

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

УДК 519.6 : 536.2

Тимошенко Марина Вікторівна

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОБІМІНУ У БАГАТОШАРОВИХ  
КОНСТРУКЦІЯХ З УЗАГАЛЬНЕНИМ НЕІДЕАЛЬНИМ КОНТАКТОМ

05.13.02 - математичне моделювання в наукових дослідженнях

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук



Київ - 1996



00759732 (X)

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Інституті технічної механіки НАН України

Наукові керівники: доктор технічних наук,  
старший науковий співробітник  
Шувалов Валентин Олексійович,  
кандидат фізико-математичних наук,  
старший науковий співробітник  
Веселовський Володимир Борисович.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор  
Хрущ Віктор Кузьмич,  
кандидат фізико-математичних наук, доцент  
Прохур Юрій Зіновійович.

Провідна організація-

Інститут кібернетики ім.Глушкова В.М. НАН України  
(м. Київ).

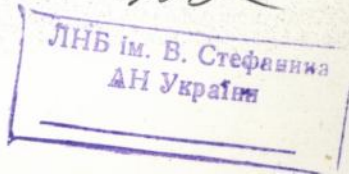
Захист відбудеться 30 травня 1996 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.01.20 при Київському університеті імені Тараса Шевченка (252127, м. Київ, проспект Глушкова, 6, факультет кібернетики, аудиторія 40).

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Київського університету.

Автореферат розісланий "19" квітня 1996 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради

Зінько П.М.



## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.

Актуальність. Стан питання. Численні енергетичні і технологічні процеси та природні явища описують математичними моделями, побудованими на рівняннях з частинними похідними параболічного типу, як правило, з змінними коефіцієнтами, часто нелінійними. Области, у яких необхідно шукати розв'язки цих рівнянь, можуть бути найрізноманітнішими. Моделювання багатьох практично важливих процесів вимагає розв'язування цих рівнянь у складених областях, що складаються з окремих підобластей. На суміжних межах цих підобластей ставляться ті чи інші умови спряження, найбільш типовими в яких є: рівність похідних та їх перших похідних (умова ідеального контакту); рівність похідних і наявність розриву функцій, пропорційного похідній (загальновідома умова неідеального контакту); усілякі поодинокі випадки розриву похідних і розриву функцій. Для розв'язання цих задач у теперішній час розроблено різноманітні методи: аналітичні, засновані на застосуванні методу скінченних інтегральних перетворень; чисельні, засновані на скінченнорізницевою, як правило, інтегроінтерполяційному методі; чисельно-аналітичні - метод скінченних елементів. Ці методи, як правило, у достатній мірі теоретично обґрунтовані і знаходять широке практичне застосування. Однак, у деяких випадках існуючі математичні моделі є недостатніми і вимагають подальшого розвитку і узагальнення. У окремих випадках співвідношення між значеннями шуканих функцій та їх похідних на межах суміжних областей можуть бути досить довільними. Між суміжними межами можуть бути завори скінченної ширини, таким чином область, у якій необхідно шукати розв'язок, може бути неоднорозв'язною. Це викликає необхідність як формулювання і обґрунтування більш загальних математичних моделей, так і побудови методик і алгоритмів пошуку розв'язків.

Підвищення ефективності математичного моделювання і застосування обчислювальних методів для дослідження таких процесів, у зв'язку з чим, є актуальним. Це досягається шляхом розробки узагальнених математичних моделей, ефективних для машинної реалізації алгоритмів та створення уніфікованих комплексів програм, орієнтованих на розв'язання широкого класу задач (зокрема, до них можуть бути віднесені задачі, що описуються рівняннями теплопровідності,

фільтрації, дифузії, рівняннями Нав'є - Стокса та ін.)

Саме цим питанням присвячено дисертаційну роботу.

Мета роботи: побудова узагальненої математичної моделі процесів, що описуються рівняннями в частинних похідних параболічного типу для складених областей, при досить довільних умовах спряження розв'язків на межах підобластей; розробка уніфікованих алгоритмів і технологій програмування класу задач; створення проблемно - орієнтованого комплексу програм; розв'язання нових актуальних задач теплопередачі у багатшарових конструкціях.

Наукова новизна дисертаційної роботи полягає в досягненні таких нових наукових результатів, які вносяться до захисту:

- сформульовано поняття узагальненого неідеального контакту (УНК) і з його використанням дано формулювання задач, що описуються рівняннями параболічного типу у складених областях при наявності різноманітних процесів у зазорах між контактуючими поверхнями, зокрема, задач визначення нестационарного теплового і пружнонапруженого стану багатшарових і рулонованих циліндрів, тепломасообміну у багатшарових конструкціях при наявності між суміжними шарами системи каналів, по яких рухається рідина;

- у рамках чисельного і чисельно-аналітичного методів, а також в використанні їх комбінації, розроблено економічні однорідні алгоритми розв'язання таких задач;

- здійснено органічне об'єднання сформульованої узагальненої математичної моделі, розроблених алгоритмів і програмного забезпечення, що реалізує ці алгоритми;

- за застосуванням розроблених алгоритмів розв'язано актуальні задачі нестационарної теплопередачі у пакетах пластин з неідеальним тепловим контактом між пластинами; задачі визначення термонапруженого стану багатшарових циліндрів із нестационарним температурним полем, включаючи теплонапружений стан рулонованих циліндрів, які утворюються при намотуванні штабів сталі на барабан моталки та при вніманні рулону з барабана в наступним охолодженням (нагріванням); задачі визначення параметрів теплообмінних апаратів з різною конструктивною реалізацією схем течій охолоджувача.

Таким чином, сформульовано підхід, що дозволяє об'єднати у межах одного класу задачі, які згідно з математичною постановкою та методологією їх розв'язання розглядалися раніш як рівні.

