ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ І.І. МЕЧНИКОВА

На правах рукопису

НАЗАРЕНКО ОЛЕГ АСКОЛЬДОВИЧ

СТАЦІОНАРНІ ЗАДАЧІ ДИФРАКЦІЇ ХВИЛЬ НА СФЕРИЧНИХ ДЕФЕКТАХ

Спеціальність 01.02.04.
Механіка деформованого твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Одеса – 1996

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі методів математичної фізики Одеського державного університету імені І.І.Мечникова.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор ПОПОВ Генадій Якович

Офіційні опоненти: член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук професор КУБЕНКО Веніамін Дмитрович

кандидат фізико-математичних наук доцент СЕМЕНОВ Анатолій Сергійович

Провідна організація: Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Подстрігача Я.С.

Захист відбудеться "24" травня 1996 року о 15^{00} годині на засіданні Спеціалізованої вченої ради К 05.01.05. Одеському державному університеті за адресою: 270100, м.Одеса вул. Петра Великого, 2.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Одеського державного університету /270100, м. Одеса, вул. Преображенська, 24/

Автореферат розісланий "11" квітня 1996 року

Вчений секретар
Спеціалізованої вченої ради О.І.Третяк

Загальна характеристика роботи

АКТУАЛЬНІСТЬ ТЕМИ. У теперішній час багато важливих вузлів, деталей та цілих агрегатів, які входять у склад сучасних технічних обладнань та споруд, працюють або у постійно діючих (стаціонарних), або у різконестаціонарних режимах внаслідок швидких змін у часі впливаючих на них зовнішніх сил. Тонкостінні конструкції оболонкового типу складають широкий клас механічних обладнань, що зустрічаються у сучасному машино- та повітряному транспорті, у ракетній техниці, а також у будівництві. При інтенсивних навантаженнях різної природи в умовах експлуатації таких конструкцій виникають великі напруження, які небажані з точки зору міцності та надійності машин. З загального кола проблем, пов'язаних з використанням оболонкових конструкцій,. можливо виділити задачі, пов'язані з вивченням взаємодії недеформованих оболонок з навколишнім пружним середовищем.

Важливість та практична цінність останніх обумовлені підвищенням ударостійкості водних та повітряних суден відносно підводних та повітряних вибухів, вдосконаленням методів та засобів підводної акустики, забезпеченням сейсмостійкості деяких гідротехнічних споруд та їх складових частин. Таким чином, розробка математичних методів вирішення задач про взаємодію нестаціонарних (стаціонарних) хвиль з різними об'єктами, в тому числі оболонкового типу, є сьогодні актуальною проблемою, чим власно, і визначилась тематика запропонованої дисертаційної роботи.

У нинішній час в галузі нестаціонарної та стаціонарної аерогідропружності виконано значний цикл фундаментальних досліджень. В розробку теорії та методів задач динаміки тіл, що взаємодіють з середовищем, внесли значний вклад багато вчених. Серед них: Є.П. Бабайлов, В.А. Бабешко, О.І. Бабічєв, О.Т. Бурієв, М.Д. Векслєр, О.Д. Гольденвейзер, О.Г.Горшков, Є.І. Григолюк, О.М. Гузь, О.М. Ковшов, В.Д. Кубенко, Я.С. Подстрігач, І.Т. Селезов, О.В. Тарлаковський та ін.

Основні аналітичні методи, які до нинішнього часу застосовувались у тривимірних задачах теорії пружності, це метод потенціала, метод інтегральних перетворень, метод розділення змінних (метод Фур'є та різноманітні модифікування), а також теорії функції комплексних змінних.

Крім того, одним з загальних методів, які дозволяють вивчати взаємодію дефектів (тріщин та включень) з навколишнім середовищем, є метод розривних розв'язків, запропонований Г.Я. Поповим. В цьому методі одним з основних моментів є поняття дефекту, під котрим слід мати на увазі частину поверхні, при пересіченні якої терплять розриви першого роду зміщення та напруження. Розривним рішенням рівнянь пружності називається таке їх рішення, яке задовольняє їм всюди, крім точок дефекту. В цих точках рахуються відомими стрибки напружень та зміщень. МЕТОЮ РОБОТИ є перенос методу розривних розв'язків на динамічні задачі дифракції пружніх хвиль на сферичних дефектах. Для чого слід побудувати розривний розв'язок хвильового рівняння, а потім і тривимірних рівнянь руху пружнього середовища для указаного дефекту. Потім, використовуючи побудоване розривне рішення рівнянь руху пружнього середовища, звести задачі пружніх хвиль на сферичному дефекті до інтегральних рівнянь, в тому числі і задачі дифракції хвиль скручування. Розробити ефективний метод наближенного рішення інтегрального рівняння задачі дифракції хвиль скручування на нерухомому (рухомому) сферичному тонкому включенні (сегмент тонкої абсолютно твердої сферичної оболонки). Провести обчислювання реактивного моменту скручування (сферичне включення закріплено) та амплітуди крутильних коливань указаного включення, коли воно рухомо (не закріплено).

