорії $A\text{-Mod}$ є аксіоматизованим;
- 2) Радикальний клас будь-якого радикалу в категорії $A\text{-Mod}$ є аксіоматизованим;
- 3) Радикальний і напівпростий клас будь-якого радикалу є многовидами;
- 4) Всі радикали (і всі скрути) в категорії $A\text{-Mod}$ є I -радикалами (I -скрутами).
- 5) Всі скрути в категорії $A\text{-Mod}$ є Жансовими;
- 6) Кільце A є скінченною прямою сумою локальних досконалих кілець.

Теорема 2.19 є основним результатом другої глави.

Перейдемо до характеризації результатів III глави дисертації. Якщо говорити в загальному, то в ній описується гратка лівих ідеалів в ультрадобутку V -областей Безу відносно зліченно неповних ультрафільтрів і розв'язується проблема Коззенса-Фейса про зліченну ультрастепені V -області головних ідеалів. Нагадаємо, що ультрафільтр над множиною називається

вається зліченно неповним, якщо існує зліченна сім'я множин з цього ультрафільтру, перетин якої не належить до ультрафільтру. Нехай T_i - кільце Койфмана-Коззенса, тобто область лінійних диференціальних операторів від однієї диференціальної змінної з коефіцієнтами з деякого універсального диференціального поля характеристики нуль. Нехай далі, \mathcal{D} - зліченно неповний ультрафільтр над \mathbb{N} . Тоді проблема 9 книги [14] формулюється так: чи буде область $\prod_{i \in \mathbb{N}} T_i / \mathcal{D}$ лівою V -областю або PCI -областю (PCI -область - це область над якою всі власні циклічні модулі є ін'єктивними) ?

Друга частина питання розв'язується негативно завдяки результату Доміано, згідно з яким, кожна ліва PCI -область є нетеровою зліва.

Перша частина питання розв'язується позитивно, як буде видно з викладеного нижче. § 3.1 присвячений вивченню поведінки загальних властивостей ідеалів при переході до ультрадобутків кілець. Основний результат параграфу - це наслідок 3.5, який стверджує, що кожний головний лівий ідеал в ультрадобутку лівих V -областей відносно нетерового ультрафільтру є перетином максимальних лівих ідеалів. Оскільки скінченні перетини максимальних ідеалів володіють нескоротними зображеннями, то природньо виявити, чи володіють нескоротними зображеннями у вигляді перетину максимальних лівих ідеалів головні ідеали у лівих V -кільцях? Це питання також розв'язане в цьому параграфі і результатом є:

Твердження 3.6. Нехай $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ - сім'я лівих V -областей головних ідеалів і \mathcal{D} - зліченно неповний ультрафільтр над \mathbb{N} . Тоді кожний ненульовий головний лівий ідеал в кільці $A = (\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i) / \mathcal{D}$ володіє нескоротним зображенням у вигляді перети-

ну деякої сім'ї лівих головних максимальних ідеалів.

Доведення цього результату ґрунтується на використанні поняття нестандартної довжини елемента, введеного в дисертації, і яка є аналогом звичайної довжини елемента області головних ідеалів.

Ми називаємо лівий модуль регулярним, якщо кожний його циклічний підмодуль виділяється прямим доданком.

Крім відмічених в § 3.1 доведений ще такий результат:

Твердження 3.8. *Область головних ідеалів A є V -областю тоді і тільки тоді, коли для кожного ненульового незворотнього елемента $a \in A$ лівий модуль A/aA є регулярним.*

Твердження 3.8 можна ще сформулювати так: область головних лівих ідеалів A є лівою V -областю тоді і тільки тоді, коли для кожного ненульового незворотнього елемента $a \in A$ і кожного його незворотнього дільника b існує такий елемент c , що $Ab + Ac = A$ і $Ab \cap Ac = Aa$.

Задача про зображення довільного лівого ідеалу ультрадобутку V -областей у вигляді перетину максимальних лівих ідеалів є набагато складнішою, ніж для головних ідеалів. В зв'язку з цим в § 3.2 введено поняття природної системи твірних лівого ідеалу області Безу, і встановлене її існування.

Для формулювання результатів параграфу 3.3 введемо такі позначення.

