

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

УДК 517.946.9

АСЛАНОВА Елена Михайловна

**НЕЛИНЕЙНЫЕ
ЗАДАЧИ КОНДУКТИВНОГО
И РАДИАЦИОННОГО
ТЕПЛООБМЕНА**

01.01.03 — математическая физика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев — 1996



00360374 (N)

Диссертация является рукописью.

Работа выполнена в отделе математической физики и теории нелинейных колебаний Института математики НАН Украины

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
БЕРЕЗОВСКИЙ А.А.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
СЕЛЕЗОВ И.Т.

доктор физико-математических наук, профессор
КАРНАУХОВ В.Г.

Ведущее предприятие: Киевский национальный университет им.Тараса
Шевченко

Защита диссертации состоится "21" мая 1996 г. в 15 часов
на заседании специализированного совета Д 01.66.02 при Институте ма-
тематики НАН Украины по адресу: 252601 Киев - 4, ГСП, ул. Терещен-
ковская, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан "10" 04 1996 г.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

Ученый секретарь
специализированного совета

ЛУЧКА А.Ю.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. Развитие теплотехники высоких и низких температур постоянно выдвигает задачи по расчету сложного теплообмена, в котором наряду с кондуктивным и конвективным существенную, если не главную, роль играет теплообмен излучением. В связи с этим особенно актуальными становятся вопросы разработки эффективных математических методов исследования сложных задач теплообмена излучением в сочетании с теплопроводностью.

Для многих технических приложений важны задачи по определению температурного поля $u(P, t)$ в твердых выпуклых телах Ω , с поверхности которых S осуществляется отвод тепла излучением по закону Стефана-Больцмана. Это приводит к необходимости решения линейного уравнения теплопроводности при нелинейном краевом условии.

Другой класс задач связан с расчетом только лучистого теплообмена между диатермически разделенными нагретыми телами. В рамках геометрической оптики последние сводятся к решению линейных интегральных уравнений лучистого теплообмена относительно интенсивности потоков падающего полусферического теплового излучения $E(P, t)$, $P \in S$ когда температура теплоизлучающих поверхностей предполагается известной.

Наконец, в наиболее сложных задачах для систем диатермически разделенных тел, а также тел с вогнутой частью поверхности $S_1 \subset S$ определению подлежит как температурное поле $u(P, t)$, $P \in \Omega$, так и падающие потоки теплового излучения $E(P, t)$, $P \in S_1$. При постановке таких задач, нелокальных по своему существу, приходится рассматривать уравнение теплопроводности при нелинейном краевом условии совместно с интегральным уравнением лучистого теплообмена. Математическое исследование таких интегро-дифференциальных задач сложно, требует привлечения разнообразного аппарата и до сих пор в общем виде не выполнено. Среди этих задач особое место в практическом отношении занимают стационарные и нестационарные одномерные задачи переноса тепла излучением и теплопроводностью в тонких оболочках, а также нелинейные задачи кондуктивного, конвективного и радиационного теплообмена для ограниченных и неограниченных цилиндрических тел.

В настоящее время практически отсутствуют аналитические или простые численные методы и алгоритмы, позволяющие с достаточной для практики точностью и быстротой выполнять тепловые расчеты задач кон-

дуктивного, конвективного и радиационного теплообмена. В связи с вышеизложенным особую актуальность приобретают численно-аналитические методы исследования температурных полей и интенсивностей потоков падающих излучений в тонких оболочках, ограниченных и неограниченных цилиндрических телах, представляющих собой конструктивные элементы высокотемпературных агрегатов. Разработке таких методов и посвящена настоящая работа.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ. Целью работы является разработка и исследование новых по постановке нелинейных нелокальных задач кондуктивного и радиационного теплообмена в телах сложной геометрической формы применительно к запросам энергонапряженной, в том числе космической, техники. Наряду с вопросами разрешимости полученных задач значительное внимание уделено построению алгоритмов отыскания их приближенных численно-аналитических решений.

ОБЩИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ. В работе используется метод нелинейных интегральных уравнений, вариационный и проекционно-сеточные методы, основанные на использовании финитных функций, асимптотические и численные методы. При доказательстве теорем существования и единственности решений применялись методы последовательных приближений, монотонных операторов, априорных оценок и другие методы функционального анализа.

