НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Інститут математики

На правах рукопису

КУЛИК Олексій Михайлович

ВИПАДКОВІ ОПЕРАТОРИ ТА СТОХАСТИЧНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

01.01.05 – теорія ймовірностей
та математична статистика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1996

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник: доктор фіз.-мат. наук
ДОРОГОВЦЕВ А.А.

Офіційні опоненти: академік НАН України
ДАЛЕЦЬКИЙ Ю.Л.

кандидат фіз.-мат. наук
ДЕНИСЬЄВСЬКИЙ М.О.

Провідна установа: Донецький державний університет.

Захист відбудеться 14.05 1996 р. о 15 год.
на засіданні спеціалізованої вченої ради Д.01.66.01
при Інституті математики НАН України за адресою:
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська 3.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці інституту.

Автореферат розісланий 11 квітня 1996 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
доктор фіз.-мат. наук **ГУСАК Д.В.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність роботи. Дана робота пов'язана з таким актуальним напрямком сучасного стохастичного аналізу, як теорія стохастичного інтегрування випадкових процесів із випередженням та за процесами, для яких відсутні мартингальні властивості.

Вивчення стохастичних інтегральних та диференціальних рівнянь як природного апарату для дослідження систем, які знаходяться під впливом випадкових збурень, було започатковане на початку 40-х років нашого сторіччя Н.Н.Боголюбовим, Н.М.Криловим та Й.І.Гіхманом, та розвинене Й.І.Гіхманом і А.В.Скороходом на основі введеного К.Іто поняття стохастичного інтегралу. Теорія стохастичних інтегральних рівнянь, заснована на понятті стохастичного інтегралу Іто, виявилась тісно пов'язаною з теорією мартингалів, детально розвиненою Дж.Дубом, П.Мейєром та багатьма іншими. Так, використання мартингальних властивостей вінерівського процесу дозволило отримати для стохастичних інтегральних рівнянь за вінерівським процесом такі фундаментальні результати, як існування та єдиність розв'язку (Гіхман, Іто), теореми про великі та малі ухилення (Вентцель, Крилов), опис топологічного носія розподілу розв'язку (Струк, Варадан), тощо.

Останнім часом великого значення набуло вивчення рівнянь із стохастичним інтегруванням процесів, для яких відсутні умови невипередженості, що унеможливлює застосування стохастичного інтегралу Іто і вимагає побудови теорії стохастичного інтегрування для випереджуючих процесів. Однією з вихідних точок у цьому напрямку є введене А.В.Скороходом у 1975 році поняття розширеного стохастичного інтегралу за вінерівським процесом.

Стохастичні рівняння із розширеним інтегралом Скорохода можуть виникати, наприклад, як аналог рівняння Ейлера у деяких задачах непараметричного оцінювання. Рівняння з інтегралом Скорохода розглядали А.Ю.Шевляков, H.Kunita, R.Buckdahn, А.А.Дороговцев, D.Nualart, A.-S. Ustunel та інші. У даній роботі розглядаються лінійні інтегральні рівняння з розширеним стохастичним інтегралом за логарифмічними процесами гладких мір, який був введений у роботах Ю.Л.Далецького, М.В.Норіна, А.А. Дороговцева та інших, і є узагальненням поняття інтегралу Скорохода, у деяких випадках такі рівняння також можна розглядати як аналог рівняння Ейлера.

Другою важливою конструкцією стохастичного інтегралу від випереджуючих процесів є введене у 1984 році С.Огавою поняття симетричного стохастичного інтегралу та тісно з ним пов'язане поняття розширеного інтегралу Стратоновича, які є узагальненням визначеного для семімартингалів стохастичного інтегралу Стратоновича-Іто. Стохастичні рівняння з розширеним інтегралом Стратоновича-Огави вивчали, зокрема, E.Pardoux, D.Ocone, В.Мацкявічус, D.Nualart, M.Sanz, A.Millet. У дисертації розглядається підхід до розв'язання симетричних стохастичних інтегральних рівнянь із випередженням, заснований на використанні рівнянь з випадковими операторами Цей підхід дозволяє, попри відсутність будь-яких мартингальних властивостей, отримати існування та єдиність розв'язку та дослідити деякі його властивості, зокрема отримати опис носія розподілу розв'язку, аналогічний до теореми Струка-Варадана.

Мета роботи. Відомо, що симетричний стохастичний інтеграл Огави за вінерівським процесом можна визначити як симетричну суперпозицію з інтегральним випадковим оператором, породженим цим процесом. Метою даної роботи є побудова для деякого класу випадкових процесів операторів стохастичного інтегрування за цими процесами, визначення симетричного інтегралу за цими процесами, аналогічного до інтегралу Огави та опис його області визначення, а також розгляд лінійних стохастичних рівнянь із введеним симетричним інтегралом. З цією метою ми вивчаємо рівняння типу Фредгольма з випадковими операторами Гільберта-Шмідта, розподіли яких квазіінваріантні відносно щільно вкладених у лінійні носії простори напрямків, і отримуємо для них існування та єдиність розв'язку, а також такі властивості цього розв'язку, як абсолютна неперервність скінченновимірних розподілів та опис топологічного носія розподілу, аналогічний до теореми Струка-Варадана, після чого аналогічні результати можна довести і для симетричних стохастичних рівнянь типу Фредгольма. Крім того, у роботі розглядається задача вивчення стохастичних рівнянь типу Вольтери з розширеним стохастичним інтегралом за логарифмічними процесами гладких мір, у зв'язку з чим виникає потреба у доведенні аналогу теореми Коші-Ковалевської для нескінченновимірних лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку та отриманні оцінок росту кратних інтегралів від логарифмічного процесу.

