КИЕВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМЕНИ ТАРАСА ШЕВЧЕНКО

На правах рукописи

ГАРАВУЛОВ САПАРБАЙ АГЫЛОВИЧ

УДК 519.6:517.977.56

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ

01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Киев-1996

Диссертацией является рукопись

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики факультета кибернетики Киевского университета имени Тараса Шевченко.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент ФЕДОРЧЕНКО И.С.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор ГАЛИЦИН А.С., кандидат физико-математических наук, доцент ДОВГИЙ Б.П.

Ведущая организация: Институт кибернетики имени В.М.Глушкова НАН Украины

Защита состоится 16 мая 1996г. в 14.00 час. на заседании специализированного совета Д 01.01.23 в Киевском университете имени Тараса Шевченко
по адресу:
252127, г. Киев-127, просп. Академика Глушкова, 6, факультет кибернетики, ауд. 40.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Киевского университета имени Тараса Шевченко (ул. Владимирская,58).

Автореферат разослан 12 апреля 1996 года.

Ученый секретарь
специализированного ученого совета,
кандидат физико-математических наук В.П.Шевченко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Тепловое состояние многих элементов конструкций и деталей в технологических процессах обработки металлов, охлаждения высокофорсированных двигателей, отвода мощных тепловых потоков в ядерных реакторах, МГД и ЭГД генераторах, линиях электропередач и др. определяет их нагрузочные возможности, качество функционирования, надежность эксплуатации. Качественное проектирование и эффективная эксплуатация таких обьектов невозможны без применения средств автоматического управления, при разработке которых применяется теория оптимального управления процессами теплопроводности.

Сложность математической постановки задач оптимизации процессов теплопроводности требует разработки приближенных методов их решения. Важной проблемой является аппроксимация этих задач подходящими оптимизационными задачами в конечномерных пространствах, исследование которых дало бы пути их численного решения. Хотя в этом направлении ведутся интенсивные исследования, указанная проблема остается и ныне актуальной, особенно в отношении построения удобных и надежных в применении алгоритмов численного нахождения аппроксимаций оптимального управления источниками тепла и тепловым потоком при ограничениях на управление.

Целью настоящей работы является исследование аппроксимаций в классе кусочно-постоянных функций и разработка алгоритмов численного решения задач оптимального управления источниками тепла и тепловым потоком в стационарных и нестационарных процессах теплопроводности в одно- двух- или трехмерных твердых телах с переменными теплофизическими характеристиками при квадратичной функции стоимости как без ограничений так и с ограничением в форме неравенств на управление.

Методы исследования. Основу математического исследования составили методы математической физики, вычислительной математики, функционального анализа и математического программирования.

Научная новизна. Построены аппроксимации в классе кусочно-постоянных функций задач оптимального управления источниками тепла и тепловым потоком в стационарных и нестационарных процессах теплопроводности в стержне, тонкой пластине и твердом теле при граничных условиях Дирихле или Неймана, квадратичной функцией стоимости без ограничений и с ограничениями в виде неравенств на управление.

Установлено существование и единственное решение аппроксимирующих задач и их сходимость к решению исходных задач по функции стоимости, управлении и температурному состоянию в соответствующих фукциональных пространствах при стремлении шагов сетки к нулю.

Получены соотношения, характеризующие решение аппроксимирующих задач в виде систем линейных или нелинейных (в зависимости от множества допустимых управлений) алгебраических уравнений относительно значений температуры, управления и сопряженных переменных в узлах сетки и позволяющие строить алгоритмы численного решения задач оптимизации тепловых процессов.

Практическая ценность. Результаты диссертации нашли применение при разработке бюджетной темы N 505 "Оптимальное управление процессами теплопроводности", выполняемой в Киевском университете имени Тараса Шевченко.

Результаты работы могут найти применение при проектировании и эксплуатации средств автоматического регулирования технологическими процессами в металлургической, машиностроительной, теплоэнергетической, химической и др. отраслях промышленности.

Апробация работы. Результаты работы неоднократно докладывались на семинарах кафедры вычислительной математики факультета кибернетики Киевского университета имени Тараса Шевченко, а также на следующих конференциях:

1. "Памяти академика М.П.Кравчука" (к 100-летию со дня рождения). Научно-техническая конференция, г. Киев, 1992г.

2. "Проблемы нелинейного анализа". Научная конференция, г. Махачкала, 1992г.

3. "Применение вычислительной техники и математических методов в научных исследованиях". Научно-техническая конференция, г. Львов, 1992г.

4. "Моделирование и исследование устойчивости систем". Украинская конференция, г. Киев, 1993 г.

5. "Моделирование и исследование устойчивости систем". Украинская конференция, г. Киев, 1995 г.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 6 работ [1-6] .

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, разбитых на 10 параграфов, заключения и списка цитированной литературы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, кратко изложено состояние проблемы численного решения задач оптимального управления процессами теплопроводности, сформулированы цель и задача исследования, изложено содержание диссертации.

Первая глава посвящена исследованию аппроксимаций задач оптимального управления стационарными процессами теплопроводности.