Нехай $\{A_i\}_{i \in \Omega}$ - довільна сім'я лівих V -областей Безу і \mathfrak{D} - неголовний ультрафільтр над Ω . Якщо для кожного $i \in \Omega$ задано лівий максимальний ідеал \mathfrak{M}_i кільця A_i , то лівий максимальний ідеал $\prod_{i \in \Omega} \mathfrak{M}_i / \mathfrak{D}$ називатимемо основним максимальним лівим ідеалом кільця A . Множину всіх основних максимальних лівих ідеалів кільця A позначимо через $Lmspec^{(oc)}(A)$.

Для кожного елемента $a \in A$ нехай $V(a) = \{\mathfrak{M} \in \text{Lmspec}^{(\text{oc})}(A) / a \in \mathfrak{M}\}$. Назвемо $V(a)$ - головною замкненою підмножиною в $\text{Lmspec}^{(\text{oc})}(A)$. Сукупність усіх головних замкнених підмножин в $\text{Lmspec}^{(\text{oc})}(A)$ позначимо через $\mathcal{C}^{(\text{oc})}(A)$.

Підмножина \mathcal{F} в $\mathcal{C}^{(\text{oc})}(A)$ називається Δ -фільтром над $\mathcal{C}^{(\text{oc})}(A)$, якщо виконуються такі умови:

$\Delta\Phi 1$. Для будь-яких $U, V \in \mathcal{F}$ множина $U \cap V \in \mathcal{F}$;

$\Delta\Phi 2$. Для кожної множини $U \in \mathcal{F}$ і для кожної множини $V \in \mathcal{C}^{(\text{oc})}(A)$ із умови $U \subseteq V$ випливає $V \in \mathcal{F}$.

Якщо, крім цього, виконується умова

$\Delta\Phi 3$. $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

то Δ -фільтр \mathcal{F} називається власним Δ -фільтром.

Максимальний серед Δ -фільтрів над $\mathcal{C}^{(\text{oc})}(A)$ називається Δ -ультрафільтром.

Множина $LC^{(\text{oc})}(A)$ всіх Δ -фільтрів над $\mathcal{C}^{(\text{oc})}(A)$ є ґраткою відносно операції перетину Δ -фільтрів та операції взяття найменшого Δ -фільтру, який містить обидва фільтри, що об'єднуються. Тепер наступний основний результат можна сформулювати у такому вигляді

Теорема 3.14. *Відображення $\theta : L(A) \rightarrow LC^{(\text{oc})}(A)$, яке співставляє кожному лівому ідеалу I кільця A Δ -фільтр $\mathcal{F}_I = \{V(r) / r \in I\}$ є ізоморфізмом ґраток і, крім цього, $\theta(I)$ є Δ -ультрафільтром тоді і тільки тоді, коли I є максимальним лівим ідеалом в A .*

У параграфі 3.4 розв'язується проблема Коззенса-Фейса, про яку говорилося раніше. Для цього встановлюється формула, яка задає частину максимальних лівих ідеалів в ультрадобутках V -областей головних ідеалів за допомогою злічених послідовностей атомів, з певними обмеженнями, та ультрафільтрів над множиною натуральних чисел. Потім з одер-

жаних максимальних лівих ідеалів будуть всі інші максимальні ліві ідеали кільця R . Для строгого формулювання результатів введемо позначення. Нехай $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ - послідовність атомів кільця $A = (\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i) / \mathfrak{D}$, де A_i - V -області головних лівих ідеалів і \mathfrak{D} - зліченно-неповний ультрафільтр над \mathbb{N} , яка володіє властивістю $\bigcap_{i=1}^n A p_i \not\subseteq A p_{i+1}$, для кожного $i \in \mathbb{N}$.

Назвемо лівий ідеал кільця A континуально-породженим, якщо він володіє природньою системою твірних потужності континум.

Тоді має місце теорема.

Теорема 3.28. *Кожний континуально-породжений лівий максимальний ідеал кільця A має вигляд $I(p, \mathfrak{F}) = \sum_{U \in \mathfrak{F}} \bigcap_{i \in U} A p_i$, де $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ деяка послідовність атомів кільця A з відміченою вище властивістю, а \mathfrak{F} деякий ультрафільтр над множиною \mathbb{N} .*

Аналогічне описання має місце для довільних континуально-породжених лівих ідеалів кільця A . При цьому досить щоб \mathfrak{F} був фільтром над \mathbb{N} .