НОВИЗНА И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ. В диссертационной работе рассмотрены новые по постановке задачи кондуктивно-радиационного теплообмена с нелокальностями как в краевых условиях, так и в дифференциальном уравнении, а также нагруженные нелинейные интегральные уравнения типа Гаммерштейна по координате и Вольтерра по времени. Разработаны приближенные численно-аналитические методы решения нелокальных нелинейных задач кондуктивного и радиационного теплообмена. Осуществлена редукция рассматриваемых задач к системам нелинейных алгебраических уравнений или к системам нелинейных уравнений Вольтерра. Получены условия, при которых нелинейная краевая задача теплоизлучения имеет единственное решение на множестве положительных функций, а приближенные решения, построенные методом последовательных приближений, образуют вилку. Изучена двумерная нелокальная задача для несимметрично разогреваемого бесконечного полого цилиндра. Получены априорные оценки в энергетической норме и доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения из класса $W_2^{1,0}(Q_T)$. Полученные результаты доведены до алгоритмов численных расчетов и могут

быть использованы при исследовании процессов теплопередачи в топках и печах, различных теплообменных аппаратах, а также в космосе.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. По материалам диссертации сделаны доклады на научном семинаре отдела математической физики и теории нелинейных колебаний (руководитель семинара академик Ю.А.Митропольский), на отчетных научных конференциях и научных семинарах кафедры дифференциальных уравнений и функционального анализа математического факультета Кабардино-Балкарского госуниверситета. Результаты диссертации представлены на двух Международных научных конференциях по уравнениям математической физики (г.Киев, 1995; г.Тернополь, 1995).

ПУБЛИКАЦИИ. Основные результаты проведенных исследований опубликованы в семи работах.

СТРУКТУРА ДИССЕРТАЦИИ. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы из 85 наименований и содержит 135 стр. машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность и практическое значение темы, приведен обзор существующей литературы, изложена структура и содержание диссертации.

Первая, вводная, глава посвящена постановкам основных задач по исследованию температурных полей теплоизлучающих тел. Принимается, что внутри выпуклого тела Ω температура удовлетворяет уравнению теплопроводности, а на части его поверхности S имеет место излучение тепла по закону Стефана-Больцмана, приводящее к нелинейному краевому условию. Дана общая характеристика задач сложного теплообмена, включающая интегральные и дифференциальные постановки задач. Особое внимание уделено выводу условий сопряжения на поверхностях раздела составных сред и рассмотрены импедансные, локальные и нелокальные краевые условия. С помощью формул и функций Грина осуществлен переход от начально-краевой задачи.

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) - c u_t = -w, \quad P \in \Omega, \quad t > 0,$$
$$u(P, 0) = u_0(P), \quad P \in \Omega, \quad (1)$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u + c u_t = q(P, t, u), \quad P \in S, \quad t > 0$$

к интегральным уравнениям минимальной размерности типа Гаммерштейна по координате $P \in S$ и Вольтерра по времени t

$$u(P, t) = \int_0^t \int_{\Omega} G(P, Q; \tau - t) w(Q, \tau) dV_Q d\tau + \operatorname{op} \int_{\Omega} G(P, Q; 0 - \tau) u_0(Q) dV_Q + \\ + C \int_{\Omega} G(P, Q; 0 - t) u_0(Q) dS_Q + \int_0^t \int_{\Omega} G(P, Q; \tau - t) q[u(Q, \tau)] dS_Q d\tau, \quad P \in S. \quad (2)$$

Здесь же рассмотрены вопросы разрешимости соответствующих стационарных задач (1), когда $u = u(P)$, начальное условие исчезает, импедансное краевое условие становится нелинейным краевым условием, а уравнение (2) - нелинейным интегральным уравнением типа Гаммерштейна

$$u(P) = f(P) - \frac{C}{\lambda} \int_{\Omega} G(P, Q) [\varepsilon(u) u^4(Q) - \varepsilon(u_0) u_0^4(Q)] dS_Q, \quad P \in S. \quad (3)$$

При определенных ограничениях установлены теоремы единственности и существования положительного решения задачи стационарного теплоизлучения. Рассмотрен вопрос построения обобщенной функции Грина для оператора Лапласа.