В параграфе 1.1 рассмотрена задача нахождения

$$\inf_{v\in U_\partial} J(v) \tag{1}$$

где

$$J(v) = \int_\Omega ((T(x)-T_\partial(x))^2 + \nu\, v^2(x))dx, \tag{2}$$

а $T\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ - обобщенное решение краевой задачи

$$AT := -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda(x)\frac{\partial T}{\partial x_i}) + \beta T = f + v \quad \text{в } \Omega, \tag{3}$$

$$T = 0 \quad \text{на } \Gamma . \tag{4}$$

Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^m$ с границей Γ, $m \in \{1,2,3\}$, λ, β - известные коэффициенты, f - заданная функция, $v \in U_\partial$ - управления, U_∂- выпуклое замкнутое подмножество в $L_2(\Omega)$.

Исследована последовательность аппроксимирующих задач

$$\inf_{\tilde{v}_h \in U_{\partial h}} J_h(\tilde{v}_h), \tag{5}$$

где $U_{\partial h} = H_h \cap U_\partial$, H_h - пространство кусочно-постоянных на Ω_h функций, $\bar{\Omega}_h = \bigcup_{\bar{\omega}_{(kh)} \subseteq \Omega} \bar{\omega}_{(kh)}$, $d_h = \int_{\Omega_h} T_\partial^2\, dx$,

$\omega_{(kh)} := \{x=(x_1,\dots,x_m) \in \mathbb{R}^m : k_i h_i \le x_i < (k_i + 1)h_i, h_i > 0, k_i \in \mathbb{Z}, i=\overline{1,m}\}$,

Γ_h - граница $\bar{\Omega}_h$; $\Omega_h = \bar{\Omega}_h \setminus \Gamma_h$.

$$J_h(\tilde{v}_h) = \Delta_h \sum_{\Omega_h} (T_h^2 - 2T_h T_{\partial h} + \nu v_h^2) + d_h, \tag{6}$$

T_h определяется разностной схемой

$$A_h T_h := - \sum_{i=1}^{m} (\lambda_h T_{hx_i})_{\bar{x}_i} + \beta_h T_h = f_h + v_h \quad \text{в } \Omega_h, \tag{7}$$

$$T_h = 0 \quad \text{на } \Gamma_h,$$

λ_h, β_h, f_h, $T_{\partial h}$ - усреднения по ячейкам $\omega_{(kh)}$ функций λ, β, f, T_∂, $\tilde{v}_h$ - кусочно-постоянное восполнение сеточной функции v_h.

Для произвольно выбранного $v \in U_\partial$ получена оценка решения $T_h(v)$ системы (7) в сеточной норме, соответствующей энергетической, с помощью которой установлена теорема 1.1 о существовании и единственности решения $T_h(v)$ системы (7) в Ω_h

для произвольно взятых $v \in U_\partial$ и $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ его устойчивости в сеточной норме, соответствующей энергетической, сходимости последовательности $\{\tilde{T}_h(v_h)\}$ в $L_2(\Omega)$ к обобщенному решению $T(v)$ задачи (3),(4) и слабой сходимости в $L_2(\Omega)$ последовательности $\{\tilde{T}_{h,x_i}(v)\}$ к $\dfrac{\partial T(v)}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,m}$.

Для последовательности задач (5) доказана

ТЕОРЕМА 1.2. Для любого h существует единственное решение $\tilde{v}_h^\circ \in U_{\partial h}$ задачи (5).
При $h \to 0$

$$J_h^\circ \to J(u), \tag{8}$$

$$\tilde{v}_h^\circ \to u \quad \text{в} \quad L_2(\Omega), \tag{9}$$

$$\tilde{T}_h^\circ \to T(u) \text{ в } L_2(\Omega),\ \tilde{T}_{h,x_i}^\circ \to \frac{\partial T(u)}{\partial x_i} \text{ слабо в } L_2(\Omega), i=\overline{1,m} \tag{10}$$

где u - решение задачи (1), $T(u)$ - решение задачи (3), (4) при $v = u$, T_h° - решение системы (7) при $v_h = \tilde{v}_h^\circ$. $J_h^\circ = J_h(\tilde{v}_h^\circ)$.

В работе рассмотрены следующие случаи задания множества U_∂

(i) $U_\partial = L_2(X)$;

(ii) $U_\partial = \{ v \in L_2(X)\colon v \ge 0$ почти всюду в $X \}$;

(iii) $U_\partial = \{ v \in L_2(X)\colon \xi \le v \le \eta$ почти всюду в X ;
$\xi, \eta \in L_\infty(X)$ заданные в X функции $\}$,

где X - некоторое множество из $\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{R}^{m+1}$.

Доказана

ТЕОРЕМА 1.3. Решения v_h° аппроксимирующих задач (5) соответственно случаям (i)-(iii) задания множества U_∂ при $X = \Omega$ характеризуются соотношениями

$$\text{(i)}\quad A_h T_h^o - v_h^o = f_h \text{ в } \Omega_h,\ T_h^o = 0 \text{ на } \Gamma_h, \tag{11}$$

$$A_h' P_h - T_h^o = -T_{\partial h} \text{ в } \Omega_h,\ P_h = 0 \text{ на } \Gamma_h;$$

$$v_h^o = q_h \text{ в } \Omega_h; \tag{12}$$

$$\text{(ii)}\quad (11) \text{ и } v_h^o = \max(\, q_h, 0\,) \text{ в } \Omega_h \tag{13}$$

$$\text{(iii)}\quad (11) \text{ и } v_h^o = \Phi(\,\xi_h, \eta_h, \nu) q_h \text{ в } \Omega_h, \tag{14}$$

где $q_h = -\dfrac{1}{\nu} P_h$, $\Phi(\,\xi_h, \eta_h, \nu) q_h = \begin{cases} \xi_h, & q_h < \xi_h, \\ q_h, & \xi_h \le q_h \le \eta_h, \\ \eta_h, & q_h > \eta_h\ . \end{cases}$

Соотношения (11), (12) представляют собой систему $3n$ линейных, а (11), (13) и (11), (14) - нелинейных алгебраических уравнений относительно $3n$ неизвестных v_h^o, T_h^o, P_h в вершинах сетки Ω_h.