Дане уточнення описання ґратки лівих ідеалів кільця $(\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i) / \mathfrak{D}$ дозволяє довести головний результат дисертації.

Теорема 3.31. *Ультрастепені області Коззенса-Койфмана відносно зліченно-неповного ультрафільтру над множиною натуральних чисел є V -областю Безу, яка не є нетеровою ні зліва, ні справа.*

Таким чином встановлено існування не нетерових V -областей Безу, що висуває нові питання про клас V -кілець.

Розглянемо тепер результати глави 4. Основна задача полягає в тому, щоб одержати, по можливості, найширше узагальнення відомих результатів в усіх напрямках, в яких прово-

дились дослідження з теорії елементарних дільників матриць. Це зв'язано, як відмічалось раніше, зі спрощенням формул терії модулів першого порядку. Для викладу одержаних тут результатів нам необхідно нагадати деякі означення.

Нагадаємо, що позитивно-примітивна формула мови першого порядку ${}_A L$ теорії лівих модулів над кільцем A має вигляд

$$\exists y_1 \dots \exists y_l \bigwedge_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x_i r_{ij} + \sum y_k s_{kj} = 0 \right),$$

де x_i, y_j - предметні змінні, а r_{ij}, s_{kj} - унарні функціональні символи, визначені відповідними елементами основного кільця A .

Баур довів, що кожна формула мови ${}_A L$ еквівалентна, за модулем довільної повної теорії модулів, булевій комбінації позитивно-примітивних формул. Позитивно-примітивну формулу можна записати у матричній формі в такий спосіб

$$\exists \bar{y} (\bar{x} \bar{y}) H = \bar{0}, \quad (1)$$

де \bar{x} вектор вільних предметних змінних (x_1, x_2, \dots, x_n) , а $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_l)$ - вектор зв'язаних змінних. Домноження матриці H на оборотно матрицю R справа і вставка між рядком $(\bar{x} \bar{y})$ та матрицею H матриці $S^{-1} S$, де S також оборотна матриця потрібних розмірів, приводить після відповідної заміни змінних до позитивно-примітивної формули

$$\exists \bar{y}' (\bar{x}' \bar{y}') (S H R) = 0. \quad (2)$$

Отримана формула (2) є еквівалентною до формули (1) в сенсі виконуваності і тому спрощення матриць за допомогою перетворень еквівалентності приводить до спрощення формул мови ${}_A L$.

Кільця, над якими кожна (прямокутна) матриця еквівалентна деякій матриці $\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_k, 0, \dots, 0)$, де $A d_{i+1} A \subseteq A d_i \cap d_i A$ для кожного $i = 1, \dots, k - 1$ називаються кільцями елементарних дільників. Над такими кільцями позитивно-примітивні

формули набувають найпростішого вигляду. Вони будуть кон'юнкціями формул вигляду $\exists y(x = ry)$ або $\exists y(ry = 0)$. Дальше спрощення йде за рахунок вдосконалення діагональної форми матриць. В дисертації пропонується проміжна форма редукції між формою Смітта у комутативному випадку та формою Капланського, наведеною вище. Причина цього полягає в тому, що форма Капланського в загальному важко піддається аналізу і, як видно з публікацій, просування в цій галузі алгебраїчних досліджень після Тейхмюллера і самого Капланського не є достатньо вагомими. Наша форма об'єднує в собі два важливих випадки кілець Безу - це прості області Безу і дуокільця Безу.

Ми говоримо, що прямокутна матриця $M = (a_{ij})$ з елементами з кільця A володіє майже інваріантною діагональною редукцією, якщо існують такі оборотні матриці відповідних розмірів над A , скажемо, R і Q , що $RMQ = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_k, 0, \dots, 0)$, де d_1, d_2, \dots, d_{k-1} інваріантні елементи кільця, а d_k не обов'язково інваріантний і d_i є лівим дільником елемента d_{i+1} для кожного $i = 1, \dots, k - 1$. Якщо кожна матриця над A має майже інваріантну діагональну редукцію, то A називається кільцем з майже інваріантними елементарними дільниками.

В дисертації доведено аналог критерію І.Капланського того, щоб кільце було кільцем з майже інваріантними елементарними дільниками.