Загальна методика досліджень. У роботі використовуються методи теорії операторів, нескінченновимірного аналізу та інші методи функціонального аналізу, метод характеристик розв'язання лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку.

Наукова новизна результатів роботи:

- Для широкого класу випадкових процесів визначені випадкові оператори стохастичного інтегрування за цими процесами і визначений симетричний стохастичний інтеграл, аналогічний до інтегралу Огави.

- Отримані умови, достатні для того, щоб був визначений симетричний стохастичний інтеграл від випадкового процесу, зокрема, отримані нові достатні умови для існування інтегралу Огави.

- Доведено існування та єдиність розв'язку лінійного симетричного стохастичного інтегрального рівняння типу Фредгольма,для розв'язку такого рівняння доведено абсолютну неперервність скінченновимірних розподілів та отримано опис носія розподілу, аналогічний до теореми Струка-Варадана.

- Для стохастичних інтегро-диференціальних рівнянь за логарифмічними процесами гладких мір доведена теорема існування та єдиності розв'язку.

- Отримано явний вигляд та оцінки росту для кратних інтегралів від логарифмічних процесів гладких мір.

- Для лінійного інтегрального рівняння типу Вольтери з розширеним стохастичним інтегралом за логарифмічним процесом доведено існування та єдиність розв'язку.

Теоретична та практична цінність. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Всі результати, одержані у дисертації, є новими і можуть бути використані у теорії випадкових процесів та стохастичному аналізі.

Апробація роботи. Основні положення та результати, викладені в дисертації, доповідались на міжнародній математичній конференції пам'яті Ганса Гана (Чернівці, 1994), на IV міжнародній конференції ім. акад. М. Кравчука (Київ, 1995), на всеукраїнській науковій конференції "Сучасні фізико-математичні дослідження молодих науковців України" (Київ, 1994), на Другій всеукраїнській науковій конференції "Сучасні фізико-математичні дослідження молодих науковців України" (Київ, 1995), на семінарі "Числення Малявена та його застосування", на семінарі відділу теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані у роботах [1-6].

Структура і об'єм роботи. Дисертаційна робота обсягом 116 машинописних сторінок складається із вступу, трьох розділів та списку цитованої літератури, що містить 55 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовується актуальність та важливість питань, що розглядаються у дисертації, проводиться стислий огляд близьких за напрямом робіт, дається опис змісту та результатів дисертації.

У розділі 1 наведені визначення та доведені технічні результати, необхідні для подальшого розгляду.

У першому пункті розділу вводиться та досліджується клас випадкових елементів, регулярних відносно гауссівського білого шуму:

Визначення 1.1.5. *Нехай на ймовірнісному просторі* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *заданий гауссівський білий шум* $\mathcal{H} = (H, \xi)$, *де* H *– дійсний сепарабельний гільбертів простір, а* ξ *– узагальнений гауссівський випад-*

ковий елемент у H з нульовим середнім та одиничним кореляційним оператором. Випадковий елемент η із значеннями у банаховому просторі B називається регулярним відносно білого шуму $\mathcal{H}$, якщо існує вкладення j простору H у деякий сепарабельний банахів простір W таке, що норма $|||\cdot||| = \|j\cdot\|_W$ на H є вимірною відносно розподілу елементу ξ (або, що еквівалентно, відображення j задає у W звичайний випадковий елемент $j\xi$), та існує неперервна функція $\Phi : W \to B$, для якої $\eta = \Phi(j\xi)$ м.н.

Поняття регулярного випадкового елемента вводиться як засіб для отримання у другому розділі опису носія розподілу розв'язку стохастичного симетричного рівняння типу Фредгольма. Крім того, вивчення регулярних функціоналів є корисним при дослідженні деяких статистичних задач, зокрема задачі оцінювання невідомого кореляційного оператора гауссівського випадкового елемента. У п.1.1 отримано необхідні та достатні умови регулярності випадкового елементу у термінах його коефіцієнтів розкладу Камерона-Мартина, доведений важливий для подальшого розгляду критерій питання регулярності гауссівських операторів відносно сумісно з ними гауссівського білого шуму:

Теорема 1.1.23. *Нехай на просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ заданий обмежений гауссівський випадковий оператор A у сепарабельному гільбертовому просторі X. Для того, щоб для будь-якого сумісно з A гауссівського білого шуму (H, ξ) з $\sigma(\xi) \supset \sigma(A)$ існував такий регулярний відносно (H, ξ) випадковий елемент $\tilde{A}$ із значеннями у $\mathcal{L}(X)$, що*

$$\forall x \in X \qquad (Ax)(\omega) = \tilde{A}(\omega)x \quad P- \text{ м.н.},$$

необхідно і достатньо, щоб існував замкнений сепарабельний підпростір $\mathcal{S}$ простору $\mathcal{L}(X)$ такий, що $A \in \mathcal{S}$ м.н.