Во второй главе рассматриваются различные постановки задач кондуктивного и радиационного теплообмена для невыпуклых тел и оболочек, когда на вогнутой части $S_1 \subset S$ поверхности имеет место теплообмен излучением. Дан вывод интегрального уравнения радиационного теплообмена и с помощью резольвенты $R(P, Q)$ его ядра $K(P, Q)$ получены выражения для интегральной полусферической интенсивности падающего излучения $E(P)$ через температуру поверхности S_1 -

$$E(P) = F(P, u) + r \int_{S_1} R(P, Q) F(Q, u(Q)) dS_Q, \quad P \in S_1, \quad (4)$$

где $r = 1 - \varepsilon$;

$$F(P, u(P)) = E_{\text{ист}}(P) + \varepsilon \int_{S_1} K(P, Q) u^4(Q) dS_Q;$$

$$K(P, Q) = \frac{\cos(\widehat{PQ}, \vec{n}_P) \cdot \cos(\widehat{QP}, \vec{n}_Q)}{\pi |P - Q|^2}.$$

Осуществлена конкретизация ядер $K(P, Q)$ интегрального уравнения лучистого теплообмена для тел, ограниченных параллельными, плоскими или цилиндрическими поверхностями.

Рассмотрена общая естественная постановка задач кондуктивного и радиационного теплообмена, сводящаяся к совместному решению нелиней-

ной начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в Ω и интегрального уравнения лучистого теплообмена на S_1 -

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) - \operatorname{ср} u_t = -w, \quad P \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad P \in \Omega, \quad (5)$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u + C u_t = \varepsilon \chi(P) E(P, t) + \varphi_0(P, t) - \varphi_1(P, t, u), \quad P \in S, \quad t > 0;$$

$$E(P, t) = E_{\text{ист}}(P, t) + \int_{S_1} K(P, Q) (r E(Q, t) + \varphi_1(Q, t, u(Q, t))) ds_Q, \quad P \in S_1, \quad (6)$$

где $\chi(P)$ - характеристическая функция поверхности S_1 , представляющая собой одну из сложных практически не исследованных задач математической физики. С помощью полученного выражения для $E(P, t)$ через $u(P, t)$ (4) осуществлен переход к начально-краевой задаче для уравнения теплопроводности (5) с нелокальным нелинейным краевым условием

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u + C u_t = \varepsilon \chi(P) \left[E_{\text{ист}}(P, t) + (1 - \varepsilon) \int_{S_1} R(P, Q) E_{\text{ист}}(Q, t) ds_Q + \int_{S_1} R(P, Q) \varphi_1(Q, t, u(Q, t)) ds_Q \right] + \varphi_0(P, t) - \varphi_1(P, t, u), \quad P \in S, \quad t > 0. \quad (7)$$

В этой же главе рассмотрены задачи кондуктивного и радиационного теплообмена в термически тонких оболочках, когда изменением температурного поля по их толщине можно пренебречь. Здесь введено понятие оболочки переменной толщины и получены дифференциальные соотношения, связывающие срединную $\bar{\varphi}$ и ограничивающие такую оболочку поверхности $\bar{\varphi}_-, \bar{\varphi}_+$. Осуществлено усреднение температурного поля по толщине оболочки, в результате чего получены новые постановки существенно нелинейных начально-краевых задач с нелокальностями как в краевом условии, так и в дифференциальном уравнении -

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\tau(\lambda \operatorname{grad}_\tau h \bar{u}) + \frac{\operatorname{mes} \varphi}{\operatorname{mes} \Phi} [\alpha_+ u + C_+ u_t] + \frac{\operatorname{mes} \varphi}{\operatorname{mes} \Phi} [\alpha_- u + C_- u_t] - \bar{C} u_t = \\ = h \bar{w} + \frac{\operatorname{mes} \varphi}{\operatorname{mes} \Phi} [\varphi_0^+(P, t) - \varphi_1^+(P, t, u)] + \frac{\operatorname{mes} \varphi}{\operatorname{mes} \Phi} [\varepsilon [E_{\text{ист}}(P, t) + \\ + r \int_{S_1} R(P, Q) E_{\text{ист}}(Q, t) ds_Q + \int_{S_1} R(P, Q) \varphi_1(Q, t, u(Q, t)) ds_Q] + \\ + \bar{\varphi}(P, t) - \bar{\varphi}(P, t, u)] \quad P \in \Phi, \quad t > 0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$u(P, 0) = u_0(P), \quad P \in \Phi \cup L = \Phi,$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u + C u_t = \varphi_0(P, t) - \varphi_1(P, t, u) + \varepsilon \chi(P) \left[E_{\text{ист}}(P, t) + (1-\varepsilon) h \int_L R(P, Q) E_{\text{ист}}(Q, t) \frac{mesl}{mesl} dl + h \int_L R(P, Q) \varphi_1(Q, t, u(Q, t)) \frac{mesl}{mesl} dl \right] \quad P \in L, \quad t > 0. \quad (9)$$