Перелічені наукові результати отримано автором особисто.

Практична цінність роботи полягає:

1. У можливості стандартного розв'язання класу задач, які описуються рівняннями параболічного типу у складених (багатшарових) областях, включаючи задачі тепломасообміну у багатшарових конструкціях з УНК, що у подальшому знижує витрати на розробку методологічного і програмного забезпечення задач даного класу.

2. У застосуванні деяких елементів запропонованого підходу при розробці інших методів, а саме: формулювання умов на суміжних межах (стиках) шарів; апроксимація граничних умов згідно з неявною схемою; однорідний алгоритм типу прогонки для систем алгебраїчних рівнянь з розвідженими матрицями; комбінація однорідного скінченно-різницьового алгоритму з алгоритмами чисельно-аналітичного методу.

3. У можливості використання одержаних результатів для оцінки температурного стану багатшарових елементів конструкцій літальних апаратів, енергетичних установок, теплообмінників, рулонованих циліндрів (наприклад, в галузі виробництва сталевих штабів).

4. У запропонованій технології розробки програмного забезпечення для розв'язання класу задач з УНК і у створеному за допомогою цієї технології програмному забезпеченні.

Рекомендації, одержані внаслідок проведених у роботі чисельних експериментів, було використано на етапі проектування і експериментального опрацювання систем теплового захисту об'єктів ракетно-космічної техніки, що дало можливість скорочення енергетичних витрат і підвищення їх технічного рівня.

Методи досліджень. При виконанні роботи використовувалися принципи формулювання початково-крайових задач для рівнянь параболічного типу, метод скінченних інтегральних перетворень, скінченно-різницьовий та чисельно-аналітичний методи, загальні положення методології створення проблемно-орієнтованих комплексів програм та проведення чисельного експерименту.

Дисертація виконувалась в Інституті технічної механіки (ІТМ) у рамках держбюджетних та госпроговірних тем.

В зв'язку з тим, що робота має два напрямки - розробка загальної методології формулювання та розв'язання задач в УНК та використання цієї методології для отримання розв'язків нових задач теплопередачі в багатшарових конструкціях, Вченою радою ІТМ було призначено двох наукових керівників.

Результати роботи впроваджено у проектних організаціях ( КВ "Південне" - Дніпропетровськ, КВ "Енергомаш" - Москва) у вигляді методик і результатів розрахунків температурних полів елементів багатопарових конструкцій і нагріву рідин у трубопроводах при впливові високоenthalпійних потоків газу.

Обґрунтованість і достовірність результатів підтверджуються коректністю математичних формулювань, теоретичним обґрунтуванням постановки задачі у випадку постійних коефіцієнтів, теоретичним та експериментальним обґрунтуванням алгоритму чисельного розв'язання нелінійних задач, практичним підтвердженням працездатності алгоритмів при розв'язанні конкретних задач та порівнянням результатів розв'язання окремих задач з літературними аналітичними, чисельними та експериментальними даними.

Апробація роботи. За результатами дисертації зроблено доповіді: на другій міжвідомчій нараді "Прикладна аеродинаміка літальних апаратів" (Дніпропетровськ, 1983), на третій Всесоюзній науково-технічній конференції "Сучасні проблеми двигунів та енергетичних установок літальних апаратів" (Москва, 1986); на Всесоюзній конференції молодих вчених (Дніпропетровськ, 1988); на 9 міждержавній науково-технічній конференції "Фотометрія та її метрологічне забезпечення" (Москва, 1992); на міждержавній конференції "Тепломасообмін і гідродинаміка в турбулентних течіях" (Алушта, 1992); на міжнародній конференції "Нетрадиційні та лазерні технології" (Москва, 1992), на міждержавній конференції "Обробка рідких середовищ електромагнітними полями" (Алушта, 1992); на наукових семінарах відділу механіки іонізованих середовищ ІТМ НАН України (Дніпропетровськ, 1982-1995).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 15 робіт. Особистий внесок пошукувачки в цих працях міститься в формулюванні елементів математичних моделей, в розробці алгоритмів та програмного забезпечення, в отриманні чисельних результатів.

Структура і обсяг роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, чотирьох глав, висновку, бібліографії та двох додатків. Обсяг дисертації складає 226 сторінок, включаючи 14 таблиць і 44 малюнки та список цитованої літератури. Основний зміст роботи викладено на 146 сторінках.

ЗМІСТ РОБОТИ.

У вступі надано коротку характеристику задач, що розглядаються, і методів їх розв'язання, зокрема скінченнорізницьового методу, методу скінченних елементів, методу R-функцій і різних аналітичних методів. Відзначено роботи, у яких початково-крайові задачі для рівнянь параболічного типу з розривними коефіцієнтами і в умовах розриву функцій чи їх похідних на межах суміжних областей сформульовано на класі узагальнених функцій із застосуванням інтегро-інтерполяційного методу їх розв'язання.

У першій главі сформульовано математичну модель та запропоновано алгоритми розв'язання відповідних задач за допомогою скінченнорізницьового методу.

Рівняння параболічного типу записано у досить загальній формі: враховано можливість конвективного переносу, наявність об'ємних джерел і т. д. На зовнішній поверхні області розв'язку формулюються граничні умови загального вигляду, які охоплюють усі відомі види граничних умов.

$$a_{j1} \frac{\partial T}{\partial x} + a_{j2} \frac{\partial T}{\partial y} + a_{j3} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_j \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_j \frac{\partial T}{\partial z} \right) + r_j T$$

j=1, k, (1)

$$b_{1,4}^{(*)} + b_{2,5}^{(*)} \frac{\partial T}{\partial y} - b_{3,6}^{(*)} \quad (2)$$

при  $y=y_1$  і  $y=y_{k+1}$ ,  $z_0 < z < z_1$ ;  $z = z_0$  і  $z = z_1$ ,  $y_1 < y < y_{k+1}$ .