Наведений приклад обмеженого гауссівського випадкового оператора, не зосередженого у будь-якому сепарабельному підпросторі простору $\mathcal{L}(X)$.

Другий пункт присвячений визначенню для деякого класу випадкових процесів стохастичного інтегралу за цими процесами, аналогічного до інтегралу Стратоновича-Огави за процесом Вінера. Для цого вводиться наступний клас сильних випадкових операторів у просторі $L_2([0,1])$.

Теорема 1.2.4. *Нехай на просторі $L_2([0,1])$ заданий узагальнений випадковий елемент ξ, розподіл якого має тип $p > 0$, ядро $\{K(t,s), t, s, \in [0,1]\}$ належить класу*

$$\mathcal{K} \equiv \left\{K \mid \|K\|_{2,\infty} \equiv \int_0^1 \|K(t,\cdot)\|^2_{L_\infty([0,1])}\, dt < +\infty\right\}.$$

Тоді відображення A_K,

$$(A_K f)(t) = (\xi, K(t,\cdot)f(\cdot)) \qquad f \in L_2([0,1])$$

є сильним випадковим оператором у просторі $L_2([0,1])$, неперервним у середньому степені p.

Оператор A_K можна розглядати як оператор стохастичного інтегрування з ядром K відносно випадкового процесу $\eta(t) = (\xi, \chi_{[0,t)}), t \in [0,1]$. Доведений опис класу процесів $\eta(\cdot)$, які можна отримати у такому вигляді.

Теорема 1.2.7. *Нехай $i : L_2([0,1]) \ni f(\cdot) \to \int_0^{\cdot} f(s)\, ds \in L_2([0,1])$, позначимо через $|||\cdot||| = \|i^* \cdot\|_{L_2}$ норму, породжену у $L_2([0,1])$ оператором i^*. Для того, щоб випадковий процес η мав представлення у вигляді $\eta(t) = (\xi, \chi_{[0,t]})$, $t \in [0,1]$, де ξ – узагальнений випадковий елемент у $L_2([0,1])$, розподіл якого має тип $p > 0$, необхідно і достатньо, щоб траекторії $\eta(\cdot)$ були м.н. ква-*

дратично інтегровними та для деякого $C < +\infty$

$$\forall f \in L_2([0,1]) \qquad E|\int_0^1 \eta(t)f(t)\,dt|^p \le C|||f|||^p$$

(або, що еквівалентно, щоб простір Камерона-Мартина $H_K = \{f(\cdot) = \int_0^{\cdot} \dot f(s)\,ds,\ \dot f \in L_2([0,1])\}$ був неперервно вкладеним у простір вимірних лінійних функціоналів від η, інтегровних у степені p).

Аналогічно до визначення Огави вводиться симетричний стохастичний інтеграл за процесами $\eta(\cdot)$, які задовольняють умови теореми 1.2.7: для випадкового процесу $x(\cdot)$ з квадратично інтегровними траєкторіями визначений симетричний стохастичний інтеграл $\int_0^1 K(\cdot,s)x(s) \circ d\eta(s)$ відносно процесу η з ядром $K \in \mathcal{K}$, якщо визначена симетрична суперпозиція випадкового оператора A_K та випадкового елемента x у просторі $L_2 \equiv L_2([0,1])$, тобто для довільного ОНБ $\{h_k\}$ у $L_2([0,1])$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x,h_k)_X \cdot A_K h_k$$

збігається за ймовірністю та його сума $A_K \circ x$ не залежить від вибору базису, та $\int_0^1 K(\cdot,s)x(s) \circ d\eta(s) \equiv (A_K \circ x)(\cdot)$. Отримана наступна достатня умова існування симетричного інтегралу від випадкового процесу.

Теорема 1.2.6 *Для довільного процесу x з класу*

$$\mathcal{M} = \{x = Ty, T \in \mathcal{L}_2(L_2),\ y \text{ - випадковий елемент у } L_2\}$$

визначена симетрична суперпозиція $A_K \circ x$ з довільним з інтегральних операторів A_K, введених у теоремі 1.2.4.

Показано, що аналогічно до вінерівського випадку, якщо визначена суперпозиція $A_K \circ x$, то для майже всіх $t \in [0,1]$ відносно міри Лебега випадкова величина $(A_K \circ x)(t)$ є аналогом розширеного інтегралу Стратоновича від процесу $K(t,\cdot)x(\cdot)$, тобто для довільної послідовності розбиттів $\{\lambda_n = (0 = t_n^0 < t_n^1 < \ldots < t_n^{m_n} = 1)\}$ відрізка [0,1] такої, що $|\lambda_n| = \sup_k |t_n^k - t_n^{k-1}| \to 0$ при $n \to +\infty$, має місце збіжність

$$\sum_{k=1}^{m_n} \frac{1}{t_n^k - t_n^{k-1}} \left(\int_{t_n^{k-1}}^{t_n^k} K(t,s)x(s)ds \right) (\eta(t_n^k) - \eta(t_n^{k-1})) \to \int_0^1 K(t,s)x(s)d\eta(s)$$

за ймовірністю.