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ базуються на відомому факті[1] про зведення задач коливань пружнього середовища до визначення трьох функцій, що задовольняють хвильовим рівнянням у сферичній системі координат. І тому, для будування розривного рішення рівнянь руху пружнього середовища, необхідно спершу побудувати розривне рішення хвильового рівняння для сферичного дефекту. Воно будується за допомогою узагальненої схеми методу інтегральних перетворень. Потім, використовуючи метод розривних розв'язків, задачі дифракції зводяться до інтегральних рівнянь першого роду, які необхідно вирішувати у класі функцій з неінтегрованими особливостями. Щоб побудувати таке рішення методом ортогональних многочленів, використовується нове спектральне співвідношення для многочленів Якобі з неінтегрованими ваговими функціями. При цьому інтеграли від функцій з неінтегрованими особливостями розуміються в узагальненому (регуляризованому) змісті.

НАУКОВА НОВИЗНА РОБОТИ полягає у слідуючому:

1. Побудовано розривний розв'язок хвильового рівняння та тривимірних рівнянь руху теорії пружності для сферичного дефекту.

---

[1] Гузь О.М., Кубенко В.Д., Черевко М.О. Дифракция упругих волн. - Київ: Наукова думка, 1978.

2. Здійснено зведення задач дифракції пружних хвиль довільної природи на сферичному дефекті до одновимірних інтегро-диференціальних (інтегральних) рівнянь.

3. Побудовано ефективне наближене рішення задачі дифракції хвиль скручування на абсолютно жорскому нерухомому сферичному включенні з використанням нового спектрального співвідношення для многочленів Якобі з неінтегрованою вагою.

4. Одержано вираз для реактивного моменту скручування (включення нерухоме) та амплітуди крутильних коливань (включення рухомо).

5. Проведено дослідження дальнього поля дифрагованої хвилі скручування.

ВІРОГІДНІСТЬ основних положень та отриманих результатів забезпечується механічною та математичною суворістю постановок задач, коректним використанням апробірованого математичного апарату для їх рішення, а також використанням різноманітних варіантів обчислювальних шуканих величин з послідуючим порівнянням результатів.

ПРАКТИЧНА ЦІННІСТЬ РОБОТИ. Одержані в дисертації результати дозволяють визначити реактивний момент скручування, який слід прикласти до включення, щоб воно було нерухоме, амплітуду коливань рухомого включення, а також досконально досліджувати дальню зону в пружньому середовищі.

АПРОБАЦІЯ РОБОТИ. Результати роботи докладались на семінарі з математичної фізики ОДУ (керівник - доктор фізико-математичних наук, професор Г.Я. Попов; на IV Міжнародній конференції "Механика неоднородных структур" (м.Тернопіль), на міському семінарі "Применение вычислительной техники и математического моделирования прикладных научных исследований". (м. Одеса).

ОСОБИСТИЙ ВКЛАД ДИСЕРТАНТА полягає в зведенні задач дифракції пружних хвиль на сферичних включеннях до систем інтегральних (інтегродиференціальних) рівнянь, а також у методиці рішення задачі дифракції пружньої хвилі скручування на сегменті тонкої абсолютно жорсткої сферичної оболонки.

ПУБЛІКАЦІЇ. Основні результати дисертації опубліковані в роботах 1-6, перелік яких приведено в кінці автореферату.

СТРУКТУРА ТА ОБСЯГ РОБОТИ. Дисертаційна робота складається з вступу, 11 параграфів, які розміщені у 4-х главах, висновків та списку літератури, викладених на 120 сторінках друкованого тексту. Список літератури містить 93 найменування.

ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі викладено огляд робіт, примикаючих до тематики проведених досліджень. Коротко показано зміст дисертації.

В § 1 глави 1 викладається побудова розривного розв'язку хвильового рівняння для сферичного дефекту

$$r=R,\ 0\le\theta\le\pi,\ -\pi\le\varphi\le\pi, \tag{1}$$

в якому шукану функцію Ψ показано співвідношенням $\Psi(r,\theta,\varphi,t)=$ $=e^{-i\omega_0 t}\Psi(r,\theta,\varphi)$ і тому хвильове рівняння має вигляд

$$\Delta\Psi(r,\theta,\varphi)+\omega_0^2/c^2\,\Psi(r,\theta,\varphi)=0, \tag{2}$$

де Δ - оператор Лапласа в сферичній системі координат: r,θ, φ - сферичні координати; ω_0 - циклічна частота; c - швидкість хвиль у середовищі.

Під розривним розв'язком рівняння (2), заданого у нескінченому просторі для сферичного дефекту, розуміємо таке рішення рівняння (2), яке задовольняє йому всюди, крім точок (1). В цих точках функція та її нормальна (до поверхні дефекту) похідна терплять розриви першого роду з заданими стрибками

$$\langle\Psi(R,\theta,\varphi)\rangle=\Psi(R-0,\theta,\varphi)-\Psi(R+0,\theta,\varphi),\ \langle\Psi'(R,\theta,\varphi)\rangle=\Psi'(R-0,\theta,\varphi)-\Psi'(R+0,\theta,\varphi) \quad (3)$$

Тут та скрізь нижче похідну по r будемо позначати рискою, по θ – крапкою.

