МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
Львівський державний університет
ім. Ів.Франка

На правах рукопису

СУСЬ ОЛЬГА МИКОЛАЇВНА

ДЕЯКІ ПИТАННЯ АНАЛІТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ДВОВИМІРНИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ

01.01.01-Математичний аналіз

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів–1996

Дисертація є рукописом.

Робота виконана в Інституті прикладних проблем механіки та математики НАН України

Науковий керівник : кандидат фізико-математичних наук старший науковий співробітник Кучмінська Христина Йосифівна

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук професор КОЗИЦЬКИЙ ЮРІЙ ВАСИЛЬОВИЧ кандидат фізико-математичних наук доцент СТОРОЖ ОЛЕГ ГЕОРГІЙОВИЧ

Провідна організація: Харківський авіаційний інститут ім. М.Є.Жуковського .

Захист відбудеться "18" квітня 1996 року о 15 год.30 хв.на засіданні Спеціалізованої ради Д.04.04.01 при Львівському державному університеті ім. І.Франка за адресою: 290602, м.Львів, вул.Університетська, 1, ауд.377.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Львівського державного університету ім. І.Франка (м.Львів, вул.Драгомановаа, 5).

Автореферат розісланий "13" березня 1996 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради Я.В.Микитюк

АВ-34.577

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність тематики

В зв'язку з розвитком обчислювальної техніки ланцюгові дроби і, тісно пов'язані з ними, наближення Паде, знаходять багаточисельні застосування в обчислювальній математиці і теоретичній фізиці (Дж.Бейкер, П.Грейвс-Моррис "Аппроксимации Паде".–М.: Мир, 1986.–502 с.). Проте, активно ведуться дослідження по самій теорії ланцюгових дробів, про що свідчать праці регулярних міжнародних конференцій ("Nonlinear Numerical Methods and Rational Approximation", University of Antwerp, Belgium, "Ortogonality, Moment Problems, and Continued Fractions", Delft, The Netherlands).

Теорія ланцюгових дробів розвивається в двох напрямках: теоретико-числовому і аналітичному. Різні узагальнення ланцюгових дробів в теоретико-числовому напрямку розглядались Л.Ейлером, К.Якобі, О.Перроном, Г.Ф.Вороним. В аналітичному напрямку таким багатовимірним узагальненням є гіллясті ланцюгові дроби, запропоновані В.Я.Скоробогатько. Деякі часткові випадки гіллястих ланцюгових дробів зустрічались і раніше: в роботі І.Пратьє – при розгляді композиції відображень Жуковського, у В.П.Терських – при дослідженні механічних коливань в валопроводах різних енергетичних установок в суднобудуванні.

Аналітична теорія гіллястих ланцюгових дробів розвивалась, зокрема, в роботах П.І.Боднарчука, Д.І.Боднара, Х.Й.Кучмінської, Annie Cuyt, W.Siemaszko, J.Murphy, M.R.O'Donohoe (Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. - М.: Наука, 1983. – 312 с., Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук.думка, 1986. – 176 с.).

Однією з важливих задач аналітичної теорії гіллястих ланцюгових дробів є розвинення аналітичних функцій у багатовимірні узагальнення ланцюгових дробів, дослідження їх відповідності та збіжності. Х.Й.Кучмінською (1978), J.Murphy і M.R.O'Donohoe (1978), W.Siemaszko

(1980), A.Cuyt і Verdonk (1985), Д.І.Боднаром (1988) були запропоновані алгоритми розкладів кратних степеневих рядів в багатовимірні узагальнення ланцюгових дробів різних конструкцій.

Так як підхідні дроби відповідних багатовимірних узагальнень ланцюгових дробів дають дробово-раціональні наближенныя аналітичних функцій від багатьох змінних, то актуальним є дослідження властивостей, встановлення ознак збіжності, стійкості, оцінок похибок наближень різних кострукцій, запропонованих відповідних гіллястих ланцюгових дробів.

В дисертаційній роботі досліджуються відповідні гіллясті ланцюгові дроби – відповідні двовимірні ланцюгові дроби, введені Х.Й.Кучмінською, J.Murphy і M.R.O'Donohoe.

<u>Метою роботи</u> є розвиток аналітичної теорії двовимірних ланцюгових дробів : дослідження їх елементарних властивостей, встановлення ознак збіжності, абсолютної стійкості, дослідження їх локально-апроксимативних властивостей.