Крім того, у п.1.2 досліджені умови, при яких розподіл процесу η квазіінваріантний відносно зсувів на елементи простору Камерона-Мартина. Отриманий ряд технічних результатів, зокрема, наступний аналог теореми Сарда для гладких відображень у банаховому просторі з диференційованою мірою.

Теорема 1.2.11. *Нехай на сепарабельному банаховому просторі B задано міру μ, диференційовну вовж напрямків з множини jH, де H – деякий сепарабельний гільбертів простір, щільно вкладений у B оператором j, і для деякого $C < +\infty$ має місце нерівність*

$$\forall h \in H \int_B \rho_h^2(u)\, \mu(du) \le C\|h\|_H^2,$$

де ρ_h – логарифмічна похідна міри μ у напрямку jh.

Тоді для довільного відображення $F : B \to B$, що має вигляд

$$F(u) = u + j \cdot \Phi(u), \quad \Phi \in C^1(B, H),$$

міра μ множини $F(\{u|(\nabla F)(u)$ не має оберненого $\})$ дорівнює нулю.

У п.1.3 досліджуються стохастичні інтеграли за логарифмічними процесами гладких мір. Для довільного випадкового елемента ξ на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ із значеннями у дійсному сепарабельному банаховому просторі B, який породжує σ-алгебру $\mathcal{F}$, та розподіл якого диференційований вздовж напрямків з щільного гільбертового підпростору $H \subset B$, вводяться визначений на щільній підмножині простору $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ оператор стохастичного диференціювання відносно елемента ξ із значеннями у $L_2(\Omega, P, H)$ та оператор стохастичного інтегрування $I \equiv D^* : L_2(\Omega, P, H) \to L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Доведені деякі технічні результати, що стосуються введеного А.А. Дороговцевим методу розширення області визначення операторів D та I, заснованого на їх локалізації на гладких відкритих множинах, тобто множинах вигляду

$$A = \{\alpha \in G\} \quad \text{м.н.},$$

де α – стохастично диференційована випадкова величина, $G \subset \Re$ – відкрита підмножина. Зокрема, доведена наступна теорема, що встановлює існування достатньо великого запасу гладких відкритих множин:

Теорема 1.3.4. *Для довільної відкритої множини $S \subset B$ множина $\{\xi \in S\}$ є гладкою відкритою множиною.*

Розглянутий випадок, коли $B = C_0([0,1]), H = jL_2([0,1])$, де $jf(\cdot) = \int_0^{\cdot} f(s)\,ds$, $f \in L_2([0,1])$. Доведено, що якщо розподіл як узагальненого випадкового елемента у $L_2([0,1])$ логарифмічної похідної міри μ $\rho : \dot{L}_2([0,1]) \ni h \to \frac{d\mu'_{jh}}{d\mu}$ має тип 2, то існує випадковий процес $m(\cdot)$ з квадратично інтегровними траєкторіями, такий, що $m(t) = (\rho, \chi_{[0,t]}), t \in [0,1]$ м.н. Процес m називається логарифмічним процесом міри μ та через $\int_0^1 x(s)\,dm(s)$ позначається значення оператора I на випадковому елементі x у $L_2([0,1])$.

У термінах стохастичної похідної процесу $(\cdot)$ отримані умови, достатні для стохастичної інтегровності процесу $x(\cdot)$.

Теорема 1.3.12. *Нехай для логарифмічного процесу $m(\cdot)$ виконується умова*

B. *Для довільного $f \in L_2([0,1])$ випадковий елемент $\int_0^1 f(s)\,dm(s)$ є стохастично диференційованим і відображення*

$$B: f \to D(\int_0^1 f(s)\,dm(s)), \qquad f \in L_2([0,1]),$$

є обмеженим випадковим оператором та існує зростаюча послідовність гладких відкритих множин $\{C_n, n \in \mathbb{N}\}$, що прямує до Ω, така, що на кожній з множин C_n оператор B рівномірно обмежений за нормою як елемент простору $\mathcal{L}(L_2([0,1]))$.

Тоді для довільного $K \in \mathcal{K}$ для довільного стохастично диференційованого випадкового процесу $x \in \tilde{W}^1(H)$ визначений стохастичний інтеграл

$$A_K \cdot x(\cdot) \equiv \int_0^1 K(\cdot, s)x(s)\,dm(s).$$

Якщо випадковий елемент Dx із значеннями у просторі $H^{\otimes 2} \equiv \mathcal{L}_2(H)$ такий, що з ймовірністю 1 оператор Dx ядерний та похідна Dx, як елемент із значеннями у просторі $\mathcal{L}_1(H)$ ядерних операторів на H, рівномірно обмежена на кожній множині з деякої послідовності гладких відкритих множин, що монотонно збігається до Ω, то визначена введена у п.1.2 симетрична суперпозиція $\int_0^1 K(\cdot,s)x(s) \circ dm(s) \equiv A_K \circ x(\cdot)$ і

$$A_K \circ x(t) = A_K \cdot x(t) + \int_0^1 K(t,s)Dx(s,s)\,ds, \quad t \in [0,1].$$

У розділі 2 досліджуються інтегральні рівняння із симетричним стохастичним інтегралом, введеним у п.1.2 (зокрема, з інтегралом Огави за вінерівським процесом).