Кроме интегро-дифференциальной (5) и нелокальных (7)-(9) постановок рассмотрена интегральная формулировка задачи, объединяющая интегральное уравнение минимальной размерности и интегральное уравнение лучистого теплообмена

$$w(P, t) = w_L(P, t) - \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} G(P, Q; t-\tau) [\sigma w^A(Q, \tau) - \chi(Q) E(Q, \tau)] d\Omega_Q d\tau, \quad P, Q \in S, \quad t, \tau > 0, \quad (10)$$

$$E(P, t) = E_{\text{ист}}(P, t) + \int_{S_1} K(P, Q) [rE(Q, t) + \varepsilon \sigma w^A(Q, t)] d\Omega_Q, \quad P \in S_1, \quad t, \tau > 0.$$

Осуществлено усреднение полученных интегральных уравнений задач кондуктивного и радиационного теплообмена (10) для термически тонких оболочек. Это достигнуто посредством усреднения функций Грина $G(P, Q)$ и ядра $K(P, Q)$. С помощью такого усреднения и последующего учета симметрии получены простейшие одномерные нелинейные интегральные уравнения стационарных задач кондуктивного и радиационного теплообмена вида

$$w(x) = w_L(x) - \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} g(\xi, x) [\sigma w^A(\xi) - E(\xi)] d\xi, \quad x_1 < x < x_2, \quad (11)$$

$$E(x) = E_{\text{ист}}(x) + \int_{x_1}^{x_2} k(\xi, x) [rE(\xi) + \varepsilon \sigma w^A(\xi)] d\xi, \quad x_1 < x < x_2.$$

Приведены явные выражения для $g(x, \xi)$ и $k(x, \xi)$ в случае конечной и бесконечной цилиндрических оболочек.

В последнем, пятом, параграфе второй главы рассматривается метод конечномерной аппроксимации решения полученных интегральных уравнений, основанный на использовании финитных функций. Приближенные решения разскиваются в виде линейных комбинаций в классе кусочно-непрерывных функций

$$w(P) \cong w^N(P) = \sum_{i=1}^N \bar{w}_i \chi_i(P), \quad E(P) \cong E^N(P) = \sum_{i=1}^N E_i \chi_i(P), \quad (12)$$

где \bar{w}_i и E_i — средние значения искомым функций на подобластях разбиения S_i области S . Метод Бубнова-Галеркина для системы интегральных уравнений соответствующих (10) стационарных задач приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений вида

$$\bar{w}_j = \bar{w}_{lj} - \sum_{i=1}^N a_{ij} [\sigma \bar{w}_i^d - E_i], \quad j = \overline{1, N}, \quad (13)$$

$$E_j = E_{0j} + \sum_{i=1}^N b_{ij} [r E_i + \varepsilon \sigma \bar{w}_i^d], \quad j = \overline{1, N}.$$

Конкретные задачи кондуктивного и радиационного теплообмена в цилиндрических оболочках и системах параллельных пластин рассмотрены в третьей главе диссертации. Для конечной цилиндрической оболочки осуществлено усреднение температурного поля по толщине, применен метод Рунге и для определения безразмерных температуры $u(x)$ и интенсивности падающего потока теплового излучения $e(x)$ на каждом временном слое получена следующая система нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна:

$$e(x) = \varphi(x) + \int_0^{x_0} K(x-\xi) f_1(u(\xi), e(\xi)) d\xi, \quad (14)$$

$$u(x) = \psi(x) - S_B u^4(x_0) x - \int_0^{x_0} G(x, \xi) f_2(u(\xi), e(\xi)) d\xi,$$