Використовуючи послідовно перетворення Фур'є та Лежандра

$$\Psi_n(r,\theta)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\Psi(r,\theta,\varphi)\,d\varphi}{2\pi e^{in\varphi}},\ \Psi_{nk}(r)=\int\limits_{0}^{\pi}\Psi_n(r,\theta)\sin\theta\, P_k^{|n|}(\cos\theta) \quad (4)$$

де $n=0,\pm1,\pm2,\ldots,$ $P_k^{|n|}(\cos\theta)$ – приєднаний многочлен Лежандра, зведемо рівняння (2) до слідуючого одновимірного .

$$r^{-2}\left[(r^2\Psi'_{nk}(r))'-k(k+1)\Psi_{nk}(r)\right]+\omega_0^2 c^{-2}\Psi_{nk}(r)=0,\ 0<r<\infty \quad (5)$$

Необхідно побудувати розривне рішення цього рівняння з заданими стрибками.

$$\langle\Psi_{nk}(R)\rangle=\Psi_{nk}(R-0)-\Psi_{nk}(R+0),\ \langle\Psi'_{nk}(R)\rangle=\Psi'_{nk}(R-0)-\Psi'_{nk}(R+0). \quad (6)$$

З цією метою застосуємо до нього інтегральне перетворення Ганкеля за узагальненою схемою[2]. В результаті отримаємо

$$\Psi_{nk}(r)=R^2\left[\langle\Psi'_{nk}(R)\rangle\Gamma_{\alpha,k}(r,R)-\langle\Psi_{nk}(R)\rangle\frac{\partial}{\partial R}\Gamma_{\alpha,k}(r,R)\right], \quad (7)$$

$$\Gamma_{\alpha,k}(r,R)=\frac{\pi i}{2\sqrt{rR}}\begin{cases}J_\nu(R\alpha)H_\nu^{(1)}(r\alpha), & r>R,\ 2\nu=2k+1,\\ J_\nu(r\alpha)H_\nu^{(1)}(R\alpha), & r<R,\ \alpha=c^{-1}\omega_0,\end{cases} \quad (8)$$

---

2 Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. –М.:Наука, 1982, 344 с.

$H_\nu^{(1)}(z)$ – функція Ганкеля першого роду, яка забезпечує виконання умов випромінювання Зомерфельда для вибраної часової залежності.

В § 2 викладено побудову розривного рішення рівнянь руху пружнього простору, записаних відносно зміщень $u_r(r,\theta,\varphi)\equiv u$, $u_\theta(r,\theta,\varphi)\equiv v$, $u_\varphi(r,\theta,\varphi)\equiv w$, заснованого на вказаному представленні їх через три хвильові функції та на уведенні нових невідомих зміщень та напружень, виражених в трансформантах Фур'є через традиційно застосовані по формулам

$$\begin{gathered}\sin\theta\, Z_n^*(r,\theta)=[\sin\theta\, w_n(r,\theta)]^{\cdot}+in\, v_n(r,\theta);\ \sin\theta\, Z_n(r,\theta)=[\sin\theta\cdot\\ \cdot v_n(r,\theta)]^{\cdot}-in\, w_n(r,\theta);\ \sin\theta\,\tau_n(r,\theta)=[\sin\theta\,\tau_{\theta n}(r,\theta)]^{\cdot}-in\,\tau_{\varphi n}(r,\theta);\\ \sin\theta\,\tau_n^*(r,\theta)=[\sin\theta\,\tau_{\varphi n}(r,\theta)]^{\cdot}+in\,\tau_{\theta n}(r,\theta),\end{gathered} \tag{9}$$

де $\tau_{\theta n}(r,\theta)\equiv\tau_{r\theta n}(r,\theta)$, $\tau_{\varphi n}(r,\theta)\equiv\tau_{r\varphi n}(r,\theta)$. Саме ці функції найбільш просто виражаються через вказані хвильові

$$\begin{gathered}u_n(r,\theta)=\Phi_n'(r,\theta)+r^{-1}\nabla_n\Psi_{2n}(r,\theta);\ Z_n^*(r,\theta)=\nabla_n\Psi_{1n}(r,\theta);\ r\,Z_n(r,\theta)=\\ =-\nabla_n[\Phi_n(r,\theta)+(r\Psi_{2n}(r,\theta))'];\ \nabla_n f(r,\theta)\equiv n^2\sin^{-2}\theta\, f(r,\theta)-\\ -\sin^{-1}\theta\,[\sin\theta\, f^{\cdot}(r,\theta)]^{\cdot},\end{gathered} \tag{10}$$

де $\Phi_n(r,\theta)$ задовольняє рівнянню (2) при $c\equiv c_1=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho_m}$ (λ,μ – постійні Ламе, ρ_m – густина середовища), а Ψ_{1n}, Ψ_{2n} – задовольняє такому ж рівнянню при умові $c\equiv c_2=\sqrt{\mu/\rho_m}$. Використовуючи закон Гука та співвідношення Коші по трансформантам зміщень, знаходяться трансформанти напружень, наприклад, для напруження $\tau_n^*(r,\theta)$

$$r\mu^{-1}\tau_n^*(r,\theta)=\nabla_n[r\Psi_{1n}'(r,\theta)-\Psi_{1n}(r,\theta)]. \tag{11}$$