У першому пункті розділу 2 встановлено існування та єдиність розв'язку рівняння типу Фредгольма для широкого класу випадкових інтегральних операторів, введених у п.1.2; при цьому виявляється корисним розгляд рівнянь типу Фредгольма

$$x = y + A \circ x \tag{1}$$

з обмеженими випадковими операторами A у деякому сепарабельному гільбертовому просторі X (y – випадковий елемент із значеннями у X). Для деяких класів обмежених випадкових операторів A доведено існування та єдиність розв'язку рівняння (1).

Теорема 2.1.2. *Якщо A – гауссівський випадковий оператор у сепарабельному гільбертовому просторі X, компактний з ймовірністю 1, та оператор $E_X - EA$ має неперервний обернений, то оператор $E_X - A$ з ймовірністю 1 має обернений.*

Також у п.2.1 доведені твердження, аналогічні до теореми 2.1.2 для випадкових операторів Гільберта-Шмідта, які є аналітичними функціоналами від ґауссівського білого шуму та випадкових операторів Гільберта-Шмідта, розподіли яких квазіінваріантні відносно зсувів на елементи деякого щільного підпростору лінійного носія оператора.

Доведено, що у тому випадку, коли ядро K належить до класу K_0 тих ядер на $[0,1]^2$, які мають представлення

$$K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k(t) g_k(s),$$

де ряд збігається у середньому квадратичному, причому

$$\lambda_k \geq 0, \ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < +\infty < \quad \exists C < +\infty : \|g_k\|_{L_\infty} \leq C, \ k \in I\!N$$

(кожне з таких ядер належить K), розв'язання інтегрального рівняння вигляду

$$x(t) = y(t) + \int_0^1 K(t,s) x(s) \circ d\eta(s), \quad t \in [0,1] \tag{2}$$

можна звести до розв'язання рівняння вигляду (1) з обмеженим оператором, отримана наступна теорема існування та єдиності розв'язку рівняння (2).

Теорема 2.1.5. *Нехай $K \in \mathcal{K}_0$, випадковий процес $\eta(\cdot)$ задовольняє умову теореми 1.2.7 та його розподіл у $L_2([0,1])$ квазіінваріантний відносно зсувів на елементи простору Камерона-Мартина H_K.*

Тоді для довільного $y \in \mathcal{M}$ рівняння (2) має єдиний розв'язок у класі $\mathcal{M}$.

У другому пункті розділу 2 досліджуються властивості розв'язку стохастичних рівнянь вигляду (1) та (2). Отриманий, зокрема, наступний результат.

Розглянемо гауссівський компактний оператор A, котрий є сумісно гауссовим з білим шумом (H, ξ), тоді A має розклад відносно цього білого шуму

$$Ax = \alpha(x) + \beta(x, \xi), \quad x \in X,$$

$\alpha \in \mathcal{L}(X)$, $\beta \in \mathcal{L}(X \times H, X)$, для $h \in H$ позначимо $\tilde{\beta}(h) \in \mathcal{L}(X)$: $\tilde{\beta}(h)x = \beta(x, h), x \in X$.

Теорема 2.2.1. *Нехай оператор $E_X - \alpha$ має обернений. Тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок x, причому*

1) якщо випадковий елемент y, що приймає значення в X, є регулярним відносно білого шуму (H, ξ), $y = Y(j\xi)$, то носій розподілу елемента x у X дорівнює замиканню множини
$\{\chi \in X | \chi = Y(jh) + \alpha(\chi) + \beta(\chi, h), h \in H^0\}$, *де*

$$H^0 = \{h \in H | \text{ оператор } (E_X - \alpha - \tilde{\beta}(h)) \text{ має обернений } \};$$

2) якщо $y \in X$ - невипадкове, то для довільних $\{z_1, ..., z_m\} \subset X$ таких, що існують

$$\{h_1, ..., h_m\} \subset H : \quad \det(\{([(E_X - \alpha)^{-2}\tilde{\beta}(h_l)]y, z_k)_X\}_{k,l=1}^m) \neq 0,$$

розподіл випадкового вектора $\{(x, z_1)_X, ..., (x, z_m)_X\}$ абсолютно неперервний відносно міри Лебега у $\Re^m$.

Доведення твердження 1) істотно базується на результатах п.1.1, оскільки розв'язок рівняння (1) має вигляд $\phi = (E_X - A)^{-1}\psi$, і A - регулярний відносно (H, ξ) елемент у $\mathcal{K}(X)$.

Аналогічні результати доведені для розв'язків інших рівнянь вигляду (1), побудованих п. 2.1. Для розв'язків рівнянь типу Фредгольма (2) доведено абсолютну неперервність скінченновимірних розподілів та отриманий опис носія розподілу, аналогічний теоремі Струка-Варадана.