В параграфе 1.2 исследуется задача (1), где функция стоимости задается равенством (2), а $T \in W_2^1(\Omega)$ - обобщенное решение задачи (3) при граничном условии

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{15}$$

где n - внутренняя нормаль к Γ.

Считая коэффициенты и известные функции продолженными с Ω на некоторую область $\tilde{\Omega} \supset \bar{\Omega}$ с сохранением ранее указанных свойств, а $v = 0$ вне $\bar{\Omega}$ построена последовательность аппроксимирующих задач (5), где

$$J_h(\tilde{v}_h) = \Delta_h \sum_{\Omega_h^*} (T_h^2 - 2T_h T_{\partial h} + \nu v_h^2) + d_h^*, \tag{16}$$

T_h удовлетворяет системе разностных уравнений

$$A_h T_h = F_h f_h + G_h v_h \quad \text{на} \quad \bar{\Omega}^*_h, \qquad (17)$$

разностные операторы A_h, F_h и G_h порождаются аппроксимацией интегрального тождества, определяющего обобщенное решение краевой задачи (3),(15), в классе кусочно-постоянных функций, $\bar{\Omega}^*_h$ - объединение ячеек $\bar{\omega}_{(kh)}$, покрывающих $\bar{\Omega}$ и имеющих с Ω непустое пересечение, Γ^*_h - граница $\bar{\Omega}^*_h$, $\Omega^*_h = \bar{\Omega}^*_h \setminus \Gamma_h$.

Для произвольно заданного $v \in U_\partial$ установлена оценка решения $T_h(v)$ задачи (17) в сеточной норме, соответствующей энергетической, с использованием которой доказана теорема 1.4, являющаяся аналогом теоремы 1.1 для рассматриваемого случая.

Для последовательности решений аппроксимирующих задач установлена

ТЕОРЕМА 1.5. Для произвольного h существует единственное решение $\tilde{v}^\circ_h$ задачи (5). При $h \to 0$ имеют место предельные соотношения (8)-(10), причем

$$\tilde{T}^\circ_h \longrightarrow T(u) \quad \text{в} \quad L_2(\Gamma),$$

где u - решение задачи (1), T(u) - соответствующее ему решение задачи (3),(15), T°_h - решение системы (17) при $v_h = v^\circ_h$

Решения $\tilde{v}^\circ_h$ аппроксимирующих задач и зависимости от множества допустимых управлений при $X = \Omega$ характеризуются соотношениями

(i) $\quad A_h T^\circ_h - G_h v^\circ_h = F_h f_h, \quad A'_h P_h - T^\circ_h = -T_{\partial h}$ в $\bar{\Omega}^*_h$, (18)

и (12) в Ω^*_h;

(ii) (18) и (13) в Ω^*_h;

(iii) (18) и (14) в Ω_h^* ;

где $q_h = -\frac{1}{\nu} G_h' P_h$.

(18), (12) представляют собой систему $(2r + n)$ линейных, а (18),(13) и (18),(14) - нелинейных алгебраических уравнений, относительно $2r + n$ неизвестных - значений сеточных функций T_h^o, P_h в узлах сетки $\bar{\Omega}_h^*$, и v_h^o в Ω_h^*, где r - число узлов сетки $\bar{\Omega}_h^*$.

В параграфе 1.3 рассмотрена задача (1), где

$$J(v) = \int_\Omega (T-T_\partial)^2 dx + \nu \int_\Gamma v^2 d\Gamma, \tag{19}$$

T - решение краевой задачи

$$AT = f \text{ в } \Omega, \; -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = g + v \text{ на } \Gamma, \tag{20}$$

g - заданная мощность теплового потока, $g \in L_2(\Gamma)$; v - управляемая мощность теплового потока, $v \in U_\partial \subset L_2(\Gamma)$; U_∂ - выпуклое замкнутое подмножество в $L_2(\Gamma)$, остальные обозначения те же, что и ранее.

Получена последовательность аппроксимирующих задач (5), где

$$J_h(v_h) = \Delta_h \sum_{\Omega_h^*} (T_h^2 - 2T_h T_{\partial h}) + d_h^* + \nu \sum_{\Pi_h} \delta_{(kh)} v_h^2, \tag{21}$$

а T_h - решение системы уравнений

$$A_h T_h = F_h f_h + G_h (g_h + v_h) \text{ в } \bar{\Omega}_h^*, \tag{22}$$

разностные операторы A_h, F_h , G_h порождаются аппроксимацией в классе кусочно-постоянных на $\bar{\Omega}_h^*$ функций интегрального тождества, определяющего обобщенное решение краевой задачи (20),

$v_h = \delta^{-1}_{(kh)} \int\limits_{\Gamma_{(kh)}} v\, d\Gamma, \qquad \delta_{(kh)} = \int\limits_{\Gamma_{(kh)}} d\Gamma$, Π_h - множество вершин

ячеек $\omega_{(kh)}$, для которых $\Gamma_{(kh)} := \Gamma \cap \omega_{(kh)} \neq \emptyset$.