Замість заданих для розривного рішення стрибків зміщень та напружень, уведемо трансформанти стрибків функцій (9) (крім стрибків $\sigma_{\tau n}, u_n$)

$$\langle\sigma_{\tau n}(R,\theta)\rangle=\sigma_{\tau n}(R-0,\theta)-\sigma_{\tau n}(R+0,\theta),\langle\tau_n(R,\theta)\rangle=\tau_n(R-0,\theta)-\tau_n(R+0,\theta),$$
$$\langle\tau_n^*(R,\theta)\rangle=\tau_n^*(R-0,\theta)-\tau_n^*(R+0,\theta),\langle u_n(R,\theta)\rangle=u_n(R-0,\theta)-$$
$$-u_n(R+0,\theta),\langle z_n(R,\theta)\rangle=z_n(R-0,\theta)-z_n(R+0,\theta),\langle z_n^*(R,\theta)\rangle=z_n^*(R-0,\theta)-$$
$$-z_n^*(R+0,\theta). \tag{12}$$

Зв'язуючи (12) з стрибками функцій $\Phi_n, \Psi_{jn}, (j=1,2)$ та їх похідними, користуючись формулами (10) та аналогічними для напружень (наприклад (11)), одержимо

$$\langle u_n(R,\theta)\rangle=\langle\Phi_n'(R,\theta)\rangle+R^{-1}\nabla_n\langle\Psi_{2n}(R,\theta)\rangle,\langle z_n^*(R,\theta)\rangle=\nabla_n\langle\Psi_{1n}(R,\theta)\rangle,$$
$$R\langle z_n(R,\theta)\rangle=-\nabla_n[\langle\Phi_n(R,\theta)\rangle+\langle\Psi_{2n}(R,\theta)\rangle+R\langle\Psi_{2n}'(R,\theta)\rangle], \tag{13}$$

$$R\mu^{-1}\langle\tau_n^*(R,\theta)\rangle=\nabla_n[R\langle\Psi_{1n}'(R,\theta)\rangle-\langle\Psi_{1n}(R,\theta)\rangle]. \tag{14}$$

З одержаної системи рівнянь (аналогічні (14), але більш громоздкі формули для $\langle\tau_n(R,\theta)\rangle$ та $\langle\sigma_{\tau n}(R,\theta)\rangle$ тут не вписані), після застосування до них інтегрального перетворення Лежандра (4), знайдемо стрибки $\langle\Phi_{nk}\rangle, \langle\Phi_{nk}'\rangle, \langle\Psi_{jnk}\rangle, \langle\Psi_{jnk}'\rangle$. Підставляючи їх в формулу (7), одержимо трансформанти Фур'є-Лежандра хвильових фкункцій, а по формулам (10) - поле зміщень, тобто потрібне розривне рішення рівнянь руху з даними стрибками (13) - (14). Маючи таке рішення, легко звесті задачу про дифракцію на дефекті (1) до одновимірних інтегральних (інтегродиференціальних) рівнянь.

Дійсно, нехай пружне середовище завантажено вільно з відомими для такого навантаження зміщеннями $\mathring{u}_{\tau n}, \mathring{z}_n, \mathring{z}_n^*$ та напруженнями $\overset{\circ}{\sigma}_{zn}, \overset{\circ}{\tau}_n, \overset{\circ}{\tau}{}^*_n$ при відсутні дефекту. Слід визначити поля напружень та зміщень в пружньому середовищі від вказаного навантаження, якщо в ньому з'явився дефект (1). Рішення поставленої задачі будуємо у вигляді

$$u_n=\overset{\circ}{u}_n+\overset{1}{u}_n,\ Z_n=\overset{\circ}{Z}_n+\overset{1}{Z}_n,\ Z^*_n=\overset{\circ}{Z}{}^*_n+\overset{1}{Z}{}^*_n,\ \sigma_{zn}=\overset{\circ}{\sigma}_{zn}+\overset{1}{\sigma}_{zn},$$
$$\tau_n=\overset{\circ}{\tau}_n+\overset{1}{\tau}_n,\ \tau^*_n=\overset{\circ}{\tau}{}^*_n+\overset{1}{\tau}{}^*_n, \tag{15}$$

де $\overset{1}{u}_n, \overset{1}{Z}_n, \overset{1}{Z}{}^*_n, \overset{1}{\sigma}_{zn}, \overset{1}{\tau}_n, \overset{1}{\tau}{}^*_n$ визначаються побудованим вище розривним розв'язком. При цьому, якщо дефектом є тріщина (§ 3), тоді відповідно (12) повинні виконуватися умови

$$\langle\sigma_{zn}\rangle=\langle\tau_n\rangle=\langle\tau^*_n\rangle=0, \tag{16}$$

тобто в формулах (13)-(14) залишаються невідомими стрибки зміщень $\langle u_n\rangle, \langle Z_n\rangle, \langle Z^*_n\rangle$. Для їх визначення необхідно вимагати відсутністі напружень на берігах тріщини, тобто

$$\overset{1}{\sigma}_{zn}(R-0,\theta)=-\overset{\circ}{\sigma}_{zn}(R-0,\theta),\ \overset{1}{\tau}_n(R-0,\theta)=-\overset{\circ}{\tau}_n(R-0,\theta),\ \overset{1}{\tau}{}^*_n(R-0,\theta)=-\overset{\circ}{\tau}{}^*_n(R-0,\theta) \tag{17}$$

В результаті приходимо до одновимірних інтегродиференціальних рівнянь.