<u>Методика досліджень.</u> В дисертаційній роботі використовуються методи математичного аналізу, теорії функцій комплексної змінної, аналітичної теорії ланцюгових дробів.

<u>Наукова новизна роботи</u> полягає

–у дослідженні властивостей відповідних двовимірних ланцюгових дробів;

–у встановленні достатніх ознак збіжності двовимірних ланцюгових дробів, зокрема, дослідженні різних аналогів теореми Ворпітського;

–у встановленні необхідної ознаки збіжності двовимірних ланцюгових дробів, аналогу теореми Коха;

–у дослідженні найбільшої кругової області абсолютної стійкості;

–у побудові деяких локально-апроксимативних властивостей двовимірних ланцюгових дробів.

Наукова та практична цінність роботи. Робота має теоретичний характер і її результати сформульовані у вигляді теорем. Отримані результати можуть бути використані для подальшого розвитку аналітичної теорії відповідних двовимірних ланцюгових дробів.

Основні положення дисертації, що виносяться на захист

-встановлення аналогів теореми Ворпітського для двовимірних ланцюгових дробів;

-встановлення необхідної ознаки збіжності для двовимірних ланцюгових дробів ;

-дослідження областей абсолютної стійкості та локально-апроксимативних властивостей безумовно збіжних двовимірних ланцюгових дробів.

Особистий вклад дисертанта

Всі наведені в дисертації основні результати одержані самостійно. Із спільних робіт використано лише ті результати, які одержані дисертантом.

Апробація роботи. Результати дисертаційної роботи доповідались на семінарах з аналітичної теорії ланцюгових та гіллястих ланцюгових дробів (керівники: доктор фіз.-мат. наук Д.І.Боднар, та проф. В.Я.Скоробогатько), на школі молодих вчених "Чисельні методи розв'язання задач математичної фізики" (Львів, 1983 р.), на Саратовській зимовій школі по теорії функцій та наближень (1988 р.), на школі "Теорія наближення функцій" (Луцьк, 1989 р.), на міжнародній конференції, присвяченій пам'яті акад. М.П.Кравчука (Київ, 1992 р.), на міжнародній конференції "Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування" (В.Синєвидне, 1994 р.), на Всеукраїнській конференції "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях" (Львів, 1995 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в роботах [1-8].

Структура й обсяг. Дисертація складається зі вступу, 11-ти параграфів, об'єднаних у три розділи, та списку літератури, що містить 64 посилань. Загальний обсяг роботи 123 сторінки.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі дано короткий огляд результатів, що мають безпосереднє відношення до теми роботи, викладено основні результати дисертації.

Перший розділ "Означення та елементарні властивості двовимірних ланцюгових дробів" присвячений вивченню властивостей двовимірних ланцюгових дробів.

В першому параграфі дається означення двовимірних ланцюгових дробів за допомогою дробово-лінійних відображень.

Нехай $\{a_{ij}\}$, $\{b_{ij}\}$, $i, j = 0, 1, \ldots$ -задані послідовності комплексних чисел, причому всі $a_{ij} \neq 0$.

Двовимірним ланцюговим дробом називається послідовність $\{f_n\}$, де

$$f_n = \operatorname*{D}_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \frac{a_{ii}}{b_{ii} + \operatorname*{D}\limits_{j=i+1}^{n-2i-1} \frac{a_{ji}}{b_{ji}} + \operatorname*{D}\limits_{j=i+1}^{n-2i-1} \frac{a_{ij}}{b_{ij}}} \qquad (1)$$

і $[\frac{n-1}{2}]$-ціла частина числа $\frac{n-1}{2}$.

Елементи $a_{ij}, (i, j = 0, 1, \ldots)$ двовимірного ланцюгового дробу (1) називаються частинними чисельниками, а елементи $b_{ij}(i, j = 0, 1, \ldots)$ - частинними знаменниками цього дробу.

Для запису безмежного двовимірного ланцюгового дробу використовуємо позначення

$$\operatorname*{D}_{i=0}^{\infty} \frac{a_{ii}}{b_{ii} + \operatorname*{D}\limits_{j=i+1}^{\infty} \frac{a_{ji}}{b_{ji}} + \operatorname*{D}\limits_{j=i+1}^{\infty} \frac{a_{ij}}{b_{ij}}} \qquad (2)$$

Скінчені двовимірні ланцюгові дроби вигляду (1) називаються n-ими підхідними дробами двовимірного ланцюгового дробу (2) або його n-ими наближеннями.