Для произвольно заданного $v \in U_\partial$ для решения $T_h(v)$ системы (22) получена оценка

$$\left(\lambda_0 \| T_{h,x} \|^2_{2,\bar{\Omega}^*_h} + \beta_0 \| T_h \|^2_{2,\bar{\Omega}^*_h}\right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{\beta_0}} \left(\| f_h \|_{2,\Omega^{*+}_h} + C\left(\| g_h \|_{2,\Pi_h} + \| v_h \|_{2,\Pi_h} \right)\right) \le \tag{23}$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{\beta_0}} \left(\| f \|_{2,\Omega} + C\left(\| g \|_{2,\Gamma} + \| v \|_{2,\Gamma} \right)\right),$$

где

$$\| T_{h,x} \|^2_{2,\bar{\Omega}^*_h} = \Delta_h \sum_{\Omega^*_h}{}' \sum_{i=1}^{m} T^2_{h,x_i}, \quad \| T_h \|^2_{2,\bar{\Omega}^*_h} = \Delta_h \sum_{\bar{\Omega}^*_h} T^2_h,$$

$$\| f_h \|_{2,\Omega^{*+}_h} = \left(\Delta_h \sum_{\Omega^{*+}_h} f^2_h \right)^{1/2}, \quad \| v_h \|_{2,\Pi_h} = \left(\sum_{\Pi_h} \delta_{(kh)} v^2_h \right)^{1/2}$$

и аналогично опрделятся $\| g_h \|_{2,\Pi_h}$ для усреднения g по участкам $\Gamma_{(kh)}$, символ $\sum\limits_{\Omega^*_h}{}'$ означает суммирование по всем вершинам $\bar{\Omega}^*_h$, в которых определено разностное соотношение T_{h,x_i} для сеточной функции T_h, заданной лишь на $\bar{\Omega}^*_h$, C - некоторая положительная постоянная, не зависящая от h.

На основе оценки (23) доказана теорема 1.6, являющаяся аналогом теоремы 1.4, где $T_h(v)$ - решение системы (22).

Для решения аппроксимирующих задач установлена теорема 1.7 - аналог теоремы 1.5 для данного случая.

Доказана

ТЕОРЕМА 1.8. Решения v_h° аппроксимирующих задач (5) соответственно случаям (i)-(iii) задания множества U_∂ при $X=\Gamma$ характеризуются соотношениями

$$(i) \quad A_h T_h^\circ - G_h v_h^\circ = F_h f_h + G_h g_h, \quad A_h' P_h - T_h^\circ = -T_{\partial h} \text{ в } \bar{\Omega}_h^*, \tag{24}$$

$$\text{и (12) на } \Gamma_{(kh)};$$

(ii) (24) и (13) на $\Gamma_{(kh)}$,

(iii) (24) и (14) на $\Gamma_{(kh)}$,

где $q_h = -\dfrac{\Delta_h}{\nu \delta_{(kh)}} G_h' P_h$ на $\Gamma_{(kh)}$.

Соотношения (24),(12) представляют собой линейную, а (24),(13) и (24), (14) - нелинейные системы алгебраических уравнений относительно $2r + s$ неизвестных P_h, T_h° на $\bar{\Omega}_h^*$ и v_h° на $\Gamma_{(kh)}$, s - число участков $\Gamma_{(kh)}$.

В параграфе 1.4 приведены примеры задач оптимального управления стационарными процессами теплопроводности в стержне, тонкой прямоугольной пластине и твердом теле в форме параллелепипеда с постоянными теплофизическими характеристиками.

В случае отсутствия ограничений на управление выписаны в явном виде решения аппроксимирующих задач при управлении источниками тепла. Приведены результаты численных расчетов.

В параграфе 1.5 предложен подход к численному определению характеристик нелинейного источника тепла в задаче нахождения

$$\inf_{w \in V} \| T_\partial - T \|^2_{2,\Omega}$$

где $T_\partial \in L_2(\Omega)$ - заданная функция, T - решение краевой задачи

(3)-(4) при $v = w(T) \in V$, V - некоторый "подходящий" класс функций.

Приведены результаты вычислительного эксперимента и обсуждается возможность использования полученных результатов к исследованию нелинейных уравнений.

Во второй главе рассмотрены задачи оптимального управления нестационарными процессами теплопроводности.

В параграфе 2.1 рассмотрена задача (1),

где

$$J(v) = \int_Q ((T(x,t)-T_\partial(x,t))^2 + \nu\, v^2(x,t))\,dx\,dt, \qquad (25)$$

$T \in \overset{\circ}{W}{}^{1,0}_2(Q)$ - обобщенное решение начально-краевой задачи

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + AT = f + v \quad \text{в } Q, \qquad (26)$$

$$T(x_1,\dots,x_m,0) = \varphi \quad \text{в } \Omega, \qquad (27)$$

$$T(x_1,\dots,x_m,t) = 0 \quad \text{на } S, \qquad (28)$$

$Q = \Omega \times]0,\theta[$; $S = \Gamma \times]0,\theta[$; $t \in]0,\theta[$;

c, ρ, f, φ - заданные функции; $v \in U_\partial$ - управление; U_∂ - выпуклое замкнутое подмножество в $L_2(Q)$

Исследована последовательность аппроксимирующих задач

$$\inf_{\tilde v_{h\tau} \in U_{\partial h\tau}} J_{h\tau}(\tilde v_{h\tau}) \qquad (29)$$