Якщо дефектом є абсолютно жорстке тонке включення (§ 4), зчеплене з пружнім середовищем, яке залишається нерухомим, то в (12)

$$\langle u_n\rangle=\langle Z_n\rangle=\langle Z^*_n\rangle=0. \tag{18}$$

Невідомими залишаються три стрибки напружень $\langle\sigma_{zn}\rangle, \langle\tau_n\rangle$, та $\langle\tau^*_n\rangle$. Щоб отримати рівняння для їх знаходження, слід реалізувати умови на дефекті (включенні). Якщо його рахувати нерухомим, то на основі (15), запишемо

$$\overset{1}{u}_n(R-0,\theta)=-\overset{0}{u}_n(R-0,\theta),\ \overset{1}{Z}_n(R-0,\theta)=-\overset{0}{Z}_n(R-0,\theta),\ \overset{1}{Z}{}^*_n(R-0,\theta)=-\overset{0}{Z}{}^*_n(R-0,\theta). \tag{19}$$

Якщо включення не закріплене (при дії падаючої хвилі може здійснюватись коливання з деякою амплітудою α), тоді, на основі (3), (15), а також при умові, що падаючою хвилею є хвиля скручування (§ 5)

$$\overset{0}{u}_{\varphi 0}(r,\theta)=Ar\sin\theta\exp(-iBr\cos\theta),\ A=\mathrm{Const},\ B=\omega_0 c_2^{-1}. \tag{20}$$

(якщо вісь спрямована до верху, тоді хвиля падає на опуклість сферичного включення), умови на включенні можна виразити таким чином

$$\overset{1}{u}_n(R-0,\theta)=-\overset{0}{u}_n(R-0,\theta),\ \overset{1}{Z}_n(R-0,\theta)=-\overset{0}{Z}_n(R-0,\theta),\ \overset{1}{Z}{}^*_n(R-0,\theta)=-A\times$$
$$\times(2\alpha R\cos\theta+R\exp(iBR\cos\theta)[2\cos\theta+iBR\sin^2\theta]). \tag{21}$$

Деталізація (§ 5) описаної схеми проводиться для випадку задачі дифракції пружньої хвилі скручування на тонкому абсолютно твердому сферичному включенні. Через те, що поставлена задача є вісесиметричною (не залежить від кута φ), трансформанти Фур'є (4) співпадають з самими розшукуваними функціями, тобто у всіх попередніх формулах слід положити $n=0$ так, як зроблено в (20).

Використовуючи приведені вище розуміння, а також з (11), одержимо інтегральне рівняння задачі дифракції пружньої хвилі

$$\int\limits_0^{\omega}\langle\tau_0^*(R,\tau)\rangle\sin\tau\, K_6^0(\theta,\tau;R)\,d\tau=f(\theta),\ 0\le\theta\le\omega, \tag{22}$$

$$K_6^0(\theta,\tau;R)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(\cos\theta)P_k(\cos\tau)(k+1/2)\Gamma_{6,k}(R),\quad P_k(\cos\theta)-$$

приєднана функція Лежандра, $\Gamma_{\ell,\kappa}(R)=\Gamma_{d,\kappa}(z,R)\Big|_{z=R,\ d=\ell}$, а зовнішній вигляд правої частини визначається з (19) та (21).

У випадку, якщо включення нерухоме (на основі (19) з (9) та (20)), права частина рівняння (22) (при умові розкладу $\exp(-\ell iR\cos\theta)$ в ряд по функціям Беселя та многочленам Лежандра) зобразиться у вигляді

$$f(\theta)\equiv f^{1}(\theta)=-A2\mu(\pi i)^{-1}(\pi/2\ell R)^{1/2}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\exp(\ell\pi i/2)P_\ell(\cos\theta)\cdot$$

$$\cdot J_{\ell+1/2}(\ell R)[i\ell R\sin^2\theta+2\cos\theta],\ 0\leq\theta\leq\omega. \tag{23}$$

Якщо включення не закріплене, тоді праву частину буде подано співвідношенням

$$f(\theta)=f^{(1)}(\theta)+f^{(2)}(\theta)\alpha,\ 0\leq\theta\leq\omega \tag{24}$$

де $f^{(2)}(\theta)=-4\mu\cos\theta/\pi i$.

Таким чином, як для випадку незакріпленого дефекту, так і для закріпленого, рівняння (22) зберігає свою структуру та вигляд, виключаючи праву частину $f(\theta)$.

В § 6, з якого починається III глава, розглядено питання побудови наближеного рішення інтегрального рівняння (22) для поставлених задач, яке, у випадку уведення замін змінних $\operatorname{tg}\theta/2=$

$$=\beta x,\ \operatorname{tg}\tau/2=\beta y,\ X(y)=(1+\beta^2y^2)^{-3/2}\chi(2\operatorname{arctg}\beta y), \tag{25}$$

$\chi(\theta)=\langle\tau_0^*(R,\theta)\rangle=\sin^{-1}\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}[\sin\theta\langle\tau_{\varphi 0}(R,\theta)\rangle]$,

$F(x)=f(2\operatorname{arctg}\beta x)[2\beta\sqrt{1+\beta^2x^2}]^{-1}$, можна привести до виду

$$\int_0^1[W_0(x,y)-\beta R_0(\beta x,\beta y)]y\,X(y)dy=F(x),\ 0\leq x\leq 1, \tag{26}$$

$W_0(x,y) = \int\limits_0^\infty J_0(tx) J_0(ty)\,dt$ – розривний інтеграл Вебера-Соніна.

$$R_0(\beta x, \beta y) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(\xi) P_k\left(\frac{1-\beta^2 x^2}{1+\beta^2 x^2}\right) P_k\left(\frac{1-\beta^2 y^2}{1+\beta^2 y^2}\right) \left[(1+\beta^2 x^2)(1+\beta^2 y^2)\right]^{-1/2},$$

$$\Delta_k(\xi) = \int\limits_0^\pi \frac{\sin[(k+1/2)\theta]}{(-1)^k} \frac{\partial O_0}{\partial \theta}(2\xi \cos \theta/2)\,d\theta, \quad \xi = \beta R, \quad O_0(z) = J_0(z)$$

$-iH_0(z)$, $\xi = \beta R$, $H_0(z)$ – перша функція Струве.