Звичайні ланцюгові дроби

$$f_1^{(i,j)} = \mathop{\mathrm{D}}_{k=i+1}^{\infty} \frac{a_{k,j}}{b_{kj}}, \quad f_2^{(ij)} = \mathop{\mathrm{D}}_{k=i+1}^{\infty} \frac{a_{j,k}}{b_{jk}}, \quad i,j = 0,1,\ldots$$

називаються одновимірними залишками двовимірного ланцюгового дробу (2). а двовимірний ланцюговий дріб

$$T_m = \mathop{\mathrm{D}}_{i=m}^{\infty} \frac{a_{ii}}{b_{ii} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty} \frac{a_{ji}}{b_{ji}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty} \frac{a_{ij}}{b_{ij}}}$$

називається його загальним залишком.

При вивченні властивостей двовимірних ланцюгових дробів виникла необхідність у введені наближення $\tilde{f}_l$

$$\tilde{f}_l = \mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{[\sqrt{l}-1]} \frac{a_{ii}}{b_{ii} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{[\sqrt{l-2i-1}]} \frac{a_{ji}}{b_{ji}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{[\sqrt{l-2i-2}]} \frac{a_{ij}}{b_{ij}}} \tag{3}$$

$l = 1,2,\ldots$, $[A]$- ціла частина від виразу A .

<u>Означення 1.1.</u> Двовимірний ланцюговий дріб

$$\frac{a_{00}}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j0} z_1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{0j} z_2}{1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{ii} z_1 z_2}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty} \frac{a_{ji} z_1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty} \frac{a_{ij} z_2}{1}} \tag{4}$$

називається відповідним до формального подвійного степеневого ряду

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} q_{ij} z_1^i z_2^j,$$

якщо розвинення його кожного n-ого підхідного дробу $(n = 1,2,\ldots)$

$$f_n(z_1, z_2) = \frac{P_n(z_1, z_2)}{Q_n(z_1, z_2)}$$

$$\frac{a_{00}}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{n-1} \frac{a_{j0} z_1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{n-1} \frac{a_{0j} z_2}{1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{[\frac{n-1}{2}]} \frac{a_{ii} z_1 z_2}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{n-2i-1} \frac{a_{ji} z_1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{n-2i-1} \frac{a_{ij} z_2}{1}} \tag{5}$$

в формальний подвійний степеневий ряд

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} q_{ij}^{n} z_1^i z_2^j, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

співпадає з вихідним рядом до всіх членів степеня $i + j \geq n - 1$.

В другому параґрафі описано клас еквівалентних двовимірних ланцюгових дробів.

Означення 1.2. Двовимірний ланцюговий дріб (2) і двовимірний ланцюговий дріб

$$\mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty} \frac{a_{ii}^*}{b_{ii}^* + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty} \frac{a_{ji}^*}{b_{ji}^*} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty} \frac{a_{ij}^*}{b_{ij}^*}} \tag{6}$$

називаються еквівалентними, якщо співпадають їх підхідні дроби $\tilde{f}_n = \tilde{f}_n^*$, $n = 1, 2, \ldots$, які визначаються за формулою (3).

Теорема 1.1. Двовимірні ланцюгові дроби (1) і (6) у яких $a_{ij} \neq 0$, $a_{ij}^* \neq 0$ еквівалентні тоді і лише тоді, коли існують відмінні від нуля сталі ρ_{ij}, $i, j = 0, 1, \ldots$, $\rho_{-1,-1} = 1$ такі, що виконуються умови

$$\begin{aligned}
a_{ij}^* &= \rho_{ij}\rho_{i-1,j}a_{ij}, & b_{ij}^* &= b_{ij}\rho_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots; \quad j = 0, 1, \ldots \\
a_{ji}^* &= \rho_{ji}\rho_{j,i-1}a_{ji}, & b_{ji}^* &= b_{ji}\rho_{ji}, \quad i = 1, 2, \ldots; \quad j = 0, 1, \ldots \\
a_{ii}^* &= \rho_{ii}\rho_{i-1,i-1}a_{ii}, & b_{ii}^* &= b_{ii}\rho_{ii}, \quad \rho_{-1,-1} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}$$

В цьому параґрафі показано, що підбираючи сталі $\rho_{ij}, (i, j = 0, 1, \ldots)$, $\rho_{-1,-1} = 1$ певним чином, двовимірний ланцюговий дріб (2) можна звести до двовимірного ланцюгового дробу з частинними знаменниками, рівними 1

$$\mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty} \frac{c_{ii}}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty} \frac{c_{ji}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty} \frac{c_{ij}}{1}} \tag{7}$$

та до двовимірного ланцюгового дробу з частинними чисельниками, рівними 1

$$\mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty} \frac{1}{d_{ii} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{d_{ji}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{d_{ij}}} \tag{8}$$

В **третьому параґрафі** встановлюються різні типи формул різниці між підхідними дробами (1) двовимірного ланцюгового дробу (2).