Особливу увагу приділено формулюванню умов на суміжних поверхнях шарів. Сформульовано умови узагальненого неідеального контакту (УНК), які записано у вигляді

$$T_{j,1,2} - T_{j+1,2} = R_j^+ \cdot q_{j,1,2} + R_j^- \cdot q_{j+1,2} \quad (3)$$

$$q_{j,1,2} - q_{j+1,2} = \omega_j.$$

Індеси 1 та 2 відносяться до параметрів на нижній та верхній по-

верхніх відповідних шарів,  $q_j$  - потоки тепла або речовини, які пропорційні похідним шуканих функцій.

Ці умови дозволяють враховувати джерела і стоки на суміжних межах підобластей, що веде до розриву потоків, причому цей розрив может бути досить гнучким. Внаслідок розриву потоків на суміжних поверхнях розрив функцій записується у симетричному відносно потоку в вигляді в двома коефіцієнтами пропорційності (у термінології задач теплопровідності - коефіцієнтами термічного опору). Складовою частиною поняття УНК є наявність поміж шарами конструкції зазору скінченної ширини, у якому відбуваються процеси, які визначають параметри УНК - коефіцієнти  $R_j^-$ ,  $R_j^+$  та  $\omega_j$ . Зокрема, в задачах теплопровідності теплопередача через ці завори може здійснюватись за допомогою теплоносія або визначатись різними фізико-хімічними процесами - випаровуванням, хімічними реакціями та ін. Аналогічні процеси можуть мати місце і в задачах фільтрації або дифузії. У цьому разі не є необхідним виконання загальноприйнятої умови, що вона контактування - нескінченно тонка і вироджується в площину чи лінію. Тобто передача потоків через суміжні поверхні може бути досить довільною, що знаходить формальне відображення у залежності параметрів УНК від процесів, які відбуваються у зазорах поміж шарами.

Способи визначення параметрів УНК у загальному випадку є окремими задачами і не стосуються суті основних сформульованих у роботі положень. Окремі ілюстрації цього наведено у наступних розділах роботи.

Формулюючи для кожного конкретного випадку алгоритми або вирази для визначення коефіцієнтів диференціальних рівнянь і граничних умов та параметрів узагальненого неідеального контакту, можна розглядати великий клас задач у рамках єдиного методологічного підходу.

Задачі, що описуються системою диференціальних рівнянь (1), умовами (3) на межах контактуючих шарів і граничними умовами (2), назвемо задачами з узагальненим неідеальним контактом - задачами з УНК.

Використання уніфікованої форми запису для математичної постановки задач з УНК дозволяє відокремити математичні та алгоритмічні питання розв'язання задач від визначення, у залежності від конкретної задачі, коефіцієнтів рівнянь, граничних умов і умов

УНК. На підставі сформульованих загальних положень та відповідно до предметного напрямку роботи в цій главі сформульовано клас задач про теплообмін у багат шарових конструкціях в УНК.

Для обґрунтування постановки задач в УНК розглянуто задачі теплопровідності з постійними коефіцієнтами і побудовано їх аналітичні розв'язки. На підставі цих розв'язків сформульовано низку тверджень.

Стационарна задача.

Лема. Значення функцій  $T_{j,2}$  та  $T_{j,1}$  на межах  $j$ -того шару пов'язані співвідношеннями вигляду

$$b_{j,1} T_{j,1} + b_{j,2} \frac{\lambda_j}{\delta_j} (T_{j,2} - T_{j,1}) = b_{j,3}$$

Використовуючи цю лему і граничні умови на верхній межі, сформульовано теорему.

Теорема. Розв'язок стационарної задачі про теплопередачу у багат шаровій пластинці (циліндрі, сфері) з узагальненим неідеальним контактом існує і є єдиним при умові:

$$b_1 \cdot b_5 - b_2 \cdot b_4 - b_1 \cdot b_4 \sum_{j=2}^N \left( R_j^+ + R_j^- + \frac{\delta_{j-1}}{\lambda_{j-1}} \right) \neq 0.$$

Розв'язок нестационарної задачі отримується за допомогою методу скінченних інтегральних перетворень з використанням способу поліпшення збігання рядів.

Записано аналітичний розв'язок для смуги товщиною  $\delta$  при граничних умовах другого роду.

Після підставлення одержаного розв'язку у рівняння УНК (з урахуванням співвідношень  $T_{j,1} = T_j(0, \tau)$  та  $T_{j-1,2} = T_{j-1}(\delta, \tau)$  для визначення теплових потоків через межі шарів отримуємо систему інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду типу згортки.

$$q_{j1} = \Phi_j(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^\tau \left( d_j q_{j+1,1} - (d_j - d_{j-1}) q_{j,1} - d_{j-1} q_{j-1,1} \right) dt + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n d_j \int_0^\tau e^{-b_{nj}(t-\tau)} q_{j+1,1} dt - \right. \\ \left. - \int_0^\tau \left( d_j e^{-b_{nj}(t-\tau)} + d_{j-1} e^{-b_{n,j-1}(t-\tau)} \right) q_{j,1} dt + \right.$$

$$+ (-1)^n d_{j-1} \int_0^\tau e^{b_{nj-1}(t-\tau)} q_{j-1,1} dt \Big\} ,$$

$$\text{де } \Phi_j(\tau) = \frac{\omega_j R_j^-}{R_j} + \frac{1}{2R_j} \int_0^\tau (d_j \omega_{j+1} - d_{j-1} \omega_j) dt -$$

$$\frac{\tau}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ (-1)^n d_j \int_0^\tau e^{b_{nj}(t-\tau)} \omega_{j+1} dt - (-1)^n d_{j-1} \int_0^\tau e^{b_{nj-1}(t-\tau)} \omega_j dt \right\} +$$

$$+ \frac{1}{R_j} (T_{0j} - T_{0j-1}) .$$

$$d_j = \frac{2a_j^2}{\lambda_j \delta_j} , \quad b_{nj} = - \left( \frac{\pi n a_j}{\delta_j} \right)^2 , \quad a - \text{коefficient температуро-}$$

провідності,  $T_{0j}$  - розв'язок другої крайової задачі для неоднорідного рівняння теплопровідності при заданих початкових даних і нульових теплових потоках на м'яких шарів.