где

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{\Delta \tau} \int_0^{x_0} G(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi, \quad \psi(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}} - x \right],$$

$$f_1(u, e) = \frac{1}{2} (\varepsilon u^4 + \kappa e), \quad f_2(u, e) = S_d (u^4 - e) + \frac{u}{\Delta \tau},$$

$$K(x-\xi) = 1 - |x-\xi| \frac{(x-\xi)^2 + 6}{[(x-\xi)^2 + 4]^{3/2}}, \quad G(x, \xi) = x + (\xi-x)\eta(x-\xi).$$

Исследованы свойства ядра $K(x-\xi)$, построена его резольвента и с ее помощью разрешено первое из интегральных уравнений (14). После исключения $e(x)$ из второго уравнения (14) получено нагруженное интегро-степенное уравнение типа Ляпунова-Шмидта для определения $u(x)$

$$u(x) = f(x) - S_k u^4(x_0)x - \frac{1}{\Delta\tau} \int_0^{x_0} G(x, \xi) u(\xi) d\xi - S_a \int_0^{x_0} \Phi(x, \xi) u^4(\xi) d\xi, \quad (15)$$

где $\Delta\tau$ - временной шаг; S_k , S_a - коэффициенты Старка; $f(x)$ - известная функция; $\Phi(x, \xi)$ определяется по $G(x, \xi)$ и сверткам ядер $G(x, \xi)$, $K(x-\xi)$ и $R(x, \xi)$.

На каждом временном слое получена система нелинейных интегральных уравнений минимальной размерности для определения усредненного по толщине нестационарного температурного поля $u(\varphi, t)$ и интенсивности падающего излучения $E(\varphi, t)$ несимметрично разогреваемой бесконечной цилиндрической оболочки

$$\begin{aligned} E(\varphi) &= E_{\text{ист}}(\varphi) + \int_0^{2\pi} K(\varphi-\psi) (\gamma E(\psi) + f[u(\psi)]) d\psi, \\ u(\varphi) &= g(\varphi) + \int_0^{2\pi} G(\varphi-\psi) (\beta E(\psi) - \gamma f[u(\psi)]) d\psi, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$K(\varphi-\psi) = \frac{1}{4} \sin \left| \frac{\varphi-\psi}{2} \right|, \quad G(\varphi-\psi) = \text{ch}[k(\pi-|\varphi-\psi|)] / 2k \text{sh} k\pi,$$

а $E_{\text{ист}}(\varphi)$, $g(\varphi)$ - известные функции. Построение приближенного решения системы (16) проекционно-сеточным методом, использующим финитные функции-крышечки и линейаризацию функции $f(u)$ на интервале $u \in [u_{i-1}, u_i]$, сведено к решению следующей системы нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых значений u_i и E_i искомым функций u и E :

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{n=0}^N \alpha_{1n} u_n - \beta \sum_{n=0}^N G_{in} E_n &= g_i - \sum_{i=1}^N g_{it} \Phi_0(u_{i-1}, u_i) - \\ &- \gamma \sum_{i=1}^N \sum_{n=0}^N G_{int} \Phi_1(u_{i-1}, u_i) u_n, \\ \sum_{n=0}^N \alpha_{2n} E_n - \gamma \sum_{n=0}^N K_{1n} E_n &= e_i - \sum_{i=1}^N K_{it} \Phi_0(u_{i-1}, u_i) - \\ &- \sum_{i=1}^N \sum_{n=0}^N K_{int} \Phi_1(u_{i-1}, u_i) u_n. \end{aligned} \right. \quad (19)$$

$u_0 = u_N, \quad E_0 = E_N, \quad i = \overline{0, N-1}.$

Элементы матриц и правые части системы получены в виде интегралов от произведений ядер $K(\varphi-\psi)$ и $g(\varphi-\psi)$ на функции-крышечки $\omega_i(\varphi)$. Выполнено простое, но довольно трудоемкое вычисление таких интегралов. Решение системы (19) может быть получено методом Ньютона.

Изучена двумерная нелокальная задача для несимметрично разогреваемого бесконечного полого цилиндра. Получены априорные оценки в энергетической норме и доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения из класса $W_2^{1,0}(Q_T)$.