Алгоритм перетворення подвійного степеневого ряду у відповідний двовимірний ланцюговий дріб, аналог методу Вісковатова, побудовано в **четвертому параґрафі** цього розділу.

Другий розділ "Збіжність двовимірних ланцюгових дробів" присвячений вивченню збіжності відповідних двовимірних ланцюгових дробів з комплексними елементами. В основу дослідження збіжності покладено формулу різниці між підхідними дробами двовимірного ланцюгового дробу. Ця формула оцінюється за абсолютною величиною і за одержаною нерівністю робиться висновок про збіжність чи розбіжність двовимірного ланцюгового дробу.

Означення 2.1. Двовимірний ланцюговий дріб (2) називається збіжним, якщо існує та скінчена границя послідовності його n-их підхідних дробів (1) при $n \to \infty$.

Означення 2.2. Двовимірний ланцюговий дріб (2) називається безумовно збіжним, якщо для всіх $k \geq i+1, \quad i = 0, 1, \ldots$ ланцюгові дроби

$$\mathop{\mathrm{D}}_{j=k}^{\infty} \frac{a_{ji}}{b_{ji}}, \qquad \mathop{\mathrm{D}}_{j=k}^{\infty} \frac{a_{ij}}{b_{ij}}, \quad i = 0, 1, \ldots$$

є збіжними і для всіх $m \geq 0$ двовимірні ланцюгові дроби

$$\mathop{\mathrm{D}}_{i=m}^{\infty} \frac{a_{ii}}{b_{ii} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty} \frac{a_{ji}}{b_{ji}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty} \frac{a_{ij}}{b_{ij}}}$$

є також збіжними.

Означення 2.3. Функціональний двовимірний ланцюговий дріб (4) рівномірно збігається на деякій множині $E \subset D$, якщо, починаючи з деякого номера n_0 всюди на E $Q_k(z_1, z_2) \neq 0$ $(k \geq n_0)$ і для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер $n_1 \geq n_0$, що для всіх $n, m \geq n_1$ і довільних $z_1, z_2 \in E$ виконується нерівність $|f_n(z_1, z_2) - f_m(z_1, z_2)| < \varepsilon$.

В **першому параґрафі** сформульовано і доведено теорему

Теорема 2.1. Двовимірний ланцюговий дріб (7), частинні чисельники c_{ij}, $(i,j=0,1,\ldots)$ якого задовольняють нерівності

$$|c_{ii}|\le\frac{1}{8},\quad |c_{i+1,i}|\le\frac{1}{16},|c_{i,i+1}|\le\frac{1}{16},\quad i=0,1,\ldots$$

$$|c_{i+k,i}|\le\frac{1}{4},|c_{i,i+k}|\le\frac{1}{4},\quad k\ge2,\quad i=0,1\ldots$$

є збіжним.

В **параграфі 2** встановлено необхідну ознаку збіжності для двовимірних ланцюгових дробів вигляду (8), анаалог теореми Коха для ланцюгових дробів.

Теорема 2.2. Якщо у двовимірному ланцюговому дробі (8), всі

$$\Phi_i=d_{ii}+\mathop{\mathrm{D}}_{j=i+1}^{\infty}\frac{1}{d_{ji}}+\mathop{\mathrm{D}}_{j=i+1}^{\infty}\frac{1}{d_{ij}}\qquad(i=0,1,\ldots)$$

є збіжні та

$$|\Phi_i^{(n-2i-1)}|=|d_{ii}+\mathop{\mathrm{D}}_{j=i+1}^{n-2i-1}\frac{1}{d_{ji}}+\mathop{\mathrm{D}}_{j=i+1}^{n-2i-1}\frac{1}{d_{ij}}|\le B_i,\quad n=1,2,\ldots,\quad i=0,1,\ldots$$

а також

$$\sum_{i=0}^{\infty}B_i<\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty}|\Phi_i^{(m-2i-1)}-\Phi_i^{(n-2i-1)}|=0,\qquad m>n,$$

то такий двовимірний ланцюговий дріб є розбіжним.