где $U_{\partial h\tau} = U_\partial \cap H_{h\tau}$, $H_{h\tau}$ пространство кусочно-постоянных на $\bar Q_{h\tau}$ функций, $Q_{h\tau} = \Omega_h \times]0, n_0\tau]$.

$$J_{h\tau}(\tilde v_{h\tau}) := \tau\Delta_h \sum_{j=1}^{n_0} \sum_{\Omega_h^+} ((T_h^j)^2 - 2T_h^j\, T_{\partial h}^j + \nu (v_h^j)^2) + d_{h\tau} \qquad (30)$$

T_h^j - решение системы разностных уравнений

$$(c\rho)_h T^j_{h,\bar t} + A_h T_h^j = f_h^j + v_h^j, \quad (kh) \in \Omega_h, \quad j = \overline{1,n_0}; \qquad (31)$$

$$T_h^j = 0,\ (kh) \in \Gamma_h,\ j = \overline{0,n_0}; \tag{32}$$

$$T_h^0 = \varphi_h,\ (kh) \in \Omega_h; \tag{33}$$

$d_{h\tau} = \int\limits_{Q_{h\tau}} T_\partial^2 dxdt$, f_h^j, $T_{\partial h}^j$ - усреднения функций f и T_∂ по ячейкам $q_{(k,j)} := \omega_{(kh)} \times]j\tau,(j+1)\tau]$, $\varphi_h = (c\rho\varphi)_h / (c\rho)_h$, A_h - оператор из (7) § 1.1.

Для произвольно заданного $v \in U_\partial$ для решения $T_h^j(v)$ системы (31)-(33) получена оценка в сеточной норме, соответствующей энергетической, на основе которой доказана теорема 2.1 о существовании и единственности решения T_h^j разностной схемы (31)-(33) для любых $v \in U_\partial$ τ, h, его устойчивости в сеточной норме, соответствующей энергетической, слабой сходимости последовательностей $\{\tilde{T}_{h\tau}\}$, $\{\tilde{T}_{h\tau,x_i}\}$ интерполяций сеточных функций и их разностных отношений соответственно к обобщенному решению T и $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,m}$ задачи (26)-(28).

Установлена

Т Е О Р Е М А 2.2. Для любых h, τ существует единственное решение $\tilde{v}_{h\tau}^* \in U_{\partial h\tau}$ задачи (29).

При $h \to 0$, $\tau \to 0$

$$J_{h\tau}^* \to J(u); \tag{34}$$

$$\tilde{v}_{h\tau}^* \to u \text{ в } L_2(Q); \tag{35}$$

$$\tilde{T}_{h\tau}^* \to T(u),\ \tilde{T}_{h\tau,x_i}^* \to \frac{\partial T(u)}{\partial x_i},\ i=\overline{1,m} \text{ слабо в } L_2(Q), \tag{36}$$

где $\tilde{T}_{h\tau}^* = \tilde{T}_{h\tau}(v_{h\tau}^*)$ - кусочно-постоянные интерполяции решения системы (31)-(33) при $v_{h\tau} = v_{h\tau}^*$, $J_{h\tau}^* = J_{h\tau}(\tilde{v}_{h\tau}^*)$, $T(u)$ -

решение задачи (26)-(28) при $v=u$.

Доказана

Т Е О Р Е М А 2.3. Решения $\tilde{v}^*_{h\tau}$ аппроксимирующих задач (29) соответственно случаям (i)-(iii) задания множества U_∂ при $X=Q$ характеризуются соотношениями

$$\text{(i)}\quad \frac{(c\rho)_h}{\tau}(T^{*,j}_h - T^{*,j-1}_h) + A_h T^{*,j}_h - G_h v^{*,j}_h = b^j_h,$$

$$-\frac{(c\rho)_h}{\tau}(P^{j+1}_h - P^j_h) + A'_h P^j_h - T^{*,j}_h = -T^j_{\partial h},\ (kh)\in\Omega_h,\ j=\overline{1,n_o},$$

$$T^{*,0}_h = \varphi_h,\quad P^{n_o+1}_h = 0,\quad (kh)\in\Omega_h; \tag{37}$$

$$T^{*,j}_h = 0,\ j=\overline{0,n_o},\ P^j_h = 0,\ j=\overline{1,n_o+1},\ (kh)\in\Gamma_h; \tag{38}$$

$$v^{*,j}_h = q^j_h,\ (kh)\in\Omega_h,\ j=\overline{1,n_o}. \tag{39}$$

(ii) (37), (38) и

$$v^{*,j}_h = \max(q^j_h,\ 0)\quad (kh)\in\Omega_h,\ j=\overline{1,n_o}. \tag{40}$$

(iii) (37), (38) и

$$v^{*,j}_h = \Phi(\xi^j_h,\ \eta^j_h,\ \nu)q^j_h\quad (kh)\in\Omega_h,\ j=\overline{1,n_o}. \tag{41}$$

$$q^j_h = -\frac{1}{\nu}P^j_h,\quad G_h v^{*,j}_h = v^{*,j}_h,\quad b^j_h = f^j_h. \tag{42}$$

(37),- (39) являются системой 3s линейных, а (37), (38), (40) и (37), (38), (41) - нелинейных алгебраических уравнений относительно 3s неизвестных - значений сеточных функций $v^*_{h\tau}$, $T^*_{h\tau}$ и $P_{h\tau}$ в узлах сетки $Q_{h\tau}$.