Два последних параграфа третьей главы содержат исследования задач радиационного и кондуктивного теплообмена в системе двух неограниченных и ограниченных диатермически разделенных параллельных пластин. В случае неограниченных пластин задача сведена к системе четырех нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна. Проекционно-сеточным методом в сочетании с методом Рунге осуществлена их конечномерная аппроксимация к системам нелинейных алгебраических уравнений на каждом временном слое. Предложен итерационный процесс решения таких систем. Результаты численных расчетов проиллюстрированы графиками динамики температурных полей в конкретных системах бесконечных параллельных пластин.

Рассмотрены также нелокальные постановки задач кондуктивного и радиационного теплообмена в системе двух тонких параллельных пластин. В простейшем случае они представлены следующей нелокальной задачей:

$$u_{xx} - a^{-2}u_t - \delta^{-1}u - \delta^{-1}f(u) - \epsilon\delta^{-1}\int_{l_1}^{l_2} R(x,\xi)f(u(\xi))d\xi = -w,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{20}$$

$$u_x - hu = 0, \quad x = l_1; \quad u_x + hu = 0, \quad x = l_2,$$

где $R(x,\xi)$ - резольвента ядра $K(x,\xi) = (a^2/2)[a^2 + (x-\xi)^2]^{-3/2}$. Методом Рунге эта нелокальная начально-краевая задача сведена к нелокальной краевой задаче относительно значений $u(x)$ на данном временном слое. Решение последней можно получить проекционно-сеточным методом.

Получены нагруженные нелинейные интегральные уравнения двумерных задач кондуктивного и радиационного теплообмена в случае параллельных пластин конечных размеров. В частности, в простейшем случае, - следующее уравнение:

$$u(P, t) = u_{\text{л}}(P, t) - \int_0^t \int_{\Omega} \mathbb{W}(P, Q; t-\tau) u^d(Q, \tau) d\Omega d\tau - \\ - \int_0^t \int_L G(P, Q; t-\tau) u^d(Q, \tau) dL d\tau, \quad L = \{(x, y): x \pm \alpha y = 1\}. \quad (21)$$

Предложен специальный проекционно-сеточный метод построения приближенного решения этого уравнения, основанный на использовании конечномерных аппроксимаций с помощью финитных функций как в области Ω , так и на ее границе L -

$$u(P, t) \approx \sum_{i=1}^N \bar{u}_i(t) \chi_i(P), \quad P \in \Omega, \quad w(P, t) \approx \sum_{j=1}^M \bar{w}_j(t) \omega_j(P), \quad P \in L. \quad (22)$$

Методом Бубнова-Галеркина получены следующие системы нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра относительно средних значений $\bar{u}_i(t)$ и $\bar{w}_j(t)$ соответственно в подобластях Ω_i и L_j разбиения областей Ω и L :

$$\bar{u}_k = \bar{u}_{\text{л}k} - \sum_{i=1}^N \int_0^t \alpha_{ik}(t-\tau) \bar{u}_i^d(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^M \int_0^t \beta_{jk}(t-\tau) \bar{w}_j^d(\tau) d\tau, \quad k=1, N,$$

$$\bar{w}_l = \bar{w}_{\text{л}l} - \sum_{i=1}^N \int_0^t \gamma_{il}(t-\tau) \bar{u}_i^d(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^M \int_0^t \delta_{jl}(t-\tau) \bar{w}_j^d(\tau) d\tau, \quad l=1, M.$$

Для решения этих систем применимы итерационные методы.

Основные результаты диссертационной работы могут быть сформулированы следующим образом:

- Разработаны новые по постановке задачи кондуктивного и радиационного теплообмена с нелокальностями как в краевом условии, так и в дифференциальном уравнении.

- Исследованы ядра $K(P, Q)$ интегральных уравнений лучистого теплообмена и их резольвенты $R(P, Q)$ и установлена однозначная разрешимость линейного относительно E интегрального уравнения лучистого теплообмена.

- Развита метод нелинейных интегральных уравнений применительно к построению приближенных решений одномерных и двумерных задач кондуктивного и радиационного теплообмена.

