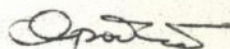


НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

На правах рукопису

УДК 539.3

ОРОБЕЙ Віктор Федорович



М Е Т О Д  
ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ  
В РОЗРАХУНКАХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Спеціальність 05.02.07-Механіка деформівного твердого тіла

А в т о р е ф е р а т  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
доктора технічних наук

Київ - 1996

Дисертація є рукопис  
Дисертація виконувалась на каф. динаміки, міцності машин та  
опіру матеріалів Одеського державного політехнічного університету

Науковий консультант: доктор технічних наук, професор  
О.Ф.ДАЩЕНКО

Офіційні опоненти:

доктор технічних наук, професор  
академік НАН України Я.М.ГРИГОРЕНКО  
доктор технічних наук, професор Г.В.ІСАХАНОВ  
доктор технічних наук, професор О.С.САХАРОВ

Провідна організація: Інститут проблем міцності НАН України

Захист дисертації відбудеться "20" мая 1996 р. о  
"15" годині на засіданні спеціалізованої Ради Д 01.02.18  
Національного Технічного Університету України "Київський  
політехнічний Інститут" 252056, Київ-56, проспект Перемоги,  
37, НТУУ КПІ - І201, Корп. І, ауд. І66

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці НТУУ КПІ  
Автореферат розіслано "19" ауґуста 1996 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої Ради Д 01.02.18  
кандидат технічних наук, доцент

О.О.БОРОНКО

ЛННБ України ім.В.Стефаніка



00754389 (-)

ЛННБ ім. В. Стефаніка  
АН України

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність проблеми. Теорія деформування твердого тіла одержала значний розвиток в зв'язку з комп'ютеризацією. Застосування ЕОМ призвело до виникнення принципово нових підходів й обґрунтованню чисельних методів, таких як метод кінцевих елементів (МКЕ).

Серед багатьох чисельних методів МКЕ й метод кінцевих різниць (МКР) займають по праву перші місця. Однак, подальше удосконалювання можливостей ЕОМ й пошук альтернативних МКЕ, МКР підходів знов привели до суто математичних методів розв'язування задач Коші та крайових задач. Це відноситься до різних варіантів метода граничних елементів (МГЕ), котрий має й інші назви – метод граничних інтегральних рівнянь (МГІР), метод потенціала, метод функції Гріна й т.і.

Розвиток цих методів почався з кінця 60-х років ХХ століття. Значний вклад в створення нового наукового напрямку внесли західні й вітчизняні вчені. Серед яких можна відзначити П.К.Бенерджі, Р.Баттерфілда, К.Бреббіа, Д.Телеса, Л.Вроубела, С.Крауча, А.Старфілда, Ф.Ріцо, Т.Крузе, С.Уокера, С.Кобаяші, Н.І.Мухелішвілі, С.Г.Міхліна, В.Д.Купрадзе, Ю.В.Вержжского, А.Г.Угодикова, Н.М.Хуторянского, А.І.Цейтліна, А.Я.Александрова, П.І.Перліна, Я.Л.Нудельмана й ін.

Поява й прогрес МГЕ в значній мірі зобов'язано тому, що великий клас крайових задач, які описуються диференціальними рівняннями параболічного й еліптичного типів, можуть бути зведені до інтегральних рівнянь Вольтера й Фредгольма. Методи розв'язування крайових задач за допомогою інтегральних рівнянь вважаються більш точними й економічними ніж методи, які базуються на апроксимації диференціальних операторів (МКЕ, МКР й ін.).

В МГЕ дискретизації підлягає тільки границя об'єкту, а в МКЕ – уся область, яку займає об'єкт. З цього факту МГЕ одразу переграє МКЕ тому що значно зменшується порядок розглядаемого простору. Далі МГЕ математично строго обґрунтован, оскільки використовує фундаментальні рішення диференціальних рівнянь, достовірно моделює вихідну задачу, дозволяє здобувати точні, як правило, значення унутрішніх зусиль й переміщень, значно спростовує підготовку вихідних даних, характеризується стійкістю чисельних операцій, в змозі зменшити розмірність задач. Усі ці факти дозволяють створити вельми гнучкий й володіючий багатьма можливостями алгоритм розв'язування різноманітних задач. Звісно (П.К.Бенерджі) й співвідношення витрат часу

праці ЕОМ на розв'язання однакових задач різними методами

$$t_{МКЕ}/t_{МГЕ} = 4 - 10.$$

Можна передбачити, що МГЕ (МГР) володіє серед інших чисельних методів найкращими характеристиками: найпростіша логіка алгоритму, висока стійкість та схожимість чисельних операцій, значна точність результатів, проста підготовка вихідних даних й т.п. Інші переваги залежать від особливостей конкретних задач. З цього приводу можна зазначити, що створення й розвиток різноманітних варіантів МГР є актуальною задачею механіки деформованого твердого тіла незважаючи на існуючі й добре відпрацьовані методи розрахунку конструкцій й окремих елементів.

Суттєвим видлученням науково-технічної літератури по МГЕ (МГР) є недостатнє висвітлення задач розрахунку лінійних систем, які мають важливе практичне значення. В якості приміриноків лінійних систем вибрані лінійно-пружні тонкостінні системи стержнів, пластин й оболонки, які існують для статичних й динамічних навантажень, температури, змінення форми (біфуркації), неконсервативних слідкуючих сил й т.п. Ця робота зменшує вказаний недолік.

Ціль роботи. Розробка й розвиток нового чисельно-аналітичного методу розрахунку різноманітних лінійних систем на базі одномірних інтегральних рівнянь Вольтера й Фредгольма, а також виявлення й розробка можливостей чисельної реалізації МГР для розв'язання нових прикладних задач стержнів, пластин й оболонки.

Наукову новину роботи складають наступні положення.

1. Розроблені основи теорії, дано обґрунтування й практичне застосування нової схеми зведення граничних інтегральних рівнянь Фредгольма 2-го роду в систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

2. Виявлені позитивні й негативні фактори, які вносять в розрахунки лінійних систем інтегральні рівняння.

3. Побудовані системи фундаментальних ортонормированих функцій й вантажних членів інтегральних рівнянь Вольтера для різноманітних задач. При цьому одержані нові рішення для:

- поперечних коливань прямолінійного стержня з урахуванням поперечної сили;
- площинного деформування кругового стержня з урахуванням деформації згину й розтягу;
- поперечних коливань й стійкості прямокутних пластин;
- статички, динаміки й стійкості круглих пластин;

- площинної задачі теорії пружності прямокутних пластин;
- статика пологових оболонок.

4. Розроблена ефективна метода розв'язання неконсервативних задач стійкості складних пружних систем стержнів й пластин.

5. Запропонована й реалізована нова схема розподілу перемінних диференційного рівняння згину круглих пластин.

6. Поставлені й розв'язані нові задачі статички, динаміки й стійкості круглих пластин й пластин з комбінованим контуром, який поєднує прямокутні й круглі елементи.

7. Одержані нові дані про поведінку пружних систем при дії неконсервативних й концентрації напружень від зосереджених сил.

8. Побудовані загальні рівняння деформування елементів пружних стержневих, пластинкових та оболонкових систем в статичці, динаміці й стійкості.

9. Виконано аналітичне інтегрування рівнянь статички пологових оболонок при произвольних умовах опірання.

10. Розвинена область застосування варіаційного методу Канторовича-Власова розрахунку площинних й просторових систем пластин й оболонок, які мають складну геометрію та змішані криві умови.

Достовірність результатів роботи забезпечується коректністю постановки задач, використанням зв'язних методів інтегрування диференціальних рівнянь, строгістю математичних перетворень, розробкою надійних алгоритмів чисельної реалізації, постановкою чисельних експериментів, перевіркою сходимості чисельних результатів, використанням індуктивних прийомів доказу окремих положень, порівнянням з відомими рішеннями аналогічних задач, розв'язаних іншими методами.