В **третьому параґрафі** досліджується збіжність до функції її формального розвинення у відповідний двовимірний ланцюговий дріб вигляду (4).

Теорема 2.3. Якщо функція $f(z_1,z_2)$ в області

$$D_M=\{z\in\mathbb{R}^2,|z_1|\le M,\qquad|z_2|\le M,\qquad|z_1z_2|\le M\}$$

де M-додатня стала, має розвинення у двовимірний ланцюговий дріб (4) елементи якого задовольняють умову $|a_{ij}|\le\frac{\beta}{M}$, $\beta\le\frac{1}{8}$, $i,j=$

$0, 1, \ldots$, а залишки $f_1^{(n-2i-1,i)}$, $f_2^{(n-2i-1,i)}$, , $i = \overline{0, [\frac{n-1}{2}]}$, $T_{[\frac{n-1}{2}]+1}$ такі, що

$$|1 + f_1^{(ji)}| \geq \frac{1}{R}, \qquad |1 + f_2^{(ji)}| \geq \frac{1}{R}, \qquad R = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1),$$

$$|1 + T_{[\frac{n-1}{2}]+1}| \geq \frac{1}{2},$$

то двовимірний ланцюговий дріб збігається до функції $f(z_1, z_2)$ в області D_M і мають місце такі оцінки швидкості збіжності: а) $\beta < \frac{1}{8}$

$$|f_n(z_1, z_2) - f(z_1, z_2)| \leq K \cdot \left(\frac{\sqrt{1-4\beta} - \sqrt{1-8\beta}}{\sqrt{1-4\beta} + \sqrt{1-8\beta}} \right)^{[\frac{n-1}{2}]},$$

де K-стала, що не залежить від n;

б) $\beta = \frac{1}{8}$

$$|f_n(z_1, z_2) - f(z_1, z_2)| \leq \frac{3\sqrt{2}}{4M} \cdot \frac{1}{[\frac{n-1}{2}] + 2}$$

В третьому розділі **"Стійкість та локально-апроксимативні властивості двовимірних ланцюгових дробів"** досліджується абсолютна стійкість та збіжність двовимірних ланцюгових дробів за допомогою формули для обчислення абсолютної похибки, а також вивчаються локально-апроксимативні властивості безумовно збіжних двовимірних ланцюгових дробів.

В першому параграфі цього розділу для двох скінчених двовимірних ланцюгових дробів

$$f = \mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \frac{a_{ii}}{b_{ii} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{n-2i-1} \frac{a_{ji}}{b_{ji}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{n-2i-1} \frac{a_{ij}}{b_{ij}}}, \quad \hat{f} = \mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \frac{\hat{a}_{ii}}{\hat{b}_{ii} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{n-2i-1} \frac{\hat{a}_{ji}}{\hat{b}_{ji}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{n-2i-1} \frac{\hat{a}_{ij}}{\hat{b}_{ij}}}$$

для яких область $\Omega \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ є областю елементів, тобто $\{a_{ij}, b_{ij}\} \in \Omega$ та $\{\hat{a}_{ij}, \hat{b}_{ij}\} \in \Omega$, встановлюється формула для обчислення абсолютної похибки $|\Delta f| = |f - \hat{f}|$.

Нехай

$$\Delta a_{ij} = a_{ij} - \hat{a}_{ij}, \quad \Delta b_{ij} = b_{ij} - \hat{b}_{ij}, \quad i = \overline{0, [\frac{n-1}{2}]}, \quad j = \overline{0, n-2i-1}$$

похибки елементів a_{ij}, b_{ij}, $i = \overline{0, [\frac{n-1}{2}]}$, $j = \overline{0, n-2i-1}$ відповідно.

Означення 3.1. Область елементів Ω називається областю абсолютної стійкості двовимірного ланцюгового дробу (1), якщо існує дійсна додатня стала K, що залежить від Ω і не залежить від n, така що

$$|\Delta f| = |f - \hat{f}| \le K\Delta,$$

де $\Delta = \max\{\max_i \max_j |\Delta a_{ij}|, \quad \max_i \max_j |\Delta b_{ij}|\}$, $\quad i = \overline{0, [\frac{n-1}{2}]}$, $\quad j = \overline{0, n-2i-1}$

В параграфі два вивчається збіжність двовимірних ланцюгових дробів за допомогою встановлених в попередньому параграфі формул для обчислення абсолютної похибки. Сформульовано і доведено