В цьому параграфі відзначається, що рівняння вже розв'язувалося багатьма авторами, але у класі інтегрованих функцій. Умови задачі такі, що його слід розв'язувати у класі функцій, які мають неінтегровані особливості, тому що шуканою функцією в (26) є похідна стрибка напружень, яка на краю включення має особливість (-3/2).

В роботі запропоновано варіант рішення, який засновано на новому спектральному співвідношенні, причому інтеграл, який входить до нього, слід розуміти в узагальненому (регуляризованому) змісті

$$\int\limits_0^1 W_n(x,y) P_k^{n,-3/2}(1-2y^2)\, y^{1+n}(1-y^2)^{-3/2}\,dy = \Gamma(n+k+1/2)\, x^n \cdot \qquad (27)$$

$$\cdot [k!2]^{-1} \Gamma(k-1/2) P_{k-1}^{n,1/2}(1-2x^2) \Gamma^{-1}(k+n), \quad 0 \le x \le 1, \; n = 0,1,2,\ldots$$

де $P_{k-1}^{n,1/2}(1-2x^2)$ – многочлен Якобі.

Маючи спектральне співвідношення (27) для розв'язання інтегрального рівняння, застосовується метод ортогональних многочленів, тобто рішення розшукується у вигляді ряду

$$X(y)=\sum_{l=0}^{\infty} X_l (1-y^2)^{-3/2} P_l^{0,-3/2}(1-2y^2). \tag{28}$$

Після підстанови (28) в (26) слід урахувати, що відповідно розумінням, які приведено в роботі[3], де розглянуто проблему дискообразної тріщини у пружньому просторі, повинно бути виконано умову

$$\int_1^{\infty} J^0(r) r\,dr < \infty, \quad J^0(r)=\int_0^1 W_0(r,y)\, y\, X(y)\,dy. \tag{29}$$

За механічним змістом інтеграл $J^0(r)$ є нормальним напруженням на продовженні тріщини (тріщина на дільниці $0 \le r \le$ ≤ 1), рівнодіюча якого повинна зрівноважувати задане навантаження, тобто мати скінченне значення.

Переносячи розуміння цієї статті на дисертаційну роботу та аналізуючи інтеграл $J^0(r)$ при $r \to \left\{ \begin{matrix} +\infty \\ r+0 \end{matrix} \right\}$ приходимо до висновку, що умові (29) не задовольняє тільки доданок з (28) і тому воно повинно бути відкинуто ($X_0 = 0$).

Реалізуючи і далі стандартну схему методу ортогональних многочленів, рівняння (26) зводиться до нескінченої системи

$$Y_i - \sum_{l=0}^{\infty} Y_l d_{il} [N_i N_l \sigma_i \sigma_l]^{-1/2} = F_i [N_i \sigma_i]^{-1/2}, \; i=\overline{0,\infty}. \tag{30}$$

де

$$d_{il} = \sum_{k=0}^{\infty} J_{l,k}^{-3/2}(\beta)\, J_{i,k}^{1/2}(\beta)\, \Delta_k(\xi),$$

---

3 Попов Г.Я. Об одном новом подходе к задачам о концентрации упругих напряжений возле трещин //ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. - С. 148-156

$$Y_i = \sqrt{\sigma_i N_i}\, X_{i+1}, \quad (\sigma_i N_i)^{-1/2} = 2^i\, i!\,[(2i-1)!!]^{-1}[(3+4i)(i+1)]^{1/2}[\pi(2i+1)\beta^3]^{-1/2}, \tag{31}$$

$$J_{\ell,k}^{-3/2}(\beta) = 2\beta^2 \int_0^1 y P_{\ell+1}^{0,-3/2}(1-2y^2) P_k\left(\frac{1-\beta^2 y^2}{1+\beta^2 y^2}\right)\left[(1-y^2)^3(1+\beta^2 y^2)\right]^{-1/2} dy; \tag{32}$$

$$J_{i,k}^{1/2}(\beta) = 2\beta^{-2} \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, P_i^{0,1/2}(1-2x^2) P_k\left(\frac{1-\beta^2 x^2}{1+\beta^2 x^2}\right)(1+x^2\beta^2)^{-1/2} dx, \tag{33}$$

$$F_i = \beta^{-3} \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, P_i^{0,1/2}(1-2x^2) f(2\,\mathrm{arctg}\,\beta x)(1+\beta^2 x^2)^{-1/2} dx \tag{34}$$

Нескінчену систему (30) пропонується розв'язувати наближено методом редукції, обгрунтування якого, а також дослідження збіжності рядів (31), присвячено § 9 глави IV. Вузловим моментом відповідних побудов є перетворення інтегралу (32). Використовуючи поняття регуляризації, вдалося розхожій інтеграл перетворити до вигляду

$$J_{\ell,k}^{-3/2}(\beta) = -\frac{1}{\ell+1} \int_0^1 \frac{P_\ell^{1,-1/2}(1-2y^2)\, y^2}{(1-y^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{P_k\left((1-y^2\beta^2)(1+y^2\beta^2)^{-1}\right)}{\sqrt{1+y^2\beta^2}} \tag{35}$$

Обчислювання інших інтегралів, які входять в (30), засновано на зведенні їх до нескінчених рядів шляхом приведення многочленів Якобі до гіпергеометричних функцій. Ці викладки освітлені в § 10.