Доведено рівномірне збігання рядів, що входять у  $\Phi_j(\tau)$ , за умовою, що  $\omega_j(\tau)$  - обмежені функції.

В цій системі інтегральних рівнянь розриви теплових потоків впливають аналогічно членам типу джерел у рівнянні теплопровідності, не змінюючи, в порівнянні з задачами з звичайним термічним опором, загальної структури інтегральних рівнянь та їх математичних властивостей. Ніяких додаткових роблем зі збіжністю рядів і розв'язанням системи інтегральних рівнянь не виникає, через те що відповідні інтегральні рівняння відрізняються тільки вільними членами та функціональні властивості цих членів (неперервність, диференційовність і т.д.) збігаються. На підставі цього сформульовано теорему.

Теорема. Коли функції  $\omega_j(\tau)$ , що визначають розрив теплових потоків, обмежені, та  $R_j = R_j^- + R_j^+ \neq 0$ , то розв'язання нестационарної задачі з узагальненим неідеальним контактом вводить до розв'язування задачі з термічним опором при  $\omega_j(\tau) = 0$  і  $R_j = R_j^- - R_j^+$ .

Для нелінійних задач в УНК розроблено уніфіковані алгоритми, ґасновані на скінченнорівнищевій апроксимації і чисельно-аналітичному методі.

Скінченнорізницевий алгоритм. У кожній підобласті впроваджується скінченнорізницевий сітковий шаблон, за якому диференціальні рівняння замінюються скінченнорізницевими. Ці рівняння записуються у вигляді системи рівнянь з трьохдіагональними матрицями

$$A_i T_{i+1} + B_i T_i + C_i T_{i-1} = D_i. \quad (4)$$

Коефіцієнти цих матриць виражаються через коефіцієнти диференціальних рівнянь, записаних в уніфікованому вигляді (1), і залежать від застосованої скінченнорізницевої схеми. Таким чином, конкретний аналітичний запис рівнянь і застосована скінченнорізницева дискретизація відбиваються тільки на визначенні коефіцієнтів трьохдіагональної матриці і не впливають на наступну побудову алгоритму і програми. Цим досягається висока уніфікація останніх.

Для апроксимації співвідношень УНК на продовженні відповідних шарів вводяться фіктивні вузли. Значення функцій в цих фіктивних вузлах виключається за допомогою скінченнорізницевої апроксимації диференціальних рівнянь (4). Внаслідок цього отримано систему з двох рівнянь відносно  $T_{i-1}, T_{i+1}, T_i^-, T_i^+$

$$A_i^- T_{i+1} + B_i^- T_i + C_i^- T_{i-1} = D_i^-, \quad (5)$$

$$A_i^+ T_{i+1} + B_i^+ T_i + C_i^+ T_{i-1} = D_i^+,$$

$$i=1, \quad j=1, k-1;$$

де  $T_i^-, T_i^+$  - температури суміжних поверхонь шарів. В окремому випадку  $T_i^-, T_i^+$  ці два рівняння зводяться до одного. Таким же чином апроксимуються граничні умови.

Для обґрунтування алгоритму показано, що похибки апроксимації умов УНК і граничних умов мають другий порядок мализни, якщо такий порядок апроксимації мають диференціальні рівняння. Запропонована апроксимація умов УНК і граничних умов з використанням неявної схеми для диференціальних рівнянь є абсолютно стійкою відносно початкових даних.

Таким чином, задача зводиться до системи скінченнорізницевих рівнянь (4)-(5)...а система рівнянь має матрицю, відмінну від трьохдіагональної, і тому для її розв'язання не можна безпосередньо використати алгоритм прогонки. У роботі запропоновано модифікацію цього алгоритму, у відповідності з якою система рівнянь розбивається

ся на дві системи, одна з яких має трьохдіагональну матрицю. З неї методом прогонки визначаються значення температури у внутрішніх вузлах, на межах області та на одній з контактуючих поверхонь. Інша система рівнянь дозволяє потім визначити температуру на другій контактуючій поверхні за допомогою скінченних співвідношень.

Сформульовані алгоритми протестовано при чисельному розв'язуванні конкретних задач з класу задач теплопровідності. Зокрема, розглянуто задачу про охолодження пакету  $N$  пластин при неідеальному тепловому контакті між ними. Отримано результати, які ілюструють залежність часу охолодження центру пластин від кількості шарів та від стискувальних зусиль, які у свою чергу визначають рівень термічного опору (розглянуто до 9 шарів). Ці результати надано у критеріальному вигляді і можуть самі по собі використовуватись для практичних оцінок.