В параграфе 2.2 исследуется задача (1), где функция стоимости задается равенством (25), а $T\in W^{1,0}_2(Q)$ - обобщенное решение начально - краевой задачи (26)-(27) при граничном условии Неймана

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \text{ на } S, \qquad (42)$$

Считая, что функции φ, c, ρ, λ продолжены на некоторую область $\tilde{\Omega} \supset \bar{\Omega}$, функции f и T_∂ продолжены на область $\tilde{Q} = \tilde{\Omega} \times]0,\theta]$, с сохранением ранее указанных свойств, а $v = 0$ вне Q, построена последовательность аппроксимирующих задач (29), где

$$J_{h\tau}(\tilde{v}_h^j) = \tau\Delta_h \sum_{j=1}^{n_0} \sum_{\bar{\Omega}_h^*} ((T_h^j)^2 - 2T_h^j T_{\partial h}^j + \nu(v_h^j)^2) + d_{h\tau}^*, \qquad (43)$$

T_h^j - решение системы разностных уравнений

$$\frac{(c\rho)_h}{\tau} T_{h,\bar{t}}^j + A_h T_h^j = F_h f_h^j + G_h v_h^j, \ (kh) \in \bar{\Omega}_h^*, \ j=\overline{1,n_0}, \qquad (44)$$

$$T_h^0 = \varphi_h, \ (kh) \in \bar{\Omega}_h^*, \qquad (45)$$

операторы A_h , F_h и G_h введенны в § 1.2.

Для произвольно заданного $v \in U_\partial$ установлена оценка решения $T_{h\tau}(v)$ задачи (44)-(45) в сеточной норме, соответствующей энергетической, с использованием которой доказана теорема 2.4, являющаяся аналогом теоремы 2.1 для данного случая.

Для решения задач (29), установлены аналоги теорем 2.2 и 2.3, а именно

Т Е О Р Е М А 2.5. При любых h, τ существует единственное решение $\tilde{v}_{h\tau}^* \in U_{\partial h\tau}$ задачи (29).
При $h \to 0$, $\tau \to 0$ имеют место предельные соотношения (34)-(36),
где u - решение задачи (1), $T(u)$ - соответствующее ему решение задачи (26), (27), (42); $T_{h\tau}^*$ - решения системы (44)-(45) при $v_{h\tau} = v_{h\tau}^*$.
и

Т Е О Р Е М А 2.6. Аппроксимации $v_{h\tau}^*$ оптимального управления u соответственно случаям (i) - (iii) задания множества $U_{\partial h\tau}$ при $\underline{X} = Q$ характеризуются соотношениями

(i) (37) при $(kh) \in \underline{\Omega}_h^*$ и (39) при $(kh) \in \Omega_h^*$;

(ii) (37) при $(kh) \in \bar{\Omega}_h^*$ и (40) при $(kh) \in \Omega_h^*$;

(iii) (37) при $(kh) \in \bar{\Omega}_h^*$ и (41) при $(kh) \in \Omega_h^*$;

где $q_h^j = -\frac{1}{\nu} G_h' P_h^j$, $b_h^j = F_h f_h^j$, A_h, F_h, G_h - операторы из § 2.1.

Таким образом, нахождение аппроксимаций $\tilde{v}_{h\tau}^*$ оптимального управления u требует решения системы $(2r+n)n_o$ линейных в случае (i) или нелинейных, в остальных случаях, алгебраических уравнений относительно $(2r+n)n_o$ неизвестных - значений сеточных функций $T_{h\tau}^*$, $P_{h\tau}$ в узлах сетки $\bar{Q}_{h\tau}^*$ и $v_{h\tau}^*$ в $Q_{h\tau}^*$.

В параграфе 2.3 рассмотрена задача (1), где

$$J(v) = \int_Q (T-T_\partial)^2 \, dxdt + \nu \int_S v^2 \, dS \tag{46}$$

а $T \in W_2^{1,0}(Q)$ - решение начально-краевой задачи

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + AT = f \quad \text{в} \quad Q , \tag{47}$$

$$T(x, 0) = \varphi \quad \text{в} \quad \Omega , \tag{48}$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = g + v \quad \text{на} \quad S , \tag{49}$$

где g - заданная мощность теплового потока, $g \in L_2(S)$; v - управляемая мощность теплового потока, $v \in U_\partial$; U_∂ - выпуклое замкнутое подмножество в $L_2(S)$; остальные обозначения те же, что и ранее.

Получена последовательность аппроксимирующих задач (29), где

$$J_{h\tau}(\tilde{v}_h^j) := \tau\Delta_h \sum_{j=1}^{n_o} \sum_{\bar{\Omega}_h^*} ((T_h^j)^2 - 2T_h^j \, T_{\partial h}^j) + \nu\tau \sum_{j=1}^{n_o} \sum_{\Pi_h} \delta_{(kh)} (v_h^j)^2 + d_{h\tau}^* , \tag{50}$$

T_h^j - решение системы уравнений

$$\frac{(c\rho)_h}{\tau} T^j_{h,\bar t} + A_h T_h^j = F_h f_h^j + G_h (g_h^j + v_h^j), \ (kh) \in \bar\Omega_h^*, \ j=\overline{1,n_o}, \quad (51)$$

$$T_h^o = \varphi_h, \quad (kh) \in \bar\Omega_h^*, \quad (52)$$

A_h, F_h, G_h - разностные операторы, введенные в § 1.3.