Розв'язуючи систему (30), можна визначити все необхідні характеристики дифрагованого поля. Якщо включення рахувати нерухомим, то можна визначити реактивний момент скручування .

$$M=2\pi R^3\int_0^{\omega}\langle\tau_{\varphi 0}(R,\theta)\rangle\sin^2\theta\,d\theta. \qquad (36)$$

На підставі (25) встановлено рівність

$$\sin\theta\,\langle\tau_{\varphi 0}(R,\theta)\rangle=\int_0^{\theta}\sin\tau\,\chi(\tau)\,d\tau.$$

Використовування цього виразу для (36), інтегрування по частинах, заміна змінних (25) та врахування (28) з обліком $\chi_0\equiv 0$ приводить до формули

$$M=16\pi R^3\beta^4\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+1)^{-1}Y_l}{\sqrt{\sigma_l N_l}}\sum_{j=l}^{\infty}\frac{(-1)^{l+j}(j+1)!^2\,\beta^{2l}}{(j-l)!\,(1/2+l)_{j+2}}. \qquad (37)$$

У випадку, коли включення не закріплено, важливою характеристикою є амплітуда кута повороту. Як відзначалося вище, дана задача відрізняється від попередньої умовами на дефекті (21), а отже праву частину в системі (30) буде визначено з (34) на підставі (23) та (24). В даному випадку структуру розв'язання системи буде подано у вигляді $Y_i=Y_i^0+\alpha Y_i^{\alpha}$, де Y_i^0 - розв'язок (30) з правою частиною (34) на підставі (23), а Y_i^{α} - розв'язок тієї ж системи, в якої F_i визначається з (24)(57).

Реактивний момент скручування для включення буде визначатися формулою $M=M_0+\alpha M_{\alpha}$, де M_0 та M_{α} обчислюються за формулою (37) з заміною Y_i на Y_i^0 та Y_i^{α} відповідно. Для амплітуди крутильних коливань включення α, використовуючи принцип Даламбера, знаходимо

$$\alpha = (M_\omega - M_0) M_k^{-1}. \qquad (38)$$

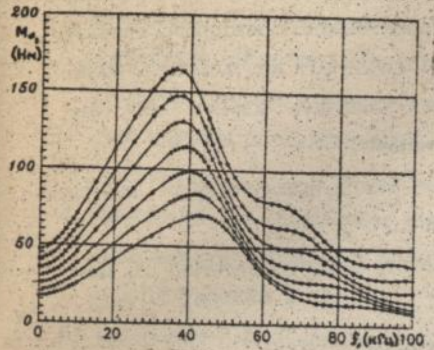
де $M_\omega = \pi \omega_0^2 \rho_0 h R^5 (\sin\omega \cos\omega - \omega)$ - момент скручування за рахунок сил інерції, ρ_0 - густина матеріалу, h - товщина включення.

В § 8 досліджено хвильове поле в дальній зоні (порядку 20 довжин хвиль). Використовуючи отриманий розривний розв'язок рівнянь Ламе, асимптотичний розклад для функції $H_\nu^{(1)}(z)$, $(\nu = k + 1/2,\ k = 0, 1, 2, \ldots)$, яка входить до ядра розв'язку, а також співвідношення (10) та формули вигляду (11) для напружень, виписуються асомптотичні подавання для зміщень та напружень у віддаленій зоні простору.

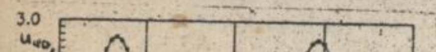
В останньому параграфі роботи викладено схему розв'язку системи (30) з поетапною реалізацією алгоритму. Описано також дослідження проведених обчислювань інтегралів, указаних в § 10.

При обчислюванні реактивного моменту скручування, амплітуди коливань, зміщень (напружень) середовища у віддаленій зоні, вхідні параметри приймали слідуючі значення: включення вироблено зі сталі, його товщина $h = 5 \cdot 10^{-4}$ м, радіус $R = 0.02$ м, а матеріал пружнього середовища - вапняний шпат з швидкістю хвилі зсуву $C_2 = 1113$ м/с, густиною $\rho_0 = 7900$ кг/м^3, параметром Ламе $\mu = 3.58 \cdot 10^9$ МПа, амплітудою падаючої хвилі $A = 0.01$ рад.

На мал. 1 приведено сім'ю кривих у вигляді залежності реактивного моменту скручування M від частоти $f = \omega/2\pi$ для різних розмірів сферичного дефекту $\omega \approx 23^\circ$ - крива 1, $\omega \approx 25^\circ$ - крива 2, $\omega \approx 27^\circ$ - крива 3, $\omega \approx 29$ - крива 4, $\omega \approx 31^\circ$ - крива 5, $\omega \approx 33^\circ$ - крива 6, $\omega \approx 36^\circ$ - крива 7. На мал. 2 показано напруження в пружньому середовищі в залежності від кута θ (кут



Мал.1



Мал.2

спостереження) на відстані 20 довжин хвиль від об'єкту при його кутовому розмірі $\omega \approx 37°$. Крива 1 відповідає частоті 30 кГц, 2 – 40 кГц, 3 – 50 кГц, 4 – 60 кГц.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ РОБОТИ

1. Побудовано розривні розв'язки хвильового рівняння (рівняння Гельмгольця) та тривимірних рівнянь руху теорії пружності для сферичного дефекту.