Теорема 2.2.4. *Нехай випадковий процес $\eta(\cdot)$ задовольняє умову теореми 2.1.5, $K \in \mathcal{K}_0$, $y(\cdot) \in L_2([0,1])$ - невипадкова функція та x - єдиний у класі $\mathcal{M}$ розв'язок інтегрального рівняння (1). Тоді*

1) носій розподілу процесу $x(\cdot)$ у $L_2([0,1])$ дорівнює замиканню множини

$$\{\chi(\cdot) = y(\cdot) + \int_0^1 K(\cdot, s)\chi(s)h(s)\,ds, \quad h \in H^0\},$$

де H^0 - множина таких $h \in L_2([0,1])$, для яких оператор

$$\Gamma(h) : f(\cdot) \mapsto f(\cdot) - \int_0^1 K(\cdot, s)f(s)h(s)\,ds$$

у $L_2([0,1])$ має обернений;

2) для довільних $\{z_1, ..., z_m\} \subset L_2([0,1])$ таких, що існують $\{h_1, ..., h_m\} \subset L_2([0,1])$, для яких

$$\det(\{\int\int_{[0,1]^2} K(t,s)y(s)h_l(s)z_k(t)\,ds\,dt\}_{k,l=1}^{\infty}) \neq 0,$$

розподіл випадкового вектора $\{(x, z_1)_{L_2}, ..., (x, z_m)_{L_2}\}$ абсолютно неперервний відносно міри Лебега у $\Re^m$.

У останньому пункті другого розділу розглядаються нелінійні стохастичні диференціальні рівняння із симетричним інтегралом за логарифмічними процесами. Використовуючи достатню умову існування симетричного стохастичного інтегралу за логарифмічним процесом, доведену у п.1.3, побудований розв'язок стохастичного диференціального рівняння

$$x(t) = y + \int_0^t b(x(s), s) \circ dm(s) + \int_0^t a(x(s), s) ds, \ t \in [0, 1],$$

$a, b \in C_b^2(\Re \times [0, 1])$, та для розв'язку доведений аналог теореми Струка-Варадана.

У розділі 3 проводиться вивчення стохастичних інтегральних рівнянь типу Вольтери з розширеним інтегралом за логарифмічним процесом гладкої міри.

У першому пункті розділу 3 досліджуються стохастичні інтегро-диференціальні рівняння вигляду

$$x(t) = y(t) + \int_0^t \int_0^1 K(s, \tau) x(s)\, dm(\tau)\, ds -$$

$$- \int_0^t \int_0^1 K(s, \tau) D x(s, \tau)\, dm(\tau)\, ds, \quad t \in [0, 1], \tag{3}$$

де m – логарифмічний процес, що відповідає деякому випадковому елементу ξ із значеннями у $C_0([0, 1])$, розподіл якого диференційовний вздовж напрямків з простору Камерона-Мартина H_K. Такі рівняння є аналогом нескінченновимірних диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку і далі використовуються для апроксимації розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з розширеним стохастичним інтегралом за логарифмічним процесом. Зазначимо, що вивчення рівнянь вигляду (3) має й самостійне значення, оскільки такі рівняння виникають у деяких задачах непараметричного оцінювання.

У припущенні, що логарифмічний процес $m(\cdot)$ задовольняє умову

А. *Логарифмічний процес $m(\cdot)$ має вигляд $m = M(\xi)$ м.н., де функція $M : C_0([0,1]) \to C_0([0,1])$ аналітична, тобто існують $M_n \in \mathcal{L}(C_0([0,1])^n, C_0([0,1]))$, $n \in I\!N$, такі, що*

$$\forall g \in B\ M(g) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n(g, ..., g), \quad \lim_{n\to+\infty} [\|M_n\|]^{\frac{1}{n}} = 0,$$

для рівняння (3) побудований за допомогою методу характеристик розв'язок та доведена теорема єдиності розв'язку, аналогічна до теореми Коші-Ковалевської.

Теорема 3.1.1. *Нехай процес $y(\cdot)$ має вигляд $Y(\xi)$, $Y : C_0([0,1]) \to C^1([0,1])$ - неперервно диференційовна по Фреше функція, процес m задовольняє умову* **А** *та $K \in C^1([0,1]^2)$.*

Тоді випадковий процес

$$x(t) = Y(\xi - h^t, 0)\exp[\int_0^1 g^t(\tau)\,dm(\tau) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^t D^k_{g^{t,s},...,g^{t,s}}(\int_0^1 K(s,\tau)\,dm(\tau))\,ds] +$$
$$+ \int_0^t Y_2'(\xi - h^{t,s}, s)\exp[\int_0^1 g^{t,s}(\tau)dm(\tau) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_s^t D^k_{g^{t,s},...,g^{t,s}}\{\int_0^1 K(\theta,\tau)\,dm(\tau)\}\,d\theta]\,ds, \qquad (4)$$

де $g^{t,s}(\cdot) = \int_s^t K(s,\cdot)\,ds \in C^1([0,1])$, $g^t = g^{t,0}$ та $h^{t,s}(\cdot) = \int_0^\cdot g^{t,s}(\tau)\,d\tau$, є розв'язком рівняння (3).