У другій главі для розв'язання задач переносу в УНК запропоновано застосування чисельно-аналітичного методу, що заснований на деяких ідеях методу скінченних елементів, а також методу степеневих рядів. Чисельно-аналітичний метод дає можливість будувати економічні і прості для машинної реалізації алгоритми та отримувати розв'язки з необхідною точністю. При формулюванні цих алгоритмів розрахункова область розбивається на смуги, які, зокрема, можуть збігатися з фізичними смугами конструкції. На межах смуг формулюються або умови безперервності функції та її похідної, або умови УНК. В межах смуги розв'язок зображається у вигляді поліномів відносно геометричної змінної. Коефіцієнти цих поліномів є функціями часу і іншої змінної. Отримано систему  $N-1$  рівнянь меншої вимірності з  $N+1$  невідомими функціями-коефіцієнтами поліномів. Для отримання рівнянь, яких не вистачає, використовуються граничні умови та умови УНК або умови безперервності на межах смуг. Виходячи з цих умов, отримано систему алгебраїчних рівнянь з розрідженою п'ятидіагональною матрицею. З використанням цієї системи рівнянь доведено лему про те, що у кожній смузі поміж додатковими членами існує лінійна залежність вигляду  $A_j \cdot T_{N+2}^j + B_j \cdot T_{N+1}^j = D_j$ . З урахуванням цього будується варіант методу прогонки для розв'язання отриманої системи алгебраїчних рівнянь. Формулюється алгоритм розв'язання задачі при будь-якій кількості смуг та досить загальних умовах на їх межах. Для обґрунтування методу показано, що при використанні поліномів 2-ого степеня з похибкою  $\delta^2$  ( $\delta$  - ширина смуги)

ги) розрахункові співвідношення чисельно-аналітичного методу зводяться до співвідношень скінче норізницевого методу, тобто похибка цього методу є  $\delta^2$ . При збільшенні степеня поліномів похибка зменшується. Внаслідок чисельних експериментів проілюстровано збіжність методу, як при збільшенні степеня поліномів (без введення проміжних смуг), так і при збільшенні кількості смуг.

У рамках цього методу розв'язано одновимірні та двовимірні задачі. Зокрема, досліджено вплив термічного опору на охолодження багат шарової пластини скінченної ширини (показано, що при збільшенні термічних опорів процес охолодження пластини скінченної ширини переходить у процес охолодження пластини нескінченної ширини - перехід від двовимірної задачі до одновимірної). За допомогою компіляції чисельно-аналітичного та скінченнорізницевого методів сформульовано алгоритм розв'язання спряженої задачі теплообміну у багат шаровому пакеті пластин, розділених смугами протікаючої рідини, та показано шляхи вастосугчння підходу для розв'язання двовимірних рівнянь Нав'є-Стокса.

Третю главу присвячено ілюстрації використання поняття УНК. Розглянуто дві групи практично важливих задач. Перша група пов'язана з визначенням температурного та пружньо - здеформованого стану багат шарових та рулонованих циліндрів з нещільним приляганням контактуючих поверхонь, а друга - з теплообміном у багат шарових конструкціях, коли в прошарках поміж поверхнями шарів рухаються рідини. На прикладі цих задач з одного боку обговорюються особливості, які спричиняють необхідність використання поняття узагальненого неідеального контакту, та питання визначення параметрів УНК, а з другого боку розглянуто загальні питання побудови алгоритму розв'язання задач з УНК.

Особливістю першої групи задач є те, що тепловий стан циліндрів при наявності термічних опорів, що залежать від тиску, суттєвим чином є пов'язаним з пружньо - здеформованим станом. З іншого боку, пружньо-здеформований стан через механізм термічних напружень є пов'язаним з температурним полем. Іншою особливістю цієї групи задач є неідеальність механічного контакту, що викликана наявністю мікронерівностей на поверхнях циліндра. Внаслідок змигання цих мікронерівностей радіальні переміщення на поверхнях шарів зазнають розриву.

З урахуванням цих особливостей сформульовано алгоритми розв'яз-

вання нестационарних задач, заснований на ідеях методу розщеплення по фізичних процесах: на першому часовому півкроці визначаються температурне поле та термічні опори при заданому розподілі тиску, на другому півкроці - пружньо-здеформований стан циліндрів при заданому температурному полі.

Ров'язано задачу про нагрівання 14-шарового циліндра і проведено дослідження впливу термічних опорів, неідеальності механічного контакту (зміняння нерівностей) на межах шарів на змінювання в часом температурного і пружньо-здеформованного стану циліндра та на тривалість процесу нагрівання.

Ров'язано також задачу про визначення температурного поля, міжшарового тиску та тиску на барабан моталки неізоотермічного рулонованого циліндра, отриманого намотуванням сталевих штабів на барабан моталки прокатного стану. На прикладі рулону з 100 зв'язів, які намотуються при різних натягах, показано вплив термічних опорів і змінювання мікронерівностей поверхні штаби на характер змінювання в часом температурного поля та пружньо-здеформованного стану рулону.

Особливістю другої групи задач, розглянутих в цій главі, є те, що їх ров'язок шукається у неоднорозв'язній області, коли між межами підобластей існують прошарки скінченної ширини.

Внаслідок того, що уздовж цих прошарків протікають рідини, теплопередача між шарами здійснюється за допомогою теплоносія. Течії рідин (теплоносіїв) описуються в квазіодновимірному наближенні. Виходячи з того, що коефіцієнти теплообміну  $\alpha_j$  між протікаючою рідиною та стінками каналу (шарами конструкції) відомі, формулюються співвідношення для визначення параметрів УНК -  $R^+_i, R^-_i, \omega_i$

$$\omega_j = \alpha_j^-(T_{Wj}^- - T_j) - \alpha_j^+(T_{Wj}^+ - T_j),$$

$$R_j = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)_j^-, \quad R_j = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)_j^+, \quad j=1, k-1;$$

На підставі розроблених у першому розділі алгоритмів сформульовано алгоритм розв'язання такої задачі при довільному розташуванні каналів, різних напрямках течії різних рідин, причому окремі шари конструкції, які розділяються рідинами, самі можуть бути (агатшаровими, а неідеальними контактами іншої природи між шарами).