- Рассмотрены вопросы конечномерной аппроксимации решений полученных нелинейных интегральных уравнений кондуктивного и радиационного теплообмена, основанные на использовании финитных функций (характеристических и функций-крышечек). Проекционно-сеточным методом, использующим такие аппроксимации, метод Рунге и предложенную линейри-

зацию нелинейностей на отрезке $\{u_{t-1}, u_t\}$, задача сведена к нахождению решений систем нелинейных алгебраических уравнений как для стационарных, так и для нестационарных задач, или к решению систем нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра.

- Изучена двумерная нелокальная задача для несимметрично разогреваемого бесконечного полого цилиндра. Получены априорные оценки в энергетической норме и доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения из класса $W_2^{1,0}(Q_T)$.

- Рассмотрены двумерные задачи кондуктивного и радиационного теплообмена в системе двух параллельных пластин. Методом интегральных уравнений в простейшем случае задача сведена к двумерному нагруженному нелинейному интегральному уравнению относительно температуры $u(x, t)$. Предложен вариант проекционно-сеточного метода, использующий аппроксимацию решения как в области, так и на ее границе.

Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах:

1. *Асланова Е.М.* Интегральные уравнения кондуктивного и радиационного теплообмена // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. - Киев: Ин-т математики НАНУ, 1994. - С. 5-8.
2. *Асланова Е.М.* Интегральные уравнения кондуктивного и радиационного теплообмена в конечной цилиндрической оболочке // Краевые задачи математической физики. - Киев: Ин-т математики НАНУ, 1995. - С. 35-43.
3. *Асланова Е.М.* Нелокальные задачи кондуктивного и радиационного теплообмена в системе двух тонких параллельных пластин // Краевые задачи математической физики. - Киев: Ин-т математики НАНУ, 1995. - С. 10-14.
4. *Асланова Е.М.* Радиационный и кондуктивный теплообмен в системе двух параллельных пластин // Четверта міжнародна наук. конф. ім. акад. М.Кравчука, Київ, 11-13 трав. 1995 р.: Тез. доп. - Київ, 1995. - С. 22-23.
5. *Асланова О.М.* Нелокальні задачі кондуктивного тепломасопереносу // Міжнародна наук. конф. до 150-річчя Івана Пулюя, Тернопіль, 25-28 трав. 1995 р.: Тез. доп. - Тернопіль, 1995. - С. 12.
6. *Асланова Е.М.* Нелинейные нелокальные задачи теплопроводности для несимметрично разогреваемого полого цилиндра // Задачи со свободными границами и нелокальные задачи для нелинейных параболических уравнений. - Киев, 1996. - С. 1-10. - (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 96.7).
7. *Асланова Е.М., Березовская Л.М.* Кондуктивно-радиационный теплообмен в системе двух параллельных конечных пластин // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. - Киев: Ин-т математики НАНУ, 1995. - С. 14-18.

Асланова Е. М. Нелинейные задачи кондуктивного и радиационного теплообмена

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика, Ин-т математики НАН Украины, Киев, 1996.

Разработаны и исследованы математические модели кондуктивного и радиационного теплообмена в телах сложной геометрической формы применительно к запросам энергонапряженной, в том числе космической, техники. Наряду с вопросами разрешимости полученных новых по постановке нелокальных задач основное внимание уделено разработке конструктивных методов решения таких задач.

Aslanova E.M. Nonlinear problems of conductive and radiant heat exchange.

The dissertation is presented for obtaining the degree of Candidate of Sciences in Physics and Mathematics on subject 01.01.03 – mathematical physics. Institute of Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences. Kiev, 1996.

The mathematical models of conductive and radiant heat exchange in bodies of complicated geometrical form applying to needs of power-tense, including cosmic, technique are elaborated and investigated. Side by side with questions of solvability of obtained new in setting nonlocal problems the main attention is devoted to elaboration constructive methods for solving such kind problems.

Ключевые слова: теплоизлучение, интегральные уравнения, нелокальные задачи, конструктивные методы.

Подп. в печ. 12.02.96. Формат 60×84×16. Бумага тип. Офс. печать.
Усл. печ. л. 0,93. Усл. кр.-отт. 0,83. Уч.- изд. л. 0,75.
Тираж 100 экз. Заказ 79. Бесплатно.

Отпечатано в Институте математики НАН Украины
252601 Киев-4, ГСП, ул.Терещенковская, 3.]

Асланова

ЛНБ им. В. Стефанива
АН Украины

285345

AB 34.446