Теорема 3.1. Двовимірний ланцюговий дріб (7) елементи c_{ij}, $(i, j = 0, 1, \ldots)$ якого задовольняють умову $|c_{ij}| \le \beta$, $\quad \beta \le \frac{1}{8}$ є 1) збіжним і мають місце наступні оцінки швидкості збіжності

а) $\beta < \frac{1}{8}$

$$|f_n - f_m| \le M \cdot \frac{(1-d)^{([\frac{n-1}{2}] - [\frac{m-1}{2}] + 1)} - d^{([\frac{n-1}{2}] - [\frac{m-1}{2}] + 1)}}{(1-d)^{([\frac{m-1}{2}] + 2)} - d^{([\frac{m-1}{2}] + 2)}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1-2d}{(1-d)^{([\frac{n-1}{2}] + 2)} - d^{([\frac{n-1}{2}] + 2)}} \cdot ((1-d)d)^{([\frac{m-1}{2}] + 2)},$$

де $d = \dfrac{\sqrt{1-4\beta} - \sqrt{1-8\beta}}{2\sqrt{1-4\beta}}$, M-абсолютна стала;

б) $\beta = \frac{1}{8}$

$$|f_n - f_m| \le C \frac{[\frac{n-1}{2}] - [\frac{m-1}{2}] + 1}{([\frac{n-1}{2}] + 2)([\frac{m-1}{2}] + 2)},$$

де C- стала.

2) значення двовимірного ланцюгового дробу (7) і всіх його наближень міститься в області

$$|z - \frac{\beta}{1-R^2}| \leq \frac{R\beta}{1-R^2}, \qquad R = 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{1-4\beta} + \sqrt{1-8\beta}).$$

В <u>третьому параграфі</u> встановлено

<u>**Теорема 3.2.**</u> Область $E = \{z \in \mathbb{C}; |z| < \beta < \frac{1}{8}\}$ є областю абсолютної стійкості двовимірного ланцюгового дробу (7), причому

$$|\Delta f| \leq \frac{1}{\sqrt{1-8\beta}}\Delta a + \frac{\sqrt{1-4\beta} - \sqrt{1-8\beta}}{2\sqrt{1-4\beta}\sqrt{1-8\beta}}(\Delta a_1 + \Delta a_2)$$

де $\Delta a = \max_i |\Delta a_{ii}|$, $\quad \Delta a_1 = \max_i \max_j |\Delta a_{ji}|$, $\quad \Delta a_2 = \max_i \max_j |\Delta a_{ij}|$.

<u>**Четвертий параграф**</u> присвячений вивченню локально-апроксимативних властивостей безумовно збіжних двовимірних ланцюгових дробів.

Нехай двовимірний ланцюговий дріб (7) є безумовно збіжним двовимірним ланцюговим дробом і для його залишків $f_1^{(ij)}$, $f_2^{(ij)}$, T_i $(i, j = 0, 1, \ldots)$ виконуються співвідношення

$$f_1^{(ij)} = \frac{c_{i+1,j}}{1 + f_1^{(i+1,j)}}, \qquad f_2^{(ij)} = \frac{c_{j,i+1}}{1 + f_2^{(i+1,j)}}, \quad i, j = 0, 1, \ldots$$

$$T_i = \frac{a_{ii}}{1 + f_1^{ii} + f_2^{ii} + T_{i+1}}, \qquad i = 0, 1, \ldots$$

Якщо залишки $f_1^{(ij)}$, $f_2^{(ij)}$, T_i $(i, j = 0, 1, \ldots)$ є такими, що двовимірний ланцюговий дріб (7) можна подати у скінченому вигляді

$$\mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \frac{c_{ii}}{1 + f_1^{(ii)} + f_2^{(ii)} +} \; \frac{T_{[\frac{n-1}{2}]+1}}{1},$$

то, розглядаючи двовимірний ланцюговий дріб як функцію F від його елементів c_{ij}, $(i, j = 0, 1, \ldots)$, можна ввести перші частинні похідні по цих елементах.