З метою побудови формалізованого алгоритму, незалежного від

кількості каналів і схем течій теплоносіїв, впроваджується матриця, за допомогою якої формалізовано умови на стиках. Кожний рядок цієї матриці містить інформацію про параметри течії теплоносія у відповідному каналі. З використанням цього формулюється неважливий від схем течій алгоритм розрахунку температурного стану рідин та конструкції. Спочатку здійснюється розрахунок температурних полів неважливих рідин, для яких  $K_f=0$  ( $K_f$ -параметр відповідний кількості каналів конструкції, через які прійшла рідина). При цьому задається значення витрати і температури рідини на вході у відповідний канал. Потім розраховується температурне поле рідин для  $K_f=1$ ,  $K_f=2$  і т.д. При цьому витрата втікаючої рідини дорівнює витраті з протилежним знаком цієї рідини у каналі, з якого вона витікає. Також у відповідність приводяться температури на вході у даний канал і на виході з попереднього каналу ( $T_{вх} - T_{вих}$ ). При побудові структури алгоритму це досягається організацією двох циклів - зовнішнього по загальній кількості каналів та внутрішнього - по кількості сполучених каналів. З метою ілюстрації можливостей сформульованих алгоритмів розглянуто задачу про нагрівання (охолодження) рідин в конструкції, що складається з шести шарів, які розділені п'ятьма каналами з протікаючими рідинами.

Розглянуто чотири схеми, у кожній з яких є два канали з "гарячими" рідинами, що протікають незалежно одна від одної. Три інших канали сполучаються між собою, і по них протікає, наче по змішувальнику, одна "холодна" рідина. Ці схеми відрізняються напрямками течій нагріваючих рідин і взаємним розташуванням каналів, по яких протікають рідини, що нагріваються та охолоджуються.

Отримано графічні залежності зміни з бігом часу температури рідин на виході з конструкції, а також розподіл температур рідин уздовж каналів в різні моменти часу. Виявлено деякі особливості процесів нагрівання і охолодження рідин. Зокрема, відмічено немонотонний характер зміни температури "гарячої" рідини з бігом часу.

Наведено порівняння процесів нагрівання рідини у цих чотирьох схемах з найбільш простою схемою - теплообмінником, який має два канали з "холодною" і "гарячою" рідинами у протитечі і проточечі з однаковим співвідношенням витрат "холодної" і "гарячої" рідин у всіх п'яти схемах. На цій підставі обирається найбільш ефективна схема.

У четвертій главі викладаються елементи технології математич-

ного моделювання на ПЕОМ процесів переносу, опис яких зводиться до сформульованого класу задач в УНК. Основні положення цієї технології зводяться до наступного:

- формулювання математичної моделі для класу задач і формалізований її запис - відокремлення математичних особливостей задачі від її фізичної суті;
- розробка уніфікованих алгоритмів чисельної реалізації математичної моделі;
- модульний аналіз математичної постановки та алгоритмів - вилучення базисних і функціональних модулів;
- уніфікація структури даних і міжмодульних інтерфейсів окремих підпрограм.

Результати модульного аналізу відображено на схемі комплексу програм, що наводиться. В дно, що, виносячи питання визначення параметрів УНК в окремі модулі, маємо комплекс програм для розв'язання усього класу задач, в тому числі і задач, для яких поки ще не визначено параметри УНК. По мірі визначення природи УНК комплекс програм може доповнюватись модулями, в яких розраховуються параметри УНК. Завдяки уніфікації структури даних та міжмодульних інтерфейсів це не потребує будь-яких змін в інших модулях та структури програми в цілому.

В заключенні наведено основні результати та висновки по роботі.

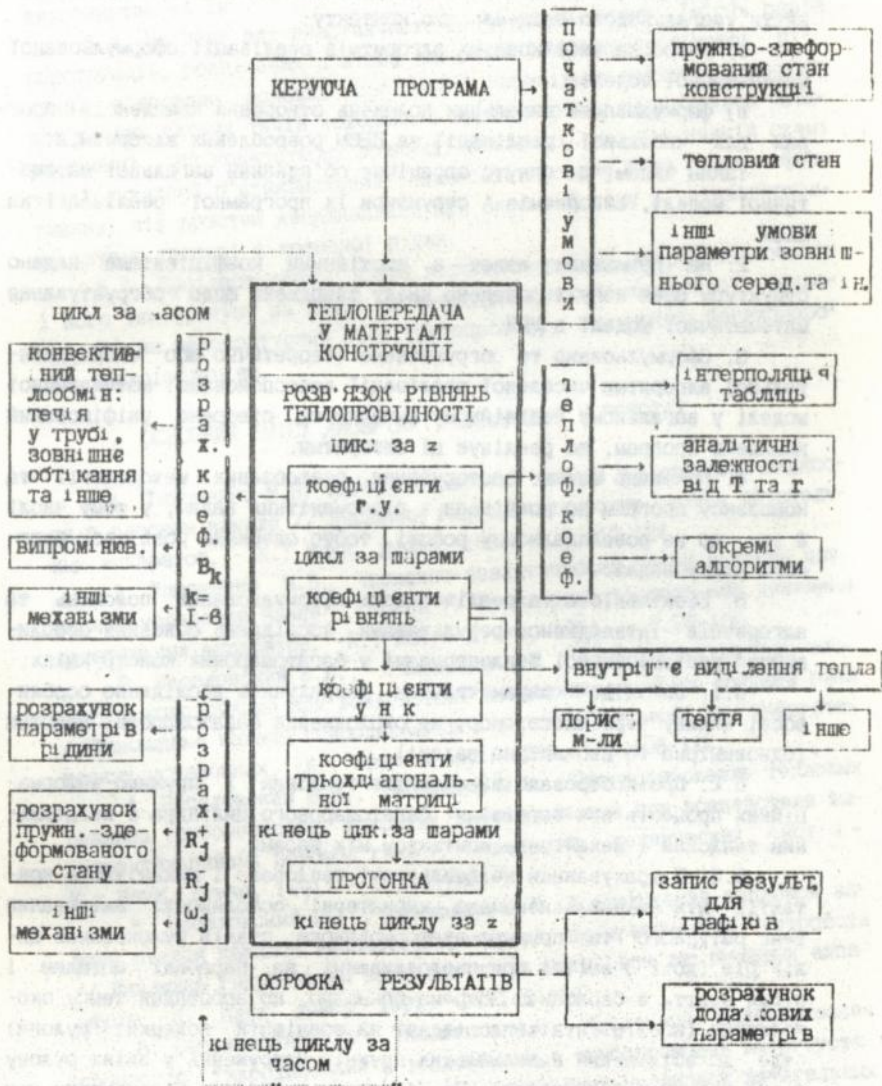
У додатку 1 розглянуто деякі нелінійні задачі, що пов'язані з потребами ракетно-космічної техніки. Наводиться порівняння здобутих результатів з існуючими експериментальними даними.