Считая коэффициенты и известные функции продолженными, как и в § 2.2,

при произвольно заданном $v \in U_\partial$ для решения $T_{h\tau}(v)$ системы (51)-(52) получена оценка

$$\alpha_o \| T_h^k \|^2_{2,\bar\Omega_h^*} + \tau^2 \sum_{j=1}^{k} \| T^j_{h,\bar t} \|^2_{2,\bar\Omega_h^*} + 2\lambda_o \tau \sum_{j=1}^{k} \| T^j_{h,x} \|^2_{2,\bar\Omega_h^*} \le$$

$$\le C_1 \|\varphi_h\|^2_{2,\bar\Omega_h^*} + C_2 \|f_{h\tau}\|^2_{2,1,Q^k_{h\tau}} +$$

$$+ C_3 \left(\|g_{h\tau}\|^2_{2,1,S^k_{h\tau}} + \| v_{h\tau}\|^2_{2,1,S^k_{h\tau}} \right) \le \quad (53)$$

$$\le C_4 \|\varphi\|_{2,\bar\Omega} + C_5 \|f\|^2_{2,\tilde Q} + C_6 \left(\|g\|^2_{2,S} + \| v\|^2_{2,S} \right), \ k=\overline{1,n_o},$$

где C_i, $i=\overline{1,6}$ некоторые положительные постоянные, независящие от шагов сетки,

$$\|g_{h\tau}\|_{2,1,S^k_{h\tau}} = \tau \sum_{j=1}^{k} \| g_h^j \|_{2,\Pi_h} = \tau \sum_{j=1}^{k} \Big(\sum_{\Pi_h} \delta_{(kh)} (g_h^j)^2 \Big)^{1/2}$$

и аналогично вводится $\|v_{h\tau}\|_{2,1,S^k_{h\tau}}$.

На основе оценки (53) доказана

Т Е О Р Е М А 2.7. Для произвольно заданного $v \in L_2(S)$ разностная схема (51)-(52) при любых h, τ однозначно определяет сеточную функцию $T_{h\tau}(v)$ на $\bar{Q}^*_{h\tau}$, устойчива в сеточной норме, соответствующей энергетической норме, и при $h \to 0$, $\tau \to 0$ последовательность $\{\tilde{T}_{h\tau}(v_{h\tau})\}$ слабо сходится в $L_2(Q)$ и в $L_2(S)$ к обобщенному решению $T(v) \in W_2^{1,0}(Q)$ задачи (47) - (49), а последовательности $\{\tilde{T}_{h\tau,x_i}(v)\}$ сходятся слабо в $L_2(Q)$ к $\dfrac{\partial T(v)}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,m}$.

Для последовательности решений аппроксимирующих задач доказаны

Т Е О Р Е М А 2.8. Задача (29), где $J_{h\tau}(\tilde{v}_{h\tau})$ определяется равенством (50), а $T_{h\tau}(v_{h\tau})$ удовлетворяет системе (51)-(52), имеет единственное решение $\tilde{v}^*_{h\tau} \in U_{\partial h\tau}$ $\forall h_i$, $i=\overline{1,m}$, $\forall \tau$.

При $h \to 0$, $\tau \to 0$ имеют место предельные соотношения (34),(36) и $\tilde{v}^*_{h\tau} \to u$ в $L_2(S)$, где $T^*_{h\tau}$ - решение системы (51)-(52), при $\tilde{v}_{h\tau} = \tilde{v}^*_{h\tau}$, u - решение задачи (1), в которой $J(v)$ определяется равенством (46), а $T(u)$ - решение задачи (47)-(49) при $v = u$.

Т Е О Р Е М А 2.9. Аппроксимации $\tilde{v}^*_{h\tau}$ оптимального управления u соответственно случаям (i)- (iii) задания множества U_∂ при $X = S$ находятся из соотношений

(i) (37) при $(kh) \in \bar{\Omega}^*_h$ и (39) при $(kh) \in \Pi_h$;

(ii) (37) при $(kh) \in \bar{\Omega}^*_h$ и (40) при $(kh) \in \Pi_h$;

(iii) (37) при $(kh) \in \bar{\Omega}^*_h$ и (41) при $(kh) \in \Pi_h$,

где $q^j_h = -\dfrac{\Delta_h}{\nu\,\delta_{(kh)}} G'_h P^j_h$, $b^j_h = F_h f^j_h + G_h g^j_h$.

Аппроксимации $\tilde{v}^*_{h\tau}$ оптимального управления определяется через решения системы $(2r + s)n_o$ линейных в случае (i) или нелинейных, в других случаях, алгебраических уравнений относительно $(2r+s)n_o$ неизвестных - значений сеточных функций $T^{*,j}_h$, P^j_h, $(kh) \in \bar{\Omega}^*_h$ и $\tilde{v}^{*,j}_h$, $(kh) \in \Pi_h$, $j=\overline{1,n_o}$.

В параграфе 2.4 рассмотрены примеры задач оптимального управления нестационарными процессами теплопроводности в стержне, тонкой пластинке и твердом теле в форме параллелепипеда с постоянными теплофизическими характеристиками.

Приводятся результаты численных расчетов. Обсуждаются возможности построения диссипативных структур режимов с обострением образующихся в диссипативной активной нелинейной среде.