Теорема 3.1.2. *Нехай виконуються умови теореми 3.1.1 та процес y має вигляд $y = Y(\xi)$, де Y - аналітична функція на B. Тоді випадковий процес x, заданий формулою (4), є єдиним розв'язком рівняння (3), котрий можна представити у вигляді аналітичної функції від елемента ξ.*

У другому пункті розділу 3 для лінійного стохастичного диференціального рівняння за логарифмічним процесом

$$x(t) = y(t) + \int_0^t b(s)x(s)\,dm(s), \qquad t \in [0,1] \qquad (5)$$

отриманий розв'язок за допомогою апроксимації цього рівняння послідовністю інтегро-диференціальних рівнянь

$$x_n(t) = y(t) + \int_0^t b(s)x_n(s)\int_0^1 q_n(s-\tau)dm(\tau)ds-$$
$$-\int_0^t\int_0^1 q_n(s-\tau)Dx_n(s,\tau)d\tau\, ds, \quad t\in[0,1], \tag{6}$$

де послідовність функцій $\{q_n, n\in I\!N\}\subset C^1(\Re)$ задовольняє умови

Q1: $\forall n\in I\!N \quad q_n\geq 0$;

Q2: $\forall n\in I\!N \quad \int_{\Re} q_n(t)\,dt = 1$;

Q3: $\exists\{\alpha_n\}\in\Re^+, \alpha_n\to 0, n\to+\infty : \operatorname{supp} q_n\subset[0,\alpha_n],\ n\in I\!N$.

Теорема 3.2.2. *Нехай $b\in C^1([0,1])$ та процес m задовольняє умову*

V. *Існує процес обмеженої варіації V, який має вигляд $V = \mathcal{V}(\xi)$, де $\mathcal{V}: B\to H_K$ - аналітична функція, такий, що для довільної послідовності функцій $\{q_n\}$, яка задовольняє умови Q1-Q3, для послідовності випадкових процесів*

$$V_n(t) = \int_0^{t}\int_0^1\int_0^1 Dm(\tau,\theta)q_n(s-\tau)q_n(s-\theta)\,d\tau\,d\theta\,ds\ t\in[0,1], n\in I\!N$$

має місце збіжність

$$\forall C\in\Re^+\ \sup_{k\geq 0}[\frac{C^k}{k!}\|D^kV - D^kV_n\|_{H_K\otimes H^{\otimes k}}]\to 0,\ n\to+\infty,$$

рівномірно на кожній множині вигляду $\{\|\xi\|<R\}$.

Тоді для будь-якого випадкового процесу $y(\cdot)$, що має вигляд $y = Y(\xi)$, $Y\in C^1(B, C^1([0,1]))$, послідовність розв'язків $x_n(\cdot)$, побудованих у теоремі 3.1.1, збігається за ймовірністю у $C([0,1])$ до процесу $x(\cdot)$, котрий є розв'язком рівняння (5).

Доведено, що цей розв'язок є єдиним у тому сенсі, що наближення Пікара збігаються до цього розв'язку, якщо початкове наближення є аналітичним функціоналом від елемента ξ.

Показано, що сім'я розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь

$$x^\lambda(t) = y(t) + \lambda \int_0^t b(s)x^\lambda(s)\,dm(s), \quad t \in [0,1], \lambda \in \Re$$

є породжуючою функцією для послідовності $\{J_n(\cdot), n \geq 0\}$,

$$J_n(\cdot) = \int_0^{\cdot}\int_0^{\tau_n} \ldots \int_0^{\tau_2} b(\tau_n)\ldots b(\tau_1)\,dm(\tau_1)\ldots dm(\tau_n)$$

кратних інтегралів за логарифмічним процесом та, як наслідок, отримані наступні оцінки росту кратних інтегралів.

Теорема 3.2.3. *Нехай $b \in C^1([0,1])$, процес y є аналітичною функцією від ξ і для m виконані умови* A, V*. Тоді для будь-якого $R < +\infty$ існує послідовність $\{c_k(R), k \in \mathbb{N}\} \subset \Re^+$, для якої $[c_k(R)]^{\frac{1}{k}} \to 0$, $k \to +\infty$ та на множині $\{\|\xi\| < R\}$*

$$\sup_{t\in[0,1]} |J^k(t)| \leq c_k(R) \quad \text{м.н.}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

У пункті 3 оцінки кратних інтегралів використовуються для оцінювання росту степенів стохастичного інтегрального оператора типу Вольтерри, доведені оцінки, аналогічні до твердження теореми 3.2.3. Основним результатом даного пункту є наступна теорема існування та єдиності розв'язку стохастичного рівняння типу Вольтерри

$$x(t) = y(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)\,dm(s), \quad t \in [0,1]. \qquad (7)$$

Теорема 3.3.2. *Нехай процес $m(\cdot)$ задовольняє умови* A, B, *та* V, *$y(\cdot)$ є аналітичною фунуцією від ξ, ядро K має неперервну похідну K''_{12} на множині $\{0 \leq s \leq t \leq 1\}$. Тоді випадковий процес $x(\cdot)$, заданий рівністю*

$$x(t) = \mathcal{E}_y(t) + \int_0^t F(\tau)\mathcal{E}(\tau,t)\,d\tau, \quad t \in [0,1],$$

де $\mathcal{E}_y(t), \mathcal{E}(\tau,t), 0 \le \tau \le t \le 1$ – побудовані у п. 3.2 розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь

$$\mathcal{E}_y(t) = y(t) + \int_0^t K(s,s)\mathcal{E}_y(s)\,dm(s), \quad t \in [0,1]$$