<u>**Теорема 3.3.**</u> Якщо функція F визначена безумовно збіжним двовимірним ланцюговим дробом (7), то

$$\frac{\partial F}{\partial c_{ji}} = \frac{f_s^{(ii)}}{c_{ji}} \prod_{p=0}^{l} \frac{-T_p}{1 + f_1^{(pp)} + f_2^{(pp)} + T_{p+1}} \prod_{k=i+1}^{r} \frac{-f_s^{(kj)}}{1 + f_s^{(kj)}}$$

причому $s=1$, $l=i$, $r=j-1$, для $j>i$ та $s=2$, $l=j$, $r=i-1$, для $j<i$ і

$$\frac{\partial F}{\partial c_{ii}}=\frac{T_0}{c_{ii}}\prod_{p=1}^{i}\frac{-T_p}{1+f_1^{(p-1,p-1)}+f_2^{(p-1,p-1)}+T_p}, i=0,1,\ldots$$

Якщо елементи c_{ij}, $i,j=0,1,\ldots$ двовимірного ланцюгового дробу (7) можна визначити як $c_{ij}=a+\varepsilon_{ij}$, $i,j=0,1,\ldots;$ $a\notin(-\infty,-\frac{1}{8}]$, то будується лінійне наближення такого двовимірного ланцюгового дробу за допомогою двовимірного ланцюгового дробу

$$\mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty}\frac{a}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty}\frac{a}{1}+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty}\frac{a}{1}}. \tag{9}$$

Нехай область $\Omega=|w-c|\leq R$ – це область збіжності двовимірного ланцюгового дробу (7), а круг $|w-P|\leq M$ містить його всеможливі значення, коли $c_{ij}\in\Omega$, $i,j=0,1,\ldots$.

Нехай $\Gamma=\frac{1}{2}(\sqrt{1+4a}-1)$ - це значення періодичного ланцюгового дробу $\frac{a}{1+}\frac{a}{1+}\cdots$, а $T=\frac{1}{2}(\sqrt{1+8a}-\sqrt{1+4a})$ - це значення двовимірного ланцюгового дробу (9).

<u>Теорема 3.4.</u> Якщо $a\notin(-\infty,-\frac{1}{8}]$, R,M,T,Γ є визначеними вище і, крім того, існують такі додатні числа r_i, $0<r_i<R$, $i=\overline{1,3}$, що

$$\sup_i\sup_j|\varepsilon_{ij}|\leq r_1,\quad i>j,\qquad \sup_i\sup_j|\varepsilon_{ij}|\leq r_2,\quad i<j,\qquad \sup_i|\varepsilon_{ii}|\leq r_3$$

тоді 1) функція

$$\Phi(z_1,z_2,z_3)=\mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty}\frac{a+\varepsilon_{ii}z_3}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty}\frac{a+\varepsilon_{ji}z_1}{1}+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty}\frac{a+\varepsilon_{ij}z_2}{1}}$$

є голоморфною в полікрузі $U=\{z\in\mathbb{C}^3,\ |z_i|\leq\frac{r_i}{R},\ i=\overline{1,3}\}$;

2)

$$\left(\frac{\partial\Phi(z_1,z_2,z_3)}{\partial z_1}\right)_{(0,0,0)}=\frac{1}{1+\Gamma}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-T}{1+2\Gamma+T}\right)^i\left(\frac{-\Gamma}{1+\Gamma}\right)^k\varepsilon_{ik},$$

$$\left(\frac{\partial\Phi(z_1,z_2,z_3)}{\partial z_2}\right)_{(0,0,0)} = \frac{1}{1+\Gamma}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-T}{1+2\Gamma+T}\right)^i\left(\frac{-\Gamma}{1+\Gamma}\right)^k z_{ki},$$

$$\left(\frac{\partial\Phi(z_1,z_2,z_3)}{\partial z_3}\right)_{(0,0,0)} = \frac{1}{1+\Gamma}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{-T}{1+2\Gamma+T}\right)^i z_{ii}$$

3)

$$\left| \mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty}\frac{a+z_{ii}}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty}\frac{a+z_{ji}}{1}+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty}\frac{a+z_{ij}}{1}} - \mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty}\frac{a}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty}\frac{a}{1}+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty}\frac{a}{1}} - \right.$$
$$- \frac{1}{1+2\Gamma+T}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{-T}{1+2\Gamma+T}\right)^i z_{ii} -$$
$$\left. - \frac{1}{1+\Gamma}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-T}{1+2\Gamma+T}\right)^i\left(\frac{-\Gamma}{1+\Gamma}\right)^k(z_{ik}+z_{ki})\right| \le$$
$$M\cdot\left(\frac{k_1^2}{1-k_1}+\frac{k_2^2}{1-k_2}+\frac{k_3^2}{1-k_3}+\frac{k_1k_2}{(1-k_1)(1-k_2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{k_2k_3}{(1-k_2)(1-k_3)}+\frac{k_1k_3}{(1-k_1)(1-k_3)}+\frac{k_1k_2k_3}{(1-k_1)(1-k_2)(1-k_3)}\right),$$

причому $k_i = \frac{r_i}{R}$, $i = \overline{1,3}$.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі встановлено аналоги теореми Ворпітського про найбільші крутові області збіжності для двовимірних ланцюгових дробів та досліджено крутову область абсолютної стійкості, одержано необхідну ознаку збіжності – аналог теореми Коха, побудовано метод перетворення відношення двох подвійних степеневих рядів у двовимірний відповідний ланцюговий дріб.