Теорема 4.1. *Ермітове кільце A є кільцем з майже інваріантними елементарними дільниками тоді і лише тоді, коли кожна матриця розміру 2×2 володіє майже інваріантною діагональною редукцією.*

Зауважимо, що в доведенні І.Капланського відповідної теореми для довільного випадку є неявне припущення про те, що

кожний елемент кільця є повним дільником самого себе, що справедливо лише для інваріантних кілець.

В наступній теоремі поглиблюється цей критерій до кільцевих умов. Точніше, має місце наступний основний результат:

Теорема 4.2. *Нехай A – ермітове кільце, в якому для будь-яких взаємно-простих справа елементів u і v і будь-якого ненульового елемента $a \in A$ з умови $ua = va = 0$ випливає, що u і v є взаємно-простими зліва. Тоді кільце A є кільцем з майже інваріантними елементарними дільниками тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови:*

1) *Для кожного елемента $a \in A$ існує такий елемент $b \in A$, що $aaA = bA = Ab$ (умова Дубровіна);*

2) *Кожний лівий і кожний правий дільник будь-якого інваріантного регулярного елемента є інваріантним елементом.*

Наступний параграф § 4.2 присвячений дослідженню дистрибутивних областей на предмет володіння властивістю бути кільцем елементарних дільників. Тут доведено такий результат:

Теорема 4.10. *Кожна дистрибутивна область елементарних дільників є дуо-областю.*

Зауважимо, що доведення теореми проводиться в загальнішій ситуації, тобто, коли кільце є квазі-дуо-областю елементарних дільників. Даний результат опублікований в роботі [33]. В давній час є більш загальний результат А.А.Туганбаєва [23], який стверджує, що цією властивістю володіє дистрибутивне кільце елементарних дільників з дільниками нуля при певних обмеженнях. Наш результат в доведенні з [23] використовується суттєво і тому ми включаємо його в дисертацію.

Проблематика теорії кілець елементарних дільників не завершена навіть для комутативних областей Безу. Тут вже

давно стоїть проблема: Чи кожна комутативна область Безу є областю елементарних дільників? В §4.3 викладено найновіший результат, який охоплює багато з раніше відомих. Для його формулювання треба навести означення. Ненульовий елемент a області Безу A називається адекватним, якщо для кожного елемента $b \in A$ існують такі елементи $r, s \in A$, що 1) $a = r \cdot s$; 2) $bA + rA = A$; 3) Для кожного $s' \in A$ із включення $sA \subset s'A + A$ випливає, що $bA + s'A \neq A$ (ми кажемо тоді, що s є спорідненим з b).

Терема 4.23. *Нехай A – область Безу, в якій існує така трансфінітна послідовність $\{s_\alpha\}_{\alpha \in [0, \alpha_0)}$ мультиплікативно-замкнених підмножин, що*

1) $\forall \alpha \in [0, \alpha_0)$ кільце $S_\alpha^{-1}A$ містить необоротні адекватні елементи;

2) $\bigcup_{\alpha \in [0, \alpha_0)} S_\alpha^{-1}A = Q$, де Q – поле дробів для A .

Тоді A є областю елементарних дільників.

На завершення відмітимо, що в дисертацію включені лише ті результати автора, які одержані ним самостійно, хоча і опубліковані з співавторами.

Підсумкові висновки. В дисертації досліджене питання про аксіоматизованість ряду важливих класів модулів, визначених скрутом або радикалом. Побудована теорія ідеалів в ультрадобутках V -областей Безу. Одержано повний розв'язок проблеми Коззенса-Фейса про ультрастепені V -областей Койфмана-Коззенса. Введено і досліджено новий клас некомутативних кілець елементарних дільників.