та

$$\mathcal{E}(\tau,t) = 1 + \int_\tau^t K(s,s)\mathcal{E}(\tau,s)\,dm(s), \quad t \in [\tau,1],$$

а процес $F(\cdot)$ задовольняє інтегральне рівняння типу Вольтери з випадковим ядром

$$F(t) = \int_0^t K_1'(t,s)\mathcal{E}_y(s)\,dm(s) + \int_0^t F(\tau)[\int_\tau^t K_1'(t,s)\mathcal{E}(s,\tau)\,dm(s)]\,d\tau,$$

$t \in [0,1]$, задовольняє рівняння (7), причому для будь-якого процесу z вигляду $z = Z(\xi)$, $Z : B \to C^1([0,1])$ – аналітична функція, послідовність наближень

$$\tilde{x}_0 = z, \quad \tilde{x}_n(t) = y(t) + \int_0^t K(t,s)\tilde{x}_{n-1}(s)\,dm(s), \; t \in [0,1], n \in I\!N$$

збігається за ймовірністю до процесу x у $L_2([0,1])$.

Основні результати та висновки

1. Для широкого класу випадкових процесів визначені випадкові оператори стохастичного інтегрування за цими процесами та введений симетричний стохастичний інтеграл, аналогічний до інтегралу Огави, отримані умови, достатні для існування симетричного стохастичного інтегралу від випадкового процесу.

2. Доведено існування та єдиність розв'язку для лінійних симетричних стохастичних інтегральних рівнянь типу Фредгольма.

3. Для розв'язку симетричного рівняння типу Фредгольма доведено абсолютну неперервність скінченновимірних розподілів та отриманий опис носія розподілу, аналогічний до теореми Струка-Варадана.

4. Побудований розв'язок симетричного стохастичного диференціального рівняння за логарифмічним процесом гладкої міри та отриманий опис носія розподілу цього розв'язку, аналогічний до теореми Струка-Варадана.

5. Для стохастичних інтегро-диференціальних рівнянь за логарифмічними процесамигладких мір доведена теорема існування та єдиності розв'язку.

6. Отримано явний вигляд та оцінки росту для кратних інтегралів від логарифмічних процесів гладких мір.

7. Для лінійного інтегрального рівняння типу Вольтери з розширеним стохастичним інтегралом за логарифмічним процесом доведено існування та єдиність розв'язку.

Основні результати дисертації опубліковані у наступних роботах:

1. Интегральная аппроксимация стохастических дифференциальных уравнений с упреждающими начальными условиями //Труды Всеукраинской конференции молодых ученых. – Деп. у ДНТБ України 20. 07. 94 N 1302 УК – 94. – С. 261 – 268.

2. Интегральная аппроксимация стохастических дифференциальных уравнений с упреждающими начальными условиями // Укр. мат. журнал. – 1995. – 45. – N 7. – С. 934 – 943.

3. Регулярные гауссовские функционалы и симметрические уравнения типа Фредгольма // Праці Другої Всеукраїнської конференції молодих вчених. – Деп. у ДНТБ України 28. 08. 95 N 2034 УК – 95. – С. 86 – 93.

4. Local properties of solutions of equations with Gaussian strong random operators // Тези Міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Г. Гана, Чернівці, 10-15 жовт. 1994 р. – С. 77.

5. Симметрические стохастические уравнения типа Фредгольма // Тези IV міжнародної конференції ім. акад. Кравчука, Київ, 11-12 трав. 1995 р. – С. 145.

6. Local properties of solutions of stochastic integral equations // Stochastic Dynamical Systems: Theory and Applications. First Ukrain - Scandinavian Conference, Uzgorod, September 30 – October 6, 1995. – P. 53.

Кулик А.М. "Случайные операторы и стохастические интегральные уравнения"
Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика. Институт математики НАН Украины, Киев, 1996.

Защищается диссертация, посвященная исследованию стохастических интегральных уравнений с упреждением. Для стохастических уравнений типа Фредгольма с симметрическим стохастическим интегралом доказаны существование и единственность решения, абсолютная непрерывность конечномерных распределений и теорема Струка-Варадана для носителя распределения решения. Построено решение стохастического уравнения типа Вольтерра с расширенным стохастическим интегралом по логарифмическому процессу гладкой меры.

Kulik A.M "Random Operators and Stochastic Integral Equations.
Doctor of Philosophy thesis, speciality 01.01.05 - probability theory and mathematical statistics. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, 1996.

This thesis is devoted to the investigation of stochastic integral equations with anticipation. The existence and uniqueness of the solution of the stochastic Fredholm-type equations with the symmetric stochastic integral is proved and the absolute continuity of finite-dimensional distributions and the Strook-Varadhan theorem for the support of the distribution of this solution is demonstrated. The solution of stochastic Volterra-type equation with the extended stochastic integral by the logarithmic process is also got.

Ключові слова: випадковий оператор, симетрична суперпозиція, квазіінваріантна міра, топологічний носій, диференційована міра, логарифмічний процес, гладка відкрита множина.

Підп. до друку 6.03.96 . Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,63 . Ум фарбо-відб. 1,63 . Обл.-вид. арк. 1,0
Тираж 100 пр. Зам. 58 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3