2. Здійснено зведення задач дифракції пружніх хвиль вільної природи на сферичному дефекті до одновимірних інтегродиференціальних (інтегральних) рівнянь.

3. Одержано нове спектральне співвідношення для многочленів Якобі з неінтегрованими ваговими функціями.

4. Побудовано ефективний наближений розв'язок задачі ди-

фракції хвиль скручування на абсолютно жорсткому нерухомому включенні: отримана формула для реактивного обертового моменту.

5. Отримано розв'язок задачі дифракції на твердому рухомому сферичному тонкому включенні: приведено формулу для амплітуди крутильних коливань включення.

6. Подальший розвиток отримав метод ортогональних многочленів стосовно до задач дифракції.

7. Досліджено поле дифрагованої хвилі на відстані 20 довжин хвиль.

8. Побудовано графіки залежності:

а) реактивного обертового моменту від частоти для різних кутових розмірів сферичного включення:

б) максимумів обертових моментів від частоти для тих же кутових розмірів дефекту:

в) максимумів обертових моментів від габаритів дефекту при постійній частоті:

г) амплітуди куту повороту від частоти для різних габаритів та товщин включення:

д) зміщення (напруження) пружнього середовища на відстані 20 довжин хвиль від кута точки спостереження для різних частот.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ, ВІДОБРАЖЕНІ В ПУБЛІКАЦІЯХ

1. Назаренко О.А., Попов Г.Я. Исследование метода разрывного решения для анализа дифракции акустических волн на абсолютно жесткой преграде. - Акустика и ультразвуковая техника. /Киев/. - 1992. - Вып. 27. - С. 27-31.
2. Назаренко О.А., Попов Г.Я. Метод анализа дифракций акустических волн на жесткой преграде вблизи жесткого плоского дна. - Акустика и ультразвуковая техника. /Киев/. - 1993 .

- Вып. 28. - С. 29-35.

3. Назаренко О.А. Применение метода разрывного решения для определения нагрузок //Городской семинар "Применение вычислительной техники и математического моделирования в прикладных научных исследованиях": тезисы докладов. - Одесса, 1994. - С. 11-12.
4. Назаренко О.А. Дифракция упругой волны кручения на сферическом дефекте //Одесский ун-т. - Одесса, 1995. - 11 с. - Деп. в ГНТБ Украины 01.06.95. - N 1318 - Ук.95.
5. Назаренко О.А. Сведение задач дифракции упругих волн на сферическом дефекте к интегродифференциальным уравнениям с помощью разрывных решений //Одеский ун-т. - Одесса, 1995.10 с. - Деп. в ГНТБ УКраины 01.06.95 N 1319 - Ук.95.
6. Попов Г.Я., Назаренко О.А., Котов А.Ю. Задача о напряженном состоянии упругой среды, содержащей конические и сферические дефекты /IV Международная конференция "Механика неоднородных структур": тезисы докладов. - Тернополь, 1995. С.194.

АННОТАЦИЯ

Назаренко О.А. Стационарные задачи дифракции волн на сферических дефектах. Диссертацией является рукопись из 120 стр. машинописного текста. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 - механика твердого деформируемого тела, ОГУ им. И.И.Мечникова, Одесса, 1996. В диссертации разработан подход к исследованию стационарных задач дифракции волн на сферических дефектах, основанный на применении метода разрывных решений и метода обобщенных интегральных преобразований. Построены разрывные решения волнового и трехмерных уравнений линейной теории упругости

в сферической системе координат. Решены задачи дифракции волны кручения на жестких неподвижных (подвижных) сферических телах оболочечного типа.

ABSTRACT

Nazarenko O.A. The stationary problems of wave diffraction on the spherical defects. The thesis is the typescript on 120 p. Thesis for the candidate degree of physic-mathematical science on the speciality 01.02.04 - mechanics of solid deformed body, Odessa State Mechnikov University, Odessa, 1996. The approach to research of the stationary problems of wave diffraction on spherical inclusion is worked out in the thesis. This approach is based on the method of discontinuous solutions and the generalized method of the integral transformations. The discontinuous solutions of the wave equation and equations of threedimensional linear elasticity theory are constructed in the spherical coordinate system. The problems of rotate-wave diffraction on the immobility (mobility) spherical bodies by cover type are solved.

КЛЮЧОВІ СЛОВА:

розривний розв'язок, хвильове рівняння, теорія пружності, стрибок, напруження, зміщення, стаціонарна дифракція, реактивний момент хвиль скручування, хвиля скручування, сферичні координати.

Підписано до друку 10.04.96. Формат 60x84/16. Папір газетний. Друк офсетний. 1,28 ум.друк.арк. 1,38 обл.-вид.арк. Тираж 100 прим. Замовлення № 90

Одеський державний політехнічний університет.
270044, Одеса, пр. Шевченка, 1.