Дисертація містить нові обгрунтовані теоретичні результати, які є певним внеском в аналітичну теорію відповідних двовимірних ланцюгових дробів і можуть бути використані для її подальшого розвитку.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах

1. Сусь О.Н. Сходимость к функции ее формального разложения в двумерную соответствующую цепную дробь // Матем. методы и физ.-мех. поля. -1984.- Вып. 20.- С.23-27.

2. Кучминская Х.И., Сусь О.Н. Два признака сходимости двумерных цепных дробей // Матем. методы и физ.-мех. поля.- 1986.- Вып. 23.- С.122-127.

3. Боднар Д.І., Воделанд Х., Кучмінська Х.Й., Сусь О.М. Про стійкість гіллястих ланцюгових дробів // Матем. методи і фіз.-мех. поля. - 1994. - Вип. 37.- С.3-7.

4. Сусь О.М. Деякі локальні властивості двовимірних ланцюгових дробів // Матем. методи і фіз.-мех. поля.- 1995. - Вип. 38. - С.29-33.

5. Сусь О.Н. Алгоритм типа Висковатова вычисления соответствующей двумерной цепной дроби // Материалы 9 ой конференции молодых ученых ИППММ АН УССР.- Деп. в ВИНИТИ N 324-84 Деп. - С.139-142.

6. Сусь О.Н. Один достаточный признак сходимости двумерных цепных дробей // Материалы 10-ой конференции молодых ученых ИППММ АН УССР.- Деп. в ВИНИТИ N 7197-84 Деп.- С.201-205.

7. Сусь О.М. Лінійні наближення двовимірних гранично-періодичних ланцюгових дробів // Тези міжнародної конференції, присвяченої пам'яті акад. М.П.Кравчука.- Київ. 1992.- С.203.

8. Сусь О.М. Збіжність двовимірного ланцюгового дробу з комплексними елементами // Тези Всеукраїнської наукової конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" - К.: Ін-т математики НАН України. 1994.- С.161.

Sus' O.M. Certain questions of the analytic theory of two-dimensional continued fractions.

Thesis on search of the scientific degree of candidate of physical and mathematical sciences, speciality 01.01.01- mathematical analysis. Lviv State University, Lviv, 1996.

Submitted are 8 scientific papers which contain theoretical investigation in the analytic theory of corresponding two-dimensional continued fractions. Sufficient conditions of convergence and absolute stability of two-dimensional continued fractions are established and necessary condition of

convergence of such fractions is stated. Certain approximate properties of two-dimensional continued fractions are investigated.

Сусь О.Н. Некоторые вопросы аналитической теории двумерных цепных дробей.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01- математический анализ. Львовский государственный университет, Львов, 1996.

Защищаетсмя 8 научных работ, которые содержат теоретическое исследование в области аналитической теории соответствующих двумерных цепных дробей. Установлены досататочные, необходимые условия сходимости и достаточные условия абсолютной устойчивости двумерных цепных дробей. Изучены их некоторые локально-апроксимативные свойства.

Ключові слова : відповідний двовимірний ланцюговий дріб, п-ий підхідний дріб, збіжність, безумовна збіжність, область абсолютної стійкості.

Зам.№ [illegible]. Підписано до друку 19 [illegible] 1996 р.
Формат 60х84 1/16. Ум.друк.арк. 1,0. Тираж 100 пр.
[illegible] бібліотеки ім.В.Стефаника
[illegible], вул.Стефаника, 2.

Зам.№ І[illegible]. Підписано до друку: 19 лютого 1996 р.
Формат 60х84 І/І6. Ум.друк.арк. І,0. Тираж І00 пр.

Ротопринт Львівської наукової бібліотеки ім.В.Стефаника
НАН України, вул.Лермонтова, І5.

На правах рукописи

Разработка магнитно-мягких материалов с заданными свойствами для специальных электрических машин

Специальность

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата технических наук