Література

1. Мальцев А.И. О включении ассоциативных систем в группы // Мат. сб., - 1939, - 6, с.331-336.
2. Ершов Ю.Л., Лавров И.А., Тайманов А.Д., Тайцлин М.А. Элементарные теории // УМН, - 1965, - 20, N4, с.37-108.
3. Gabriel P. Des cathégories abeliens // Bull. Soc. Math. France, - 1962, - 90, 323-448.
4. Мишина А.П., Скорняков Л.А. Абелевы группы и модули. - М., "Наука", - 1969, 151 с.
5. Stenström Bo. Rings of quotients. Springer-Verlag, Berlin - New-York, - 1975, 309p.
6. Кашу А.И. Радикалы и кручения в модулях. - Кишинев, "Штиинца", - 1983, 152 с.
7. Golan J.S. Torsion theories // Longman Scientific & Technical, Harlow, - 1986, 651 p.
8. Szmielw W. Elementary properties of abelian groups // Fund. Math., - 1955, - 41, 203-271.
9. Eklof P.C., Sabbagh G. Model completions and modules // Ann. Math. Log., - 1971, - 2, N3, 251-295.
10. Prest M. Model theory and representation type of algebras // "Logic colloquium '86", F.R.Drake and J.K.Truss (editors), Amsterdam, North-Holland, - 1988, 219-260.
11. Eklof P.C., Sabbagh G. Definability properties for modules and rings // Jour. Symbol. Log., - 1971, - 36, 629-649.
12. Койфман Л.А. Кольца, над которыми каждый модуль имеет максимальный подмодуль // Мат. заметки, - 1970, - 7, N3, с.359-367.
13. Cozzens J.H., Homological properties of the ring of differential polynomials // Bull.Amer.Math.Soc., - 1970, - 76, N1, 75-79.
14. Cozzens J., Faith C. Simple Noetherian rings. Cambridge,-1975,135,

15. Michler G.O. Villamayor O.E. On rings whose simple modules are injective // J. Algebra, - 1973, - 25, N1, 185-201.
16. Cherlin G.L. Ideals of integers in nonstandard number fields // in: Model Theory and Algebra, eds D. Saracino and Weisspfenning V. (Springer Lecture Notes, 1975, 498, Berlin), 60-90.
17. Alling N.L. Global ideal theory of meromorphic function fields. // Trans. Amer. Math. Soc., - 1979, - 256, N2, 241-266.
18. Prest M. Model theory and modules // London Math. Soc. Lec. Notes ser. N130, London, - 1988, 380p.
19. Kaplansky I. Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. - 1949, - 66, N3, 464-491.
20. Марков В.Т., Михалев А.В., Скорняков Л.А., Туганбаев А.А. Модули // В сб. "Алгебра. Топология. Геометрия (Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР)", - 1981, - 19, с.31-134.
21. Golan J.S. On S -torsion in the sense of Komarnitskii // University of Haifa, Haifa, Israel, - 1984, Preprint, 1-12
22. Prest M.Y. Some model-theoretic aspects of torsion theories // J. Pure and Appl. Algebra, - 1978, - 12, N3, 295-310.
23. Туганбаев А.А. Кольца элементарных делителей и дистрибутивные кольца // Успехи матем. наук, - 1991, - 46, вып.6, с.219-220.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

24. Комарницький Н.Я. Дуо-кольца, над котрими все кручення являються S -крученнями // В сб. "Алгебры и модули" (Мат. исслед., 1978, вып.48), Кишинев, - "Штиинца", - 1978, с.65-68.
25. Комарницький М.Я. Кручення і квазімноговиди модулів // В зб. "Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосувань", Інститут математики АН УРСР, - Київ, -

- 1978, с.19-21.
26. Комарницкий Н.Я. Об аксиоматизируемости некоторых классов модулей, связанных с кручением // Мат. исслед., - вып.48, - 1980, с.92-109.
 27. Комарницкий Н.Я. Коммутативные адекватные области Безу и кольца элементарных делителей // В сб. "Алгебраические исследования", Институт математики НАН Украины, - Киев, 1995, с.97-113.
 28. Komarnytsky N.Ja. Algebras of Logic // Ordered Set and Lattices. Amer. Mat. Soc. Transl.(2), Vol.152, - 1992, Chapter II, 63-94.
 29. Комарницкий Н.Я., Горбачук Е.Л. Радикальные фильтры в области главных идеалов // Доклады АН УССР, - 1977, Серия "А", N2, с.103-104.
 30. Комарницкий Н.Я., Горбачук Е.Л. I-радикалы и их свойства // УМЖ, - 1978, - 30, N2, с.212-217.
 31. Комарницкий Н.Я., Горбачук Е.Л. Об аксиоматизируемости радикальных и полупростых классов модулей и абелевых групп // УМЖ, - 1982, - 34, N2, с.151-156.
 32. Комарницкий М.Я., Забавский Б.В. Зауваження про адекватні кільця. Вісник Львівського університету, сер. фіз.-мат.,-1987, с.43-45.
 33. Комарницкий Н.Я., Забавский Б.В. О дистрибутивных кольцах элементарных делителей // УМЖ, - 1990, - т.42, N7, с.1002-1004.
 34. Комарницкий Н.Я. Кручения и квазимногообразия модулей // 14-ая Всесоюзная алгебраическая конференция. часть 2, - Новосибирск, - 1977, с.18-19.
 35. Комарницкий Н.Я. Об аксиоматизируемости некоторых классов модулей, связанных с кручением // Вестник МГУ, сер. матем. мех., - 1978, N6, с. 79.