В параграфе 2.5 исследуется возможность численного определения характеристик нелинейного источника тепла в задаче отыскания

$$\inf_{w\in V} \| T_\partial - T \|^2_{2,Q},$$

где $T_\partial \in L_2(Q)$ - заданная функция, T - решение начально - краевой задачи (26) - (28) при $v = w(T) \in V$, V - некоторый "подходящий" класс функций.

Приводятся результаты вычислительного эксперимента и обсуждаются возможности использования подхода к исследованию режимов с обострением характерных для диссипативной активной нелинейной среды.

Основные результаты работы

1. Предложен подход приближенного решения задач оптимального управления источниками тепла и тепловым потоком в стационарных и нестационарых процессах теплопроводности в одно-,

двух- и трехмерном твердом теле с переменными теплофизическими характеристиками при квадратичной функции стоимости без ограничений и с ограничениями в форме неравенств на управление.

2. Построены аппроксимации в классе кусочно-постоянных функций рассматриваемых задач.

3. Установлены существование и единственность решений аппроксимирующих задач и их сходимость к решению исходных задач по функции стоимости, управлении и температурному состоянию в соответствующих функциональных пространствах при стремлении шагов сетки к нулю.

4. Получены соотношения, характеризующие решение аппроксимирующих задач в виде систем линейных или нелинейных (в зависимости от множества допустимых управлений) алгебраических уравнений относительно значений температуры, управления и сопряженных переменных в узлах сетки, на основе которых разработаны алгоритмы численного решения задач оптимального управления тепловыми процессами.

<u>Основное содержание диссертации изложено в следующих работах</u>

1. Федорченко И.С., Гаравулов С.А. Аппроксимация задач оптимального управления стационарными тепловыми процессами. // Моделирование и исследование устойчивости систем / ЧастьII /. Тез. докл. Укр. конф.- Киев, 1993. с. 84.

2. Федорченко И.С., Гаравулов С.А. Разностная аппроксимация оптимального управления мощностью теплового потока в стационарном процессе теплопроводности в пластинке. - Вестн. Киев. ун-та. Сер. физ.-мат. лит. 1993, N 2, с. 144-153.

3. Федорченко И.С., Гаравулов С.А. Разностная аппроксимация оптимального управления мощностью источников тепла в нестационарном процессе теплопроводности в пластинке. / Киев. ун-т. - Киев,1993. - 23с. Деп. в ГНТБ Украины, N 1969- Ук 93.

4. Гаравулов С.А. Разностная аппроксимация оптимального управления мощностью источников тепла в стационарном процессе теплопроводности в пластинке. -Деп. в ГНТБ Украины. 14.10.93. N 1967-Ук93.

5. Федорченко И.С., Гаравулов С.А. Аппроксимация задач оптимального управления стационарным процессами теплопроводности в

твердом теле. // Методы исследования экстремальных задач.- Киев: Ин-т кибернетики АН Украины, 1994, с. 55-67.
6. Федорченко И.С., Гаравулов С.А. Аппроксимация задач оптимального управления нестационарным процессом теплопроводности в пластинке. // Моделирование и исследование устойчивости систем / Прикладная механика / Тез. докл. Укр. конф.-Киев, 1995. С. 113.

Гаравулов С.А.

Чисельне розв'язання задач оптимального керування тепловими процесами. Рукопис. Дисертація на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук із спеціальності 01.01.07-обчислювальна математика. Київський університет імені Тараса Шевченка, Київ, 1996.

Дисертація містить результати, опубліковані в шести роботах автора. Основними результатами дисертації є побудова наближених розв'язків задач оптимального керування джерелами тепла і тепловим потоком в стаціонарних і нестаціонарних процесах теплопроводності в одно-, дво- та тривимірному твердому тілі із змішаними теплофізичними характеристиками при квадратичній функції вартості без обмежень та з обмеженнями в формі нерівності на керування.

Встановлено існування та єдиність розв'язків апроксимуючих задач в класі кусково-постійних функцій та їх збіжність до точних розв'язків за функцією вартості, керуванням та температурним станом.

Отримано співвідношення, що характеризують розв'язки апроксимуючих задач, на основі яких розроблено алгоритми чисельного розв'язання задач оптимального керування процесами теплопровідності.

Garavulov S.A.

Numerical solution of problems of optimal control of heat processes. Thesis on search the candidate degree of science (Ph.D.) in Physics and Mathematics, speciality 01.01.07 - computational mathematics. Kyiv University. Kyiv. 1996.

The dissertation consists results published in six author's works. The main result of the dissertation is construction of approximate solutions of problems of optimal control of heat soures and flow in stationary and non-stationary rocesses in one-, two- and threedimension solid body with variable heat characteristics under the quadratic function of cost without restrictions and with restrictions in the form of non-equalities on the control.

The existence and uniqueness of the solutions of approximate problem in the class of piece-constant functions are established and their convergence to exact solutions on the function of cost, the control and the temperuture state is proved.

The correlations which characterize the solution of the approximate of problems are obtainel. On this basis the algorithms of numerical solution of the problem of optimal control of heat conduction are developed.

Ключевые слова

оптимальное управление, процесс теплопроводности, аппроксимация, численное решение.

Подписано к печати 08.04.1996 г.Об.I,I.Формат 60x84 I/I6.

Печать офсетная.Тир.IOO.Зак.89.Бесплатно.

ЖОП УГПУ им.Драгоманова, Киев, Пирогова, 9.