Додаток 2 містить в собі копії документів, які підтверджують практичне використання розроблених моделей, алгоритмів та програмного забезпечення.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

1. Розроблено методологію розв'язання широкого класу задач, що описуються рівняннями з частинними похідними параболічного типу у багатомарових областях при досить довільних умовах на межах підобластей - дозволяється розрив як функцій, так і потоків (зокрема, тепла або речовини), які пропорційні похідним шуканих функцій. Ця методологія об'єднує в один клас задачі, що розглядалися раніш

СТРУКТУРА КОМПЛЕКСУ ПРОГРАМ



ЛІБ ім. В. Стефаника  
АН України

як задачі різних класів. Складові елементи цієї методології такі:

- а) формулювання загальної математичної моделі, що включає поняття узагальненого неідеального контакту;
- б) розробка уніфікованих алгоритмів реалізації сформульованої математичної моделі;
- в) формулювання загальних положень створення комплексів програм для чисельної реалізації на ПЕОМ розроблених алгоритмів.

Таким чином, досягнуто органічне об'єднання загальної математичної моделі, алгоритмів і структури їх програмної реалізації на ПЕОМ.

2. На прикладах задач з постійними коефіцієнтами надано структуру розв'язку і наведено низку тверджень щодо обґрунтування математичної моделі в УНК.

3. Сформульовано та обґрунтовано (теоретично або експериментально) алгоритми чисельної реалізації запропонованої математичної моделі у загальному нелінійному випадку та створено уніфікований комплекс програм, що реалізує ці алгоритми.

4. Показано шляхи застосування розроблених методології та комплексу програм до розв'язань різноманітних задач, у тому числі й тих, що не розглядалися у роботі, тобто одержано розв'язок широкого класу задач.

5. Ефективність та реалізованість сформульованих положень та алгоритмів ідтверджено результатами досліджень основних особливостей нестационарної теплопередачі у багат шарових конструкціях.

5.1. Внаслідок параметричних розрахунків досліджено особливості впливу термічного опору на охолодження багат шарових пластин (одновимірна та двовимірна задачі).

5.2. Проілюстровано взаємовплив теплових і пружно-деформаційних процесів при нагріванні багат шарового циліндра в неідеальним тепловим і механічним контактом між шарами.

5.3. З урахуванням неідеальності теплового і механічного контактів між зв'язями визначено характерні особливості змінювання температурного та пружно-деформованого станів рулонованих циліндрів (до 1° зв'язів) при охолодженні на барабані моталки і після вняття в барабан. Зокрема показано, що зростання темп. охолодження (коефіцієнта тепловіддачі на зовнішній поверхні рулона) веде до збільшення максимальних пружних напружень у зв'язях рулону і тиску ... барабан моталки. Цю обставину необхідно урахувувати при

організації технологічних процесів обробки продукції прокатного виробництва та ін.

5.4. На прикладі пластинчастого теплообмінника (шість шарів конструкції, розділених п'ятьма каналами, по яких протікають рідини) в'ясовано основні особливості перехідних теплових процесів при різних схемах течій холодних і гарячих рідин (розглянуто чотири схеми). На конкретному прикладі наведено, що при певній схемі течії складний п'ятиканальний теплообмінник може бути більш ефективним, ніж простий двоканальний при одному й тому ж співвідношенні витрат гарячої і холодної рідин.

5.5. Проілюстровано вплив нестационарності витрат теплоносія і його температури на вході та нестационарності зовнішньої теплової дії на температурний стан трубопроводу, оповитого багатшаровою теплоізоляцією.

#### ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ ВИКЛАДЕНО У РОБОТАХ:

1. Тимошенко М.В. Алгоритм расчета вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале // Динамика гидромеханических систем летательных аппаратов. - К.: Наук. думка, 1982. - С.119-124.

2. Тимошенко М.В. Численно-аналитический метод решения двумерных уравнений Навье - Стокса // Прикладные вопросы аэр динамики летательных аппаратов. -К.: Наук. думка, 1984. - С.95-100.

3. Веселовский В.В., Тимошенко М.В. Температуры в поле элементов конструкций при воздействии высокоэнтальпийных потоков газа //Прикладные задачи гидродинамики и теплообмена в энергетических установках. -К.: Наук. думка, 1989. - С.108-112.

4. Веселовский В.В., Тимошенко М.В. Прогнозирование тепловых режимов трубопроводов, покрытых теплоизоляцией при воздействии высокоэнтальпийных потоков газа // Надежность технических систем. -К.: Наук. думка, 1991. - С.114-120.