36. Комарницкий Н.Я. Радикалы и кручения в категории абелевых групп с носителями в элементарном топосе // IX Всесоюзный симпозиум по теории групп. - Москва, - 1984, Тезисы докладов, с.211-212.
37. Комарницкий Н.Я. О модельном компаньоне класса ассоциативных колец в элементарном топосе // XVIII Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы сообщений, - Кишинёв, - 1985, с.54.
38. Комарницкий Н.Я. Радикал Джекобсона с интуиционистской точки зрения // Всесоюзный симпозиум по математической логике. Тезисы сообщений. - Москва, - 1986, с.44.
39. Комарницкий Н.Я. Кольца с почти инвариантными элементарными делителями. Международная конференция по алгебре, посвящённая памяти А.И.Мальцева (1909-1967) Тезисы сообщений, - Новосибирск, - 1989, с.70.
40. Комарницкий Н.Я. Кольца с почти инвариантными элементарными делителями и конечно-представимые модули // VI Симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Тезисы сообщений. - Львов, - 1990, с.73.
41. Комарницкий Н.Я. Дуо-кольца, над которыми каждый модуль эквивалентен своей инъективной оболочке // V-Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. - Новосибирск, - 1982, с.84.
42. Комарницкий Н.Я. О решетке правых идеалов ультрапроизведения правых V -областей Безу // Международная алгебраическая конференция памяти А.И.Ширшова, - Барнаул, - 1991, Тезисы докладов, с.54.
43. Комарницкий Н.Я. Характеризация V -областей Безу // Алгебра и анализ. Тезисы докладов международной конференции памяти Н.Чеботарева, ч.1, - Казань, - 1994, с.51-52,

Комарницький Н.Я. Теоретико-модельні властивості класів кілець і модулів, визначених крученням або радикалом. Дисертація на соискання ученої ступені доктора фізико-математических наук по спеціальності 01.01.06 - алгебра і теорія чисел, Київський ун-т, Київ, 1996. Захищається 20 наукових робіт, що містять теоретичні дослідження по теорії кілець і модулів. Встановлюються необхідні і достаточні умови аксіоматизуємості ряду класів модулів, що виникають в теорії радикалів і кручень. Розроблена теорія ідеалів в ультрапроїзведеннях V -областей Безу, яка застосовується до рішення проблеми Коззенса-Фейса об ультрастепені V -області Койфмана-Коззенса. Отримані умови приводимості матриць до майже інваріантної діагональної форми.

Komarnitskii N. Ya. Model-theoretical properties of classes of rings and modules, that are defined by radical torsion. This is a Doctor of Science Thesis (Physics and Mathematics) with specialization in algebra and theory of numbers (code 01.01.06). Kiev University, Kiev, 1996. 20 scientific papers, that contain theoretical studies on the theory of rings and modules, are defended. Necessary and sufficient conditions of elementarity of certain classes of modules, which occur in the radical and torsion theory, have been established. The theory of ideals in ultraproducts of Bezout V -domains, which is used in conclusion of Cozzens-Faith problem on ultrarapower of Koifman-Cozzens V -domain has been developed. Conditions of diagonalization of matrix have been found.

Ключові слова: аксіоматизований клас, скрут, радикал, V -кілець, кілець елементарних дільників, кілець Койфмана-Коззенса, ультрадобуток, ультрастєпень.

Підписаю до друку 26.02.96. Формат 60x84/16. Папір друк. № 1.
Друк офсетн. Умови друк. арк. 2,0. Умови фарб. відб. 2,0.
Обл. вид. арк. 2,2. Тираж 100. Зам. 42.

Машинно-офсетна лабораторія Львівського держуніверситету
Ім. І. Фрашка. 290602 Львів, вул. Університетська, 1.

AB 34.370