Практична цінність роботи полягає в створенні ефективного методу розв'язування задач статички, динаміки й стійкості лінійних систем стержнів, пластин й оболонок произвольної топології.

Дисертація виконувалась в рамках держбюджетних та госпдоговірних тем кафедри динаміки, міцності машин й опіру матеріалів Одеського державного політехнічного університету. Окремі розділи дисертації використовувались при створенні методик розрахунку елементів кранових конструкцій в Українському Інституті кранобудування (м.Одеса) й Одеському науково-дослідному відділі сталевих канатів ОАО "Стальканат".

Результати дисертації можуть бути використані проектними, науково-дослідними й науково-виробничими установами для створення ефек-

тивних програм розрахунку, аналізу й проектування різноманітних лінійних систем.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались й обговорювались на наступних наукових семінарах й конференціях: Республіканський міжвузівський науково-методичний семінар з опіру матеріалів й будівельної механіки Київського політехнічного Інституту під керівництвом академіка АН УРСР Г.С.Пісаренко (Київ, 1982, 1989); Семінар кафедри математичного моделювання Московського автомеханічного Інституту під керівництвом чл.-кор. АН СРСР Э.І.Гріголяка (Москва, 1983); 4 Республіканська нарада з проблем динаміки твердого тіла АН УРСР (Донецьк, 1984); Тематична конференція "Проблеми чисельного моделювання й автоматизація проектування Інженерних конструкцій Ленінградського будинку вчених АН СРСР (Ленінград, 1986); Всесоюзна школа-семінар "Системи аналітичних обчислень на ЕОМ та їх застосування в механіці" Інститута проблем механіки АН СРСР (Москва, 1987); Республіканська науково-технічна конференція "Удосконалювання залізобетонних конструкцій, працюючих на складні види деформації, та їх зведення в будівельну практику" (Полтава, 1989); Всесоюзний науковий семінар "Методи потенціалу й кінцевих елементів в автоматизованих дослідженнях Інженерних конструкцій" Ленінградського будинку вчених АН СРСР (Ленінград, 1990, 1991); Всесоюзна науково-методична конференція "Проблеми підготовки й перепідготовки фахівців в галузі створення виробів з композіційних матеріалів (Луганськ, 1990); Семінар кафедри САПР Московського Інституту Інженерів залізничного транспорту під керівництвом М.М.Шапошнікова (Москва, 1990); Республіканська конференція "Динаміка твердого тіла й стійкість руху" АН УРСР (Донецьк, 1990); Всесоюзна науково-технічна конференція "Методи потенціалу й кінцевих елементів в автоматизованих дослідженнях Інженерних конструкцій (Київ, КІЩА, 1991); Всесоюзна конференція "Актуальні проблеми прикладної математики" Союзу наукових й Інженерних спільнот СРСР (Саратов, СДУ, 1991); Науково-технічні конференції політехнічного університету й академії холоду (Одеса, 1989-95).

Публікації. По темі дисертації надруковано 26 праць, в тому числі 3 монографії (усі депоновані), 17 статей (3 депоновані), 8 тез доповідей.

На захист винесено:

- розробку основ теорії, обґрунтування й практичне застосування нової схеми розв'язання крайових задач лінійно-пружних систем стерж-

нів, пластин й оболонок произвольної топології;

- нові рішення звичайних й в часткових похідних диференціальних рівнянь лінійного деформування стержнів, пластин й оболонок;

- створення й апробацію ефективноі методи розв'язання неконсервативних задач стійкості пружних систем стержнів й пластин;

- реалізацію новоі схеми розподілення перемінних в задачах деформування круглих пластин;

- постанову й розв'язання нових задач статки, динаміки й стійкості круглих пластин й пластин з комбінованим контуром;

- результати дослідження поведінки пружних систем при дії неконсервативних сил й концентрації напружень в сингулярних точках тонких пластин;

- загальні рівняння деформування елементів стержневих, пластинних й оболонкових систем в статці, динаміці й стійкості;

- результати інтегрування рівнянь статки пологових оболонок при произвольних умовах опірання;

- розвинення області застосування варіаційного методу Канторовича-Власова розрахунку площинних й просторових систем пластин із змішаними крайовими умовами й складною геометрією в плані.

Структура й обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, 8 розділів, розбитих на 3 поділа (стержні, пластини, оболонки), заключення, приложення й списка літератури, який вміщує 130 найменувань. Й обсяг становить 377 сторінок машинописного тексту, 71 малюнок, 21 таблиця.

#### ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

В кінці 60-х, початку 70-х років ХХ сторіччя працями північноамериканських й європейських вчених був створен новий чисельний метод розв'язання диференціальних рівнянь математичної фізики - метод граничних елементів. Цей метод вважається більш досконалим, ніж створені раніше методи кінцевих елементів й кінцевих різниць.

В теперішній час достатньо добре розвинен варіант МТЕ, заснований на чисельном розв'язанні інтегральних рівнянь. Однак, форми представлення інтегральних рівнянь дозволяють розробляти різноманітні модифікації МТЕ. Найбільш перспективним серед них є метод, який поєднує чисельний й аналітичний підходи. Виконати це поєднання дозволяє одномірний варіант методу граничних інтегральних рівнянь. Особливістю метода даної роботи є застосування виключно одномірних інтегральних рівнянь. Це дозволяє мати аналітичне рішення для унут-

рішньої точки об'єкту, а чисельну модель формувати тільки для граничних точок. При цьому зберігаються усі переваги класичного варіанту МГЕ й додаються нові, пов'язані з аналітичним рішенням диференціальних рівнянь.

Аналіз праць з МГЕ посвідчив, що існуючі інтегральні співвідношення одноірних задач виявились невдачними. Ці співвідношення мають більш об'ємні рівняння, ніж аналогічні вирази МКЕ. Був зроблен висновок, що "...применение МГЕ к одномерным системам вообще не является эффективным" (П.К.Венерджі). Помилковість цього висновку полягає в тому, що існує багато варіантів фундаментальних рішень диференціальних рівнянь й висновки по якомусь варіанту не обов'язково справедливі для інших варіантів. З цієї причини в літературі з МГЕ недостатньо освітлені задачі одноірних систем.

В і поділу роботи розглядаються одноірний модуль й системи модулів з произвольним втівленням. Під модулем розуміється стержень й узагальнений стержень (пластина, оболонка), НДС котрих зводиться до розв'язання звичайних й в часткових похідних диференціальних рівнянь з постійними та перемінними коефіцієнтами. Цим вимогам відповідають багато задач розрахунку пружних стержневих, пластинкових й оболонкових конструкцій. У стержня, як одноірного тіла, є тільки дві граничні точки  $x=0$  й  $x=l$ . Тому о дискретизації границь стержня казати не варто й МГЕ одноірних систем логічно іменувати МГІР.

Для розрахунку подібного роду лінійних систем запропонован одноірний варіант МГІР, який використовує нову схему перетворення граничних інтегральних рівнянь в систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно початкових й кінцевих параметрів НДС модулів. Суттєвість запропонованого методу - в початковій дискретизації лінійної системи на першопеглики (модулі). Потім виконується аналіз стану усіх модулів, вибір відповідних рівнянь й зворотний синтез модулів в задану систему. Така схема нагадує схему розв'язання задач по МКЕ, однак застосування інтегральних рівнянь в багатьох випадках дозволяє більш ефективно крокувати до наміченої цілі.

Будування співвідношень одноірного варіанту МГІР починається з розгляду відповідних звичайних диференціальних рівнянь й початкових умов в символічній формі (задача Коші з невизначеними початковими умовами). Рішення задачі Коші можна представити в матричній формі

$$Y(x) = A(x)X(0) + B(x), \quad (1)$$

де  $Y$  - вектор НДС модуля в поточній точці;  $A$  - квадратна матриця фундаментальних ортонормірованих функцій диференціального рівняння. Вид фундаментальних функцій залежить від коренів характеристичного рівняння й унутрішній зміст матриці  $A$  становить набір функцій від поліномів до гіперболотригонометричних функцій, тобто порівняно простих, достатньо гладких функцій, які можна багато разів диференціювати та інтегрувати.  $X$  - вектор початкових параметрів;  $B$  - вектор навантаження, який записується в інтегральній формі елементами типу

$$B_{ni} = \int_0^x G(x, \xi) q_i(\xi) d\xi. \quad (2)$$

Тут  $G(x, \xi)^{(n-1)}$  - функція Гріна чи її похідна по  $x$ . Для одномірних інтегральних рівнянь функція Гріна є виродженим ядром, залежним від різниці аргументів, й яке не має сингулярних особливостей. Вираз (2) інтегрується без якихось труднощів. Запис (2) також вимагає, щоб навантаження  $q_i(\xi)$  було задано на  $[0, l]$ . Включення зосереджених й кусочно-неперервних навантажень до  $[0, l]$  виконується одиничною функцією Хевісайда, дельта-функцією Дірака та її похідними.

Для системи одномірних модулів з произвольною топологією можна скласти шляхом матричного додавання рівняння, яке об'єднує рівняння типу (1). При цьому вектори  $Y, X, B$  будуть мати параметри НДС усіх модулів, а матриця  $A$  квазідіагоналізується таким чином

$$A = \begin{matrix} \begin{matrix} A_1 & & & \\ & \dots & & \\ & & A_i & \\ & & & \dots \\ & & & & A_m \end{matrix} & , \end{matrix} \quad (3)$$

де  $A_i$  - матриця фундаментальних ортонормірованих функцій  $i$ -го модуля;  $m$  - число модулів в системі. Будемо мати матрицю стрічкового типу, у якій стрічка має суттєву розривність (цілком ненульовими будуть елементи тільки головної діагоналі) в порівнянні з матрицею жорсткості МКЕ.

При граничному значенні перемінних кожного модуля  $x_i = l_i$  інтегральне рівняння Вольтера 2-го роду (1) стає граничним інтегральним

рівнянням Фредгольма 2-го роду, для якого можна зробити ланцюжок перетворень (виключення вектору кінцевих граничних параметрів  $Y(l)$ )

$$\begin{aligned}
 Y(l) &= A(l)X(0) + B(l) \rightarrow A(l)X(0) - Y(l) = -B(l) \rightarrow \\
 A(l)X_* - CX_* &= -B(l) \rightarrow [A(l) - C]X_* = -B(l) \rightarrow \quad (4) \\
 A_*X_* &= -B.
 \end{aligned}$$

В цій схемі перетворень кінцеві граничні параметри вектору  $Y$  переносяться на вектор початкових параметрів  $X$  і матриця  $Y$  виключається з розглядання. Утворюється система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно початкових і кінцевих параметрів НДС модулів конструкції. Матриця  $A_*$  відізняється від матриці  $A$  тільки набором нульових компенсуєчих елементів, які забезпечують переніс параметрів з  $Y$  до  $X$ . Для наочності схеми перетворень (4) компенсуєчі елементи зведені в окрему матрицю  $C$ , яка названа топологічною. Її елементи відображають співвідношення статичних, кінематичних і жорсткових параметрів, кути нахилу модулів, зв'язок фізично однакових і різних величин і т.ін. Слід відзначити, що запропонований метод не має аналогів в науково-технічній літературі. Тому введена низка термінів і означень, які дозволяють подати теорію МГІР в завершену стій.

Процес переносу кінцевих параметрів заснован на двох операціях: 1. Обнулення стовпців матриці  $A$ , пов'язаних з нульовими початковими параметрами вектору  $X$ . 2. Введення в обнулену в окремих стовпцях матрицю  $A_0$  компенсуєчих елементів. Коли їх звести в топологічну матрицю, то

$$A_* = A_0 - C. \quad (5)$$

Вектори лінійної системи  $X$  і  $Y$  при граничному значенні перемінних  $X_i = l_i$  будуть мати 3 групи граничних параметрів. Перша група - нульові граничні параметри, що визначається умовами опірання. Друга група - залежні параметри, зв'язок між котрими визначається рівняннями рівноваги і сумісності переміщень вузлів системи. Третя група граничних параметрів ніяк не зв'язані проміж собою. Ці параметри умовно можуть бути названі незалежними. Наявно, що переніс параметрів з  $Y$  до  $X$  повинен компенсуватись ненульовими еле-

ментами матриці  $C$ . Незалежні параметри вектору  $Y$  повинні бути перенесені на місця нульових параметрів вектору  $X$ , а залежні параметри переносяться згідно з рівняннями їх зв'язку. Правило для визначення величин й положення компенсуючих елементів складають 3 випадка.

1. При перенесенні незалежного параметра вектора  $Y$  до вектора  $X$ , компенсуючий елемент буде рівен коефіцієнту при параметрі з своїм знаком за схемою

$$\begin{array}{c}
 i \quad j \quad k \quad l \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 & l & l^2/2 & l^3/6 \\
 \hline
 j & & 1 & l \\
 \hline
 k & -a & & 1 \\
 \hline
 l & & & & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 X_{i1}=0; Y_{k1} \\
 \hline
 X_{j1} \\
 \hline
 X_{k1} \\
 \hline
 X_{l1} \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 Y_{i1}=0 \\
 \hline
 Y_{j1}=0 \\
 \hline
 a Y_{k1} \\
 \hline
 Y_{l1}=0 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad (6)$$

таким чином, компенсуючий елемент матриці  $C$  повинен з'явитися на місці  $(k, i)$ , де  $k$  - номер рядка матриці  $Y$ , де знаходиться параметр,  $i$  - номер рядка матриці  $X$ , куди переноситься параметр. Іншими словами, перший Індекс положення компенсуючого елемента означає стару адресу, а другий Індекс - нову адресу переносимого параметра.

2. Перенос залежних параметрів приводить до повторення операцій першого випадку з той тільки різницею, що в матриці  $X$  не з'являються нові елементи, а в матриці  $A_*$  відповідні рядки будуть мати кілька компенсуючих елементів

$$\begin{array}{c}
 i \quad j \quad k \quad l \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 & & & \\
 \hline
 j & & & \\
 \hline
 k & & & \\
 \hline
 l & & & \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 X_{i1}(t) \\
 \hline
 X_{j1}(0) \\
 \hline
 X_{k1}(0) \\
 \hline
 X_{l1}(t) \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 Y_{i1}(t) = a X_{i1}(t) - b X_{j1}(0) \\
 \hline
 Y_{j1}(t) = 0 \\
 \hline
 Y_{k1}(t) = -c X_{k1}(0) + d X_{l1}(t) \\
 \hline
 Y_{l1}(t) = 0 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 = -B; \\
 \hline
 \end{array}
 \quad (7)$$
  

$$\begin{array}{c}
 i \quad j \quad k \quad l \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 -a & b & & \\
 \hline
 j & & & \\
 \hline
 k & & c & -d \\
 \hline
 l & & & \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 X_{i1}(t) \\
 \hline
 X_{j1}(0) \\
 \hline
 X_{k1}(0) \\
 \hline
 X_{l1}(t) \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 = -B \\
 \hline
 \end{array}$$

3. Коли переносяться параметри в межах вектора  $X$  компенсуючі елементи отримують зсув відповідно схеми

	$i$	$j$	$k$	$l$		$i$	$j$	$k$	$l$	
$i$		$l$	$l^2/2$	$l^3/6$	$X_{i1}=0; X_{k1}$ $X_{j1}$ $aX_{k1}$ $X_{l1}$	$i$	$al^2/2$	$l$	$l^3/6$	$X_{k1}$
$j$		$1$	$l$	$l^2/2$		$j$	$al$	$1$	$l^2/2$	$X_{j1}$
$k$			$1$	$l$		$k$	$a$		$l$	
$l$				$1$		$l$			$1$	$X_{l1}$

(3)

В цьому випадку елементи матриці  $A$  зсуваються на місце стовпця, номер якого рівен номеру рядка нового положення перенесеного параметру. Компенсуючі елементи будуть рівні помноженню коефіцієнта при переносимому параметрі на елементи матриці  $A$ . В такому разі різко збільшується число компенсуючих елементів. Тому необхідно, при можливості, уникати переносів параметрів в межах матриці  $X$ . Досягається це формуванням орієнтовного графа лінійної системи так, щоб в вузлах не збігались 2 й більше початкових точок модулів. Для систем з великим числом модулів зробити такий граф вельми складно, тому оптимальним буде такий граф, при котрому в кожному вузлі будуть збігатись мінімальне число початкових точок.

Визначив з аналізу матриць  $Y, X$  усі компенсуючі елементи матриці  $A_*$ , можна звести інтегральне рівняння типу (1) згідно з схемою (4) до системи алгебраїчних рівнянь  $A_* X_* = -B$ . Тут матриця коефіцієнтів  $A_*$  буде матрицею вельми розрідженою й загального типу, вектор  $X_*$  буде мати початкові й кінцеві параметри НДС усіх модулів системи, вектор навантаження  $B$  схеми (4) не змінюється. Розв'язання розглядаємої системи рівнянь може бути здійснено за допомогою метода виключення Гауса. Особливість матриці  $A_*$  полягає в тому, що після обнулення стовпців в неї з'являються нульові ведучі елементи. Тому перед застосуванням методу Гауса потрібно змінити порядок рядків матриць  $A_*$  й  $B$ , який виключає нульові ведучі елементи.

Найбільш складною операцією в алгоритмі МГР є формування матриці коефіцієнтів  $A_*$ , яке має наступні етапи:

1 крок. Формується квазідіагональна матриця (3). Нульова матриця  $A$  заповнюється блоками  $A_i$  граничних значень ортонорміруваних фундаментальних функцій, що виконується операторами циклу.

2 крок. Дорівнюються нулю стовпці матриці  $A$ , номери котрих рівні номерам нульових рядків вектору  $X$ .

3 крок. Визначаються компенсуючі елементи топологічної матриці  $C$ .

4 крок. Матриця  $A_*$  є результатом додавання матриці  $C$  до обнуленої в окремих стовпцях матриці  $A_0$  згідно з виразом (5).

Матриця навантаження  $B$  утримує елементи з вкладеними силовими просторами на основі теорії узагальнених функцій й сплайнов. Навантаження на кожний модуль задається, а функція Гріна завжди може бути визначена. Тому в матриці  $B$  після інтегрування зостаються члени з узагальненими функціями й сплайнами. Одинична функція Хевісайда й сплайни легко програмуються на ЕОМ, а дельта-функція Дірака та її похідні повинні представлятися нулями. Вектор навантаження  $B$  в алгоритмі МГІР не вимагає зведення навантаження до еквівалентної вузлової, як це робиться в МКЕ, так що спростовується проміжна операція.

Розв'язанням системи лінійних алгебраїчних рівнянь визначаються необхідні початкові параметри, а вектор стану в унутрішніх точках кожного модуля системи визначається обчисленням по рівнянню Вольтера (1). Таким чином, алгоритм одномірного варіанту МГІР заснований на операціях перетворення інтегральних рівнянь Вольтера й Фредгольма 2-го роду, які суттєво відрізняються від відповідних операцій теорії МГЕ. При цьому розглянуто 2 теореми. Перша теорема стверджує, що граничні умови кожної пружної системи завжди забезпечують виконання схеми перетворень (4) ( $Q_x \geq L_y$ , тобто число нульових параметрів вектору  $X$  завжди більше або рівно числу незалежних параметрів вектору  $Y$ ). Згідно з другою теоремою завжди існує варіант перестановки рядків матриці  $A_*$ , який виключає нульові вхідні елементи. Це дозволило теоретично обґрунтувати можливість виконання алгоритму МГІР для одномірного випадку.

Для прямолінійного стержня складено рівняння МГІР загального випадку деформування. Воно представлено на стор. 12, де  $A_{n+c}$ ,  $A_{kr}$ ,  $A_r$ ,  $G_{n+c}$ ,  $G_{kr}$ ,  $G_r$  - матриці фундаментальних функцій й функцій Гріна згину, зсуву, кручення й розтягу, форми запису котрих представлені в роботах [4-7, 9, 11, 12]. Показано використання рівняння (9) для розв'язання різноманітних задач статички лінійних систем з прямолінійних стержнів. Розглянута задача площинного деформування кругового стержня з урахуванням деформації згину й розтягу. Рівняння рівноваги цього випадку зводяться до сумісної системи двох рівнянь відносно переміщень

1	$EI_z U_y(x)$	$A_{\text{ннс}}$				$EI_z U_y(0)$	$G_{\text{ннс}} q_y(\xi)$
2	$EI_z \varphi_z(x)$					$EI_z \varphi_z(0)$	$G'_{\text{ннс}} q_y(\xi)$
3	$M_z(x)$					$M_z(0)$	$G''_{\text{ннс}} q_y(\xi)$
4	$Q_y(x)$					$Q_y(0)$	$G'''_{\text{ннс}} q_y(\xi)$
5	$EI_y U_z(x)$	$A_{\text{ннс}}$				$EI_y U_z(0)$	$G_{\text{ннс}} q_z(\xi)$
6	$EI_y \varphi_y(x)$					$EI_y \varphi_y(0)$	$G'_{\text{ннс}} q_z(\xi)$
7	$M_y(x)$					$M_y(0)$	$G''_{\text{ннс}} q_z(\xi)$
8	$Q_z(x)$					$Q_z(0)$	$G'''_{\text{ннс}} q_z(\xi)$
9	$GI_k \theta(x)$	$A_{\text{кр}}$				$GI_k \theta(0)$	$-G_{\text{кр}} m(\xi)$
10	$M_{\text{кр}}(x)$					$M_{\text{кр}}(0)$	$-G'_{\text{кр}} m(\xi)$
11	$EA u(x)$	$A_p$				$EA u(0)$	$-G_p q_x(\xi)$
12	$N(x)$					$N(0)$	$-G'_p q_x(\xi)$

$x \int_0^{\xi} \dots d\xi$  (9)

$$\begin{cases}
 v^{IV}(\alpha) + \frac{EAR^2}{EI} v(\alpha) + u'''(\alpha) - \frac{EAR^2}{EI} u'(\alpha) = \frac{R^4}{EI} q_y(\alpha); \\
 \left(1 + \frac{EAR^2}{EI}\right) u''(\alpha) + v'''(\alpha) - \frac{EAR^2}{EI} v'(\alpha) = -\frac{R^4}{EI} q_x(\alpha),
 \end{cases} \quad (10)$$

де  $v(\alpha)$ ,  $u(\alpha)$  - поперечне й поздовжнє переміщення в ісі кругового стержня;  $EI$ ,  $EA$  - згинна й поздовжня жорсткості;  $R$  - радіус стержня;  $q_y(x)$ ,  $q_x(\alpha)$  - поперечне й поздовжнє навантаження;  $\alpha$  - кутова координата. Система рівнянь (10) з початковими параметрами розв'язувалась за допомогою Інтегрального перетворення Лапласа. Відповідні рішення в матричній формі показано на стор. 13, де фундаментальні ортонормовані функції й вантажні члени представлені в роботі [10]. На ряді прикладів показано застосування рівняння (11). В аналогічній формі представлено рішення рівняння згину прямолінійного стержня на пружній одношаровій основі з двома коефіцієнтами ліанки. Дан приклад розрахунку замкнутого контура на пружній основі.

$EIV(\Delta)$	$A_{11}$	$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$A_{15}$	$A_{16}$	$EIV(0)$	$B_{11}$
$EIV(\Delta)$		$A_{22}$	$-A_{23}$	$-A_{24}$		$A_{26}$	$EIV(0)$	$B_{21}$
$M(\Delta)$			$A_{22}$	$A_{12}$		$-A_{36}$	$M(0)$	$-B_{31}$
$Q(\Delta)$				$A_{11}$		$-A_{46}$	$Q(0)$	$-B_{41}$
$EAU(\Delta)$	$A_{51}$	$A_{52}$	$-A_{53}$	$-A_{54}$	$A_{11}$	$A_{56}$	$EAU(0)$	$-B_{51}$
$N(\Delta)$			$-A_{64}$		$A_{11}$		$N(0)$	$-B_{61}$

+

∫

0

(II)

Розв'язання різноманітних задач статички площинних й просторових стержневих систем дозволили сформулювати наступні висновки по застосуванню рівнянь й алгоритму МГР:

1. Розрахунок НДС системи виконується тільки в рамках локальних систем координат кожного модуля. Цей висновок можна вважати позитивним, тому що є вибір произвольного порядку формування головної матриці МГР – вектора початкових параметрів  $X$  й виключаються операції переходу від локальних систем координат до глобальної й навпаки.

2. Не потрібно проведення статичного й кінематичного аналізів системи на прикмет вибіру основних систем, тобто розрахункова схема конструкції в МГР не підлягає зміненням й тим самим підвищується достовірність результатів розрахунку.

3. Стержнева система дискретизується в вузлах на окремі модулі. Як правило, вузловими точками є точки розриву статичних й кінематичних параметрів стержнів.

Мережі дискретизації розрахункових схем МГР й МКЕ однакові, коли переміщення стержнів описуються поліномами. Якщо переміщення описуються гіперболотригонометричними функціями, то мережа МКЕ має більше модулів, ніж мережа МГР при однаковій точності результатів.

Матриця  $A_*$  МГР для випадка просторового деформування стержня має розмір  $12 \times 12$  елементів й включає тільки 26 ненульових елементів. Матриця жорсткості МКЕ має той самий розмір, однак включає 40 ненульових елементів (О.М.Масленіков, В.А.Постнов й ін.).

4. МГР має більший розмір системи рівнянь ніж методи сил й переміщень, однак логика алгоритму суттєво простіша. При формуванні системи рівнянь МГР не застосовуються операції транспонування, множення, обернення матриць, зведення заданого навантаження до вузлового навантаження. Матриці МГР формуються на базі одного інтег-

рального рівняння - рішення задачі Коші, в котрому циклічно змінюються геометричні параметри й навантаження модулів. Можна заключити, що метод має максимум арифметичних операцій й мінімум логічних операцій, тобто включає усі ознаки машинних методів розрахунку (М.М. Шапошніков).

5. МГІР складається з рішення задачі Коші в матричній формі та крайовій задачі для лінійної системи. Крайова задача зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно початкових й кінцевих параметрів усіх модулів. Для розв'язання системи рівнянь МГІР може бути застосован метод виключення Гауса без вибору ведучих елементів чи з обмеженим вибором ведучих елементів.

6. МГІР привадиє к утворенню добре обумовлених (як правило, міра обумовленості рівня чи близька до 1) й дуже розріжених матриць коефіцієнтів  $A_*$  загального виду, не симетричних й не позитивно визначених. Матриця  $A$  має блочну структуру, котра потім порушується після операції (5) й перестанови рядків в  $A_*$ . Використання методу Гауса без вибору ведучих елементів не приводить до значного накоплення помилок операцій виключення. Наявність жорсткових параметрів  $EA, EI, GI_k, GA$  й т.і. в матриці  $X_*$  натуральним чином масштабує матрицю  $A_*$ , коли числа поволі зменшуються при віддаленні від головної діагоналі.

Визначник матриці  $A_*$  в безрозмірних координатах рівен 1.

7. МГІР має значні резерви економії часу роботи й пам'яті ЕОМ. Прямий й частку оборотного кроків методу Гауса можна виконувати тільки над ненульовими елементами матриці  $A_*$ .

8. МГІР дозволяє виконувати розрахунок пружних систем при змінінні координат навантаження, при комбінованих видах деформування модулів, при прямій та косої симетрії розрахункової схеми, при дії температури, помилкових розмірах й інших факторах. Топологічна матриця  $C$  відображає геометричні особливості лінійної системи. Набір її ненульових елементів залежить від орієнтовного графа розрахунку й інваріантен по відношенню до виду розрахунку (статичному, динамічному, біфуркаційному).

9. Алгоритм МГІР дозволяє без проміжних операцій переходити від крайовій задачі визначення початкових параметрів до обчислення НДС в унутрішніх точках модулів. Між МГІР й МКЕ існує зв'язок. Матриця жорсткості  $KE$  може бути визначена з рівнянь МГІР (9) при одиничних кінематичних діях на модуль.

Далі розглянуті задачі динаміки й стійкості пружних систем. Від-

мічено, що проблема власних значень пружних систем продовжує залишатися актуальною задачею теорії розрахунку. Так, методи сил й переміщень дозволяють визначати точні спектри частот власних коливань й критичних сил, однак трансцендентні рівняння власних значень цих методів мають точки розриву 2-го роду. Можливі також появи фіктивних й пропуски дійсних частот внаслідок зміни заданої розрахункової схеми на основну систему. В МГР власні значення визначаються з вікового рівняння (О.М. Масленіков), де спектри по-перше обмежені, по-друге неточні внаслідок зміни системи з нескінченими числами ступенів свободи на систему з кінцевими числами ступенів свободи.

В роботі визначен вид трансцендентного рівняння МГР для пошуку спектрів власних значень пружних систем. Це рівняння слідує з системи алгебраїчних рівнянь (4) при  $B = 0$  й  $X_* \neq 0$

$$|A_*| = 0 \quad (12)$$

Визначник (12) має лише систему граничних значень фундаментальних ортонормованих функцій, що дозволяє суттєво спростити пошук власних значень. Інтервал кореня рівняння (12) фіксується при зміні знаку визначника чи при порушенні монотонності його змінення. Після визначення коренів рівняння (12) – власних значень пружної системи, можна знайти форми й відносні амплітуди власних коливань. Багаточисельні приклади розв'язання задач динаміки й стійкості стержневих систем, наведених в роботі, дозволили уловити властивості й можливості алгоритму МГР. Коротко вони зводяться до таких висновків:

1. МГР відноситься до точних методів визначення спектрів власних значень пружних систем.

2. Розрахункові схеми конструкції не змінюються й подаються як заданий набір модулів з нескінченим числом ступенів свободи й розподіленими масами. Зосереджені маси й сили інерції рухомих модулів враховуються еквівалентним збільшенням розподілених мас. Виключається можливість появи фіктивних й пропуски дійсних власних значень.

3. Визначення спектру власних значень лінійних систем зводиться до обчислення коренів визначника матриці  $A_*$ , що найпростіше виконати шляхом послідовного перебіру в поєднанні з прямим кроком методу Гауса. Визначник матриці  $A_*$  (12) не має точок розриву 2-го роду й формується без операцій транспонування, множення й обернення

матриць. Розрахунок вимушених коливань зводиться до розв'язання одного матричного рівняння (4). Повністю враховуються пряма та коса симетрія системи. Можливе врахування зсуву, Інерції обертання, пружної основи й Інши фактори.

Аналіз цих висновків дозволяє заключити, що МГІР суттєво розширює можливості динамічного й біфуркаційного розрахунків в порівнянні з Іншими методами.

Для стержня з перемінною геометрією побудовані рекурентні вирази при ступінному моделюванні розподілених параметрів. Так, кінцеві параметри вектору  $Y(\ell)$  визначаються з рівняння

$$Y(\ell) = A^n(\ell) X(0) + B^{cn}(\ell), \quad (13)$$

де матриці мають вид

$$A^n = A_m \cdot A_{m-1} \cdot \dots \cdot A_1 = \prod_{i=1}^m A_{m+1-i}; \quad B^{cn} = \sum_{i=1}^m A_i^n \cdot B_i; \quad (14)$$

$$A_i^n = \prod_{j=1}^{m-i} A_{m+1-j};$$

$m$  - число ступенів. Рівняння (13) по виду не відрізняється від (1) й дозволяє розглядати системи з модулями, які мають розподілені по любому закону параметри. Доводиться відповідний приклад, доповнений системним підходом до формування розв'язувальної системи рівнянь. Системний підход звільняє алгоритм МГІР від ручного складання рівнянь рівноваги й сумісності переміщень вузлов системи й може служити першим кроком до повної автоматизації розрахунку.

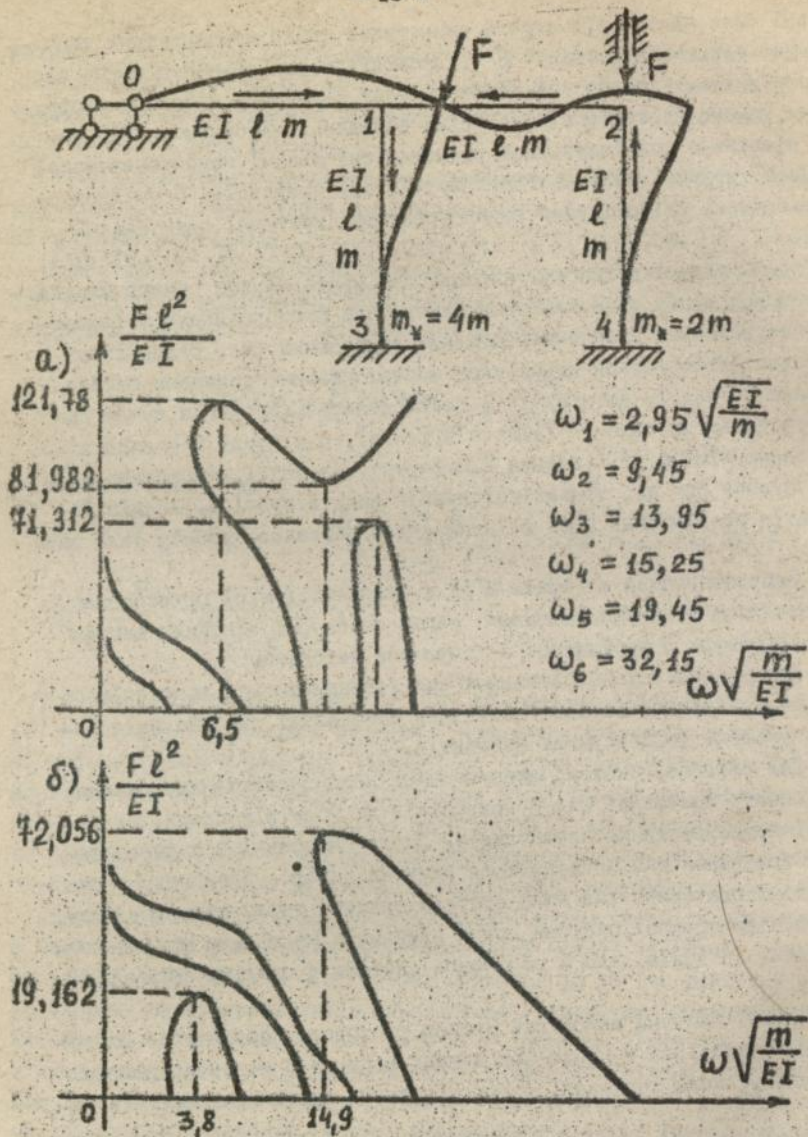
Виявлені переваги МГІР при розв'язанні задач динаміки дозволили з нових позицій розглянути неконсервативні задачі стійкості пружних систем. Аналіз робіт в цій галузі показав, що за час розвитку цього напрямку не створена задовільна метода розрахунку складних пружних систем. Відмічено, що алгоритм МГІР Ідеально підходить для розв'язання подібного типу задач з любой структурою пружної системи. Моделлю об'єкту може бути произвольний набір модулів з нескінченним числом ступенів свободи, можуть враховуватись зсув, Інерція обертання, произвольні закони змінення маси, жорсткості, стискаючих сил й Інши фактори. Все це враховується фундаментальними функціями динамічної матриці  $A_*$ . Встановлено, що консервативні й неконсер-

вативні сили мають свій строго визначений набір компенсуючих топологічних елементів матриці  $C$ . Враховуючи, що трансцендентне частотне рівняння (12) не має точок розриву 2-го роду й дозволяє отримувати точний спектр частот власних коливань, алгоритмом МГІР можуть ефективно розв'язуватись різноманітні задачі неконсервативної стійкості пружних систем. Розглянуто низку прикладів. В частковості, визначені дві слідуєчі неконсервативні критичні сили задачі М.Бекка ( $F_1 = 20,05 EI/l^2$ ;  $F_2 = 127,811 EI/l^2$ ;  $F_3 = 317,91 EI/l^2$ ); розв'язані задачі стійкості систем, які мають більше одного модуля. Вивчено поведінку різноманітних систем при пропорційному збільшенні консервативних й неконсервативних стискаючих сил. Складність цих задач ілюструється поведінкою частот власних коливань вільної рами по мал.1, де в вузлі 1 прикладена слідуєча за кутом повороту стискаюча сила  $F$  (задача М.Бекка), а в вузлі 2 - сила з'єдкованою лінією дії (задача В.И.Реута). На мал.1, а показано змінення частот при дії тільки слідуєчої сили в вузлі 1. Аналіз результатів розв'язання цієї й інших задач дозволив зробити такі висновки:

1. Запропонований алгоритм МГІР в найбільшій мірі пристосован для розв'язання неконсервативних задач стійкості лінійних систем будь-якої структури в порівнянні з існуючими методами.
2. Врахування неконсервативних сил забезпечується топологічною матрицею, де кожний варіант поведінки стискаючих сил має свій набір ненульових компенсуючих елементів.
3. Для лінійних систем, навантажених неконсервативними силами, існує спектр критичних сил й криволінійних форм рівноваги, як й при дії консервативних навантажень. Спектр ейлерових й неконсервативних критичних сил накладаються один на одного. В зв'язку з цим для неконсервативних сил може суттєво знизити першу критичну силу.
4. Флатер пружної системи можна припинити не тільки накладанням додаткових зв'язків, але й переводом системи в суміжну форму рівноваги.
5. Пружні системи володіють змогою раптового переходу до флатеру. Така можливість виникає при деяких величинах неконсервативних навантажень, коли початкові форми рівноваги системи переставлять існувати.
6. При однакових по величині консервативних й неконсервативних силах має місце тільки ейлеров тип загублення стійкості.

Дані результати надруковані в роботах [17-21].

ЛІБ ім. В. Стефаніва  
АН України



Мал. I

Другий поділ посвячений задачам статички, динаміки й стійкості тонких пружних пластин. Відмічено, що алгоритмом МГР завжди можна розраховувати систему, яка складається з однолінійних модулів. Якщо НДС

модулів описується диференціальними рівняннями в часткових похідних, то для здійснення алгоритму МГІР треба виконати додаткові перетворення. Такі перетворення виконує варіаційний метод Канторовича-Власова. В зв'язку з цим велими перспективною є проблема об'єднання одномірного варіанту МГІР й варіаційного методу Канторовича-Власова. Зрозуміло, що від цього поєднання можливості МГІР й метода Канторовича-Власова суттєво збільшаться. Розв'язання цієї проблеми й посвячен матеріал даного поділу. На прикладі згину прямокутної пластини дана всебічна оцінка точності варіаційного методу Канторовича-Власова, відмічена його ефективність й висока точність результатів.

Одномірна модель згину прямокутної пластини представляється звичайним диференціальним рівнянням 4-го порядку

$$W^{IV} - 2r^2 W'' + s^4 W(y) = \frac{q(y)}{D}, \quad (15)$$

$$r^2 = -B/A; \quad s^4 = C/A; \quad q(y) = \int_0^{l_1} q(x, y) X(x) dx; \quad D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}; \\ A = \int_0^{l_1} X^2(x) dx; \quad B = \int_0^{l_1} X''(x) X(x) dx; \quad C = \int_0^{l_1} X^{IV}(x) X(x) dx, \quad (16)$$

$W(y)$  - Іскома функція розподілення згинів пластини в напрямі вісі  $Oy$ ;  $X(x)$  - задана функція розподілення згинів в напрямі вісі  $Ox$ . Роль кінематичних й статичних параметрів виконують узгальнені параметри

$$W(y); \quad \theta(y) = W'(y); \quad M(y) = -DA[W''(y) - \mu r^2 W(y)]; \\ Q(y) = -DA[W'''(y) - (2-\mu)r^2 W'(y)]. \quad (17)$$

Рішення задачі Коші для рівняння (15) з початковими умовами з (17) отримав В.З. Власов

$$\begin{bmatrix} DW(y) \\ D\theta(y) \\ M(y) \\ Q(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & -A_{23} & -A_{24} \\ -A_{31} & -A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ -A_{41} & -A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DW(0) \\ D\theta(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{bmatrix} + \int_0^y \begin{bmatrix} A_{14}(y-\xi) \\ A_{23}(y-\xi) \\ -A_{32}(y-\xi) \\ -A_{41}(y-\xi) \end{bmatrix} q(\xi) d\xi \quad (18)$$

...  $y = \ell$  з рівняння (18) можна знайти усі узагальнені початкові параметри, а розв'язання рівняння Жермен-Лагранжа для пластини буде пов'язано з визначенням функції згину

$$w(x, y) = W(y) X(x), \quad (19)$$

де функція  $X(x)$  задана, а функція  $W(y)$  по (18) має вид

$$D W(y) = A_{11} D W(0) + A_{12} D \theta(0) - A_{13} M(0) - A_{14} Q(0) + \int_0^y A_{14}(y-\xi) q(\xi) d\xi. \quad (20)$$

Рішення в формі (18) володіє значною ступеню узагальненості. Порівняно просто, шляхом ускладнення коефіцієнтів фундаментальних ортонормированих функцій, враховуються ортотропність матеріалу, ребра жорсткості, пружна основа, початкове деформування, температура й інші фактори. Розглянуто приклад згину прямокутної пластини із змішаними граничними умовами в одному напрямі. Показано, що метод Канторовича-Власова дозволяє дискретизацію самотнього модуля на підмодулі. Відмічено, що задачі подібного типу не розв'язуються методом В.З.Власова, а МГР розв'язуються значно простіше, ніж іншими методами. До розвитку цього підходу запропонована ідея о можливості аналітичного розв'язання задач деформування тонких пластин, які складені із прямокутних й круглих модулів. При реалізації цієї ідеї може бути суттєво розширена область застосування варіаційного методу Канторовича-Власова (пластини з неправильною, кососиметричною, багатозв'язаною й т.і. областями). Враховувачі, що прямокутні й круглі модулі можуть стиковатись тільки по радіальним лініям, запропонована нова схема розділення перемінних диференційного рівняння згину круглої пластини

$$w(\rho, \varphi) = W(\varphi) X(\rho), \quad (21)$$

де  $X(\rho)$  - задана функція розподілення згинів в радіальному напрямі;  $W(\varphi)$  - Іскома функція розподілення згинів по кутовій координаті. Застосування схеми (21) й процедури методу Канторовича-Власова приводять рівняння згину круглих пластин до звичайного диференційного рівняння 4-го порядку з постійними коефіцієнтами

вида

$$W(\varphi) + 2r^2 W''(\varphi) + s^4 W(\varphi) = \frac{Q(\varphi)}{D}, \quad (22)$$

де

$$\begin{aligned} r^2 &= B/A; \quad s^4 = C/A; \quad q(\varphi) = \int_a^b q_1(\rho, \varphi) \rho^4 X(\rho) d\rho; \\ A &= \int_a^b X^2(\rho) d\rho; \quad B = \int_a^b [\rho^2 X''(\rho) - \rho X'(\rho) + 2X(\rho)] X(\rho) d\rho; \\ C &= \int_a^b [\rho^4 X^{IV}(\rho) + 2\rho^3 X'''(\rho) - \rho^2 X''(\rho) + \rho X'(\rho)] X(\rho) d\rho, \end{aligned} \quad (23)$$

$a$  - внутрішній;  $b$  - зовнішній радіус пластини. Узагальнені кінематичні й статичні параметри рівняння (22) записуються так

$$\begin{aligned} W(\varphi); \quad \Theta(\varphi) &= W'(\varphi); \quad M(\varphi) = -DA_M [W''(\varphi) + r_M^2 W(\varphi)]; \\ Q(\varphi) &= -DA_Q [W'''(\varphi) + r_Q^2 W'(\varphi)], \end{aligned} \quad (24)$$

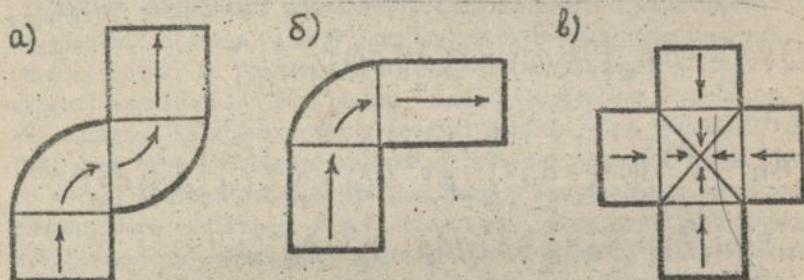
де

$$\begin{aligned} A_M &= \int_a^b \rho^2 X^2(\rho) d\rho; \quad B_M = \int_a^b [\rho^4 X''(\rho) + \rho^3 X'(\rho)] X(\rho) d\rho; \\ r_M^2 &= B_M/A_M; \quad A_Q = \int_a^b \rho X^2(\rho) d\rho; \quad r_Q^2 = B_Q/A_Q; \\ B_Q &= \int_a^b [(2-\mu)\rho^3 X''(\rho) - (1-2\mu)\rho^2 X'(\rho) + 2(1-\mu)\rho X(\rho)] X(\rho) d\rho. \end{aligned} \quad (25)$$

Рішення рівняння (22) з початковими умовами із (24) представлено в матричній формі

$$\begin{bmatrix} DW(\varphi) \\ D\Theta(\varphi) \\ M(\varphi) \\ Q(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & -A_{23} & -A_{24} \\ -A_{31} & -A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ -A_{41} & -A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DW(0) \\ D\Theta(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{bmatrix} + \int_0^\varphi \begin{bmatrix} A_{14}(\varphi-\xi) \\ A_{24}(\varphi-\xi) \\ -A_{34}(\varphi-\xi) \\ -A_{44}(\varphi-\xi) \end{bmatrix} q_1(\xi) d\xi \quad (26)$$

Фундаментальні ортонормовані функції й вантажні члени представлені в роботі [24]. Форма рішення (26) є найбільш загальною формою між відомими рішеннями. Так, при  $A_Q = A_M = A$ ;  $r_M^2 = Mr^2$ ;  $r_Q^2 = (2-M)r^2$ , із (26) сліdkують відомі рішення В.З.Власова для прямокутних пластин (18). При віссиметричному навантаженні із (26) сліdkують рішення, як частковий випадок, віссиметричні задачі згину круглих пластин. Також, як й рішення (18), вирази (26) відносно просто можуть бути враховані різноманітні додаткові фактори розрахункової схеми. Як приклад розглянуто віссиметричні задачі згину круглих пластин з центральною жорстко зашкльненою точкою. Подібні конструкції зустрічаються в механізмах розподілення газу, де пластина виконує роль клапанів, й в спорудах. До таких задач зводяться й межові випадки кільцевих пластин, коли радіус внутрішнього кільця прагне до нуля. Центральна точка таких пластин є сингулярною й з цієї причини відповідні рішення згину відсутні. Математичний апарат МГР й рішення (26) дозволяють відносно просто переборити подібні труднощі. В роботі [24] представлені результати розв'язання віссиметричних задач згину круглих пластин й задачі згину пластини з неправильною "Г"-виразною областю (мал.2,б). Порівняння з ре-



Мал. 2

зультатами інших методів підтвердили достовірність результатів МГР. Комбіную орієнтовні графи по мал.2, можна розв'язувати по алгоритму МГР задачі згину пластин із складними геометричними й крайовими умовами суттєво простіше, ніж іншими методами.

В.З.Власов побудував рішення бігармонічного рівняння згину прямокутних пластин тільки для задач статки, однак відмітив, що варіаційний метод може бути застосован в задачах динаміки й стійкості. В літературі відсутні дослідження по застосуванню методу Канторовича-Власова в задачах динаміки й стійкості пружних пластин.

В зв'язку з цим в роботі розглянуті відповідні диференціальні рівняння поперечних коливань прямокутних й круглих пластин з врахуванням стискаючих зусиль в середній площині. Показано, що в подібних задачах збільшується число варіантів фундаментальних функцій. По формі запису вони відповідають рівнянню (26) й наведені в роботах [23, 26]. Методом Канторовича-Власова рівняння динаміки й стійкості зводяться до звичайних диференціальних рівнянь типу (22), де коефіцієнти приймають більш складний вид

$$\bar{B} = B + \int_0^{l_1} N_y(x) X^2(x) dx / 2D; \bar{C} = C + \int_0^{l_1} [-\gamma h \omega^2 X^2(x) / D + N_x(y) X''(x) X(x) / D] dx,$$

прямокутні пластини

$$\bar{B} = B + \int_0^{l_1} N_\varphi(\rho) \rho^2 X^2(\rho) d\rho / 2D; \bar{C} = C + \int_a^b [N_r(\varphi) \rho^4 X''(\rho) X(\rho) + N_\varphi(\rho) \rho^3 X'(\rho) X(\rho) - \gamma h \omega^2 \rho^4 X^2(\rho)] d\rho / D,$$

круглі пластини

де  $B, C$  - коефіцієнти задач статки. Одноірними моделями динаміки й стійкості тонких пластин можуть бути враховані різні закони змінення стискаючих зусиль в середній площині. Наведені рішення різних тестових задач по алгоритму МГІР. Встановлено, що

1. Вариаційний метод Канторовича-Власова дозволяє практично точно розв'язувати задачі на власні значення прямокутних й круглих пластин.

2. Основна частка погрешності методу Канторовича-Власова зв'язана з неточним описанням зовнішнього навантаження при застосуванні одного члена ряду, а вплив на погрешність побічних коефіцієнтів лінійної системи диференціальних рівнянь В.З.Власова вельми мало.

3. Метод Канторовича-Власова дозволяє виключити з практичного застосування функції Беселя при розв'язанні задач статки й на власні значення круглих пластин.

Другий висновок слідує з першого, оскільки в задачах на власні значення не враховуються як раз побічні коефіцієнти. Крім тестових задач можливості МГІР проілюстровані розв'язанням неконсервативної задачі квадратної пластини, задачі стійкості квадратної пластини, частково навантаженої по контуру, віссиметричних задач динаміки й стійкості круглих пластин з жорстко зацімленою цент-

ральною точкою, задачі динаміки й стійкості "Г"-виразної пластини (мал.2,б). Порівняння з результатами інших методів підтвердили достовірність результатів МГІР.

Завершує роботу III піділ - оболонки й системи. В цієї частині розглянуті циліндричні складові оболонки, плитно-ялочні системи й пологові оболонки. Відмічено, що методи розрахунку циліндричних складових систем В.З.Власова, А.В.Александрова, В.Г.Чудновського, І.Е.Мілейковського й Інш. потребують залучення матричних операцій для формування розв'язуючої системи лінійних рівнянь, мають обмеження на торцеві умови опірання елементів (крайові умови повинні бути однакові для усіх елементів), складні для реалізації на ЕОМ й Ін. недоліки. Від подібних недоліків вільний алгоритм МГІР. Однак, в літературі відсутні рівняння типу (18) для площинної задачі теорії пружності прямокутних пластин. З цього приводу в роботі розглянуто бігармоничне рівняння площинної задачі

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi(x, y) = q(x, y) \quad (29)$$

з набіром кінематичних й статичних параметрів

$$\begin{aligned} \sigma_x &= N_x / h = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \int q_x dx; \quad \sigma_y = N_y / h = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \int q_y dy; \\ \tau_{xy} &= S_{xy} / h = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}; \quad \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \end{aligned} \quad (30)$$

$$E\epsilon_x = \sigma_x - \mu\sigma_y; \quad E\epsilon_y = \sigma_y - \mu\sigma_x; \quad G\gamma_{xy} = \tau_{xy}.$$

До рівняння (29) й виразам (30) застосовани метод розділення перемінних Бурье й варіаційний метод Канторовича-Власова. Показано, що одномірна модель площинної задачі принципово не відрізняється від одномірної моделі згину прямокутної пластини (15)-(17). Відповідно не будуть відрізнятися й фундаментальні функції, но зміняться місцями статичні й кінематичні параметри площинної задачі. Відповідно з принципом незалежності дії сил можна об'єднати інтегральні рівняння згину й площинної задачі в єдине рівняння. В цьому випадку отримаємо рівняння загального випадку деформування елемента складової циліндричної оболонки 8-го порядку (стор.25). При  $X(x) = \sin(n\pi x/l_1)$  з (31) сліdkують відомі рішення М.Леві й Л.

Файлона для прямокутної пластини. Встановлена відповідність граничних умов одномірних моделей згину й площинної задачі, яка приводить до однакових виразів фундаментальних функцій. Із рівняння (31)

$DW(y)$	$A_{11}$	$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$				$DW(0)$	$B_{11}$
$D\theta(y)$	$A_{21}$	$A_{22}$	$-A_{23}$	$-A_{24}$				$D\theta(0)$	$B_{21}$
$M(y)$	$-A_{31}$	$-A_{32}$	$A_{22}$	$A_{12}$				$M(0)$	$-B_{31}$
$Q(y)$	$-A_{41}$	$-A_{31}$	$A_{21}$	$A_{11}$				$Q(0)$	$-B_{41}$
$N(y)$					$A_{11}$	$A_{12}$	$-A_{14}$	$A_{13}$	$N(0)$
$S(y)$					$A_{21}$	$A_{22}$	$-A_{23}$	$A_{23}$	$S(0)$
$EV(y)$					$-A_{41}$	$A_{31}$	$A_{11}$	$-A_{21}$	$EV(0)$
$EU(y)$					$-A_{31}$	$A_{32}$	$-A_{12}$	$A_{22}$	$EU(0)$

+  $\begin{matrix} B_{11} \\ B_{21} \\ -B_{31} \\ -B_{41} \\ -B_{51} \\ -B_{61} \\ B_{71} \\ B_{81} \end{matrix}$  (31)

визначаються початкові параметри, функція  $W(y)$  - по виразу (20), а компоненти функції напружень з рівняння

$$Z(y) = -A_{11} N(0) - A_{12} S(0) + A_{14} EV(0) - A_{13} EU(0) + B_{51}. \quad (32)$$

Далі можна визначити функції згину  $w(