5. Веселовский В.Г., Тимошенко М.В. Исследование тепловой защиты стенок каналов высокотемпературных энергетических устройств // Динамика гидросистем энергетических установок летательных аппаратов. -К.: Наук. думка, 1991. - С.145-148.

6. Веселовский В.В., Тимошенко М.В. Численное моделирование процессов гидродинамики и теплообмена в трубопроводах энергоустановок // Динамика гидросистем энергетических установок летательных

аппаратов. -К.: Наук. думка, 1991. - С.138-145.

7. Веселовский В.В., Тимошенко М.В. Температурные поля газопроводов сложной конфигурации // Техническая механика. -К.: Наук. думка, 1993. - Вып.1. С.117-121.

8. Веселовский В.В., Трусков И.В., Альмов Б.Д., Ляшенко В.И., Тимошенко М.В., Швачич С.В. О применении вихревых структур в процессах теплообмена // Moscow, Science-Whily, Сб."International conference on advanced and Laser technologies : Book of summaries. Part 1", 1992. - P.63-65.

9. Veselovsky V.B., Belay A.F., Lyashenko V.I., Timoshenko M.V., Shvachich S.V. Mathematical simulation of concentrated energy fluxes interaction with structural members // Moscow, Science - Whily, Сб. "International conference on advanced and Laser technologies : Book of summaries. Part 2 ", 1992. - P.46-48.

10. Шмукин А.А., Веселовский В.В., Лауценков Н.М. Исследование нестационарного теплообмена при изменяющемся расходе жидкости // Москва: МАИ, Сб. "Тезисы докладов 3-й Всесоюзной научно - технической конференции "Современные проблемы двигателей и энергетических установок летательных аппаратов"", 1986.

11. Веселовский В.В., Тимошенко М.В., Белая А.Ф., Ляшенко В.И. Нестационарный теплообмен при течении теплоносителя с переменным расходом в трубопроводах сложной конфигурации // Тепломассообмен и гидродинамика в турбулентных течениях : Тезисы докладов межгосударственной конференции. -К.: Наук. думка, 1992. - С.138-139.

12. Трусков В.Л., Веселовский В.В., Тимошенко М.В., Ляшенко В.И. Теплообмен при критическом состоянии воды внутри обогреваемой трубы // Тепломассообмен и гидродинамика в турбулентных течениях : Тезисы докладов межгосударственной конференции. -К.: Наук. думка, 1992. - С.142-143.

13. Веселовский В.В., Трусков И.В., Альмов Б.Д., Ляшенко В.И., Тимошенко М.В. Исследование генерации и взаимодействия плазменных тороидальных структур // Обработка жидких сред электромагнитными полями : Тезисы докладов межгосударственной конференции. -К.: Наук. думка, 1992. - С.148-149.

14. Веселовский В.В., Белая А.А., Тимошенко М.В., Ляшенко В.И. Математическое моделирование влияния полей различной физической природы на температурные поля трубопроводов энергоустановок // Обработка жидких сред электромагнитными полями : Тезисы докладов

межгосударственной конференции. -К.: Наук. думка, 1992. - С.63-64.  
15. Веселовский В.В., Трушков И.В., Алымов В.Д., Ляшенко В.И.,  
Белая А.Ф., Тимошенко М.В. Исследование характеристик электродуго-  
вого излучателя // Фотометрия и ее метрологическое обеспечение :  
Тезисы докладов 9-ой научно - технической конференции. -М.: ВНИИО-  
ФИ, 1992. - С.53.

#### ABSTRACT

Timoshenko M.V. A mathematical simulation of heat transfer in multi-layer structure with a generalized non-ideal contact. Manuscript. Thesis for the degree candidate of Technical Sciences of speciality code 05.13.02 - "A mathematical simulation in science investigations". Kiev University named by Taras Shevchenko. Kiev, 1996.

The generalized non-ideal contact conception (GNC) is suggested. The general mathematical problems statement is given on the base of parabolic equations in combined domains taking account of various processes between contact surface. Numerical solution algorithms are suggested with using of difference and numerical-analytical methods, and its combinations. Several conclusions are formulated on ground of GNC problems formulation and developed algorithms. Problem-oriented program complex is created. Several nonstationary problems are investigated for which the numerical solution is obtained. Among them are: computation of heat and elastically-stressed state of multilayer and rolling cylinders, heat transfer in multilayer structure with system of channels in which fluids move.

#### АННОТАЦИЯ

Тимошенко М.В. Математическое моделирование теплообмена в многослойных конструкциях с обобщенным неидеальным контактом. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.13.02 - математическое моделирование в научных исследованиях. Киевский университет имени Тараса Шевченко. Киев, 1996.

Сформулировано понятие обобщенного неидеального контакта.

(ОНК), и с его использованием дана общая формулировка задач, описываемых уравнениями параболического типа в составных областях, при наличии различных процессов в зазоре между контактирующими поверхностями. Предложены алгоритмы решения задач с ОНК с помощью конечно-разностного и численно-аналитического методов, а также их комбинации. В обоснование формулировки задачи с ОНК и разработанных алгоритмов доказан ряд утверждений. Сформулирована технология программирования класса задач с ОНК. Создан проблемно-ориентированный комплекс программ. Решен ряд задач нестационарной теплопередачи в многослойных конструкциях с ОНК, в частности, задачи определения нестационарного теплового и упруго - напряженного состояния многослойных и рудонированных цилиндров, тепломассообмена в многослойных конструкциях при наличии системы каналов с движущимися жидкостями.

#### КЛЮЧОВІ СЛОВА

Узагальнений неідеальний контакт, рівняння параболического типу, скінченнорізницевої та чисельно-аналітичний алгоритми, проблемно-орієнтований комплекс програм, нестационарна теплопередача, багатослоєві конструкції.



AB 34.498

**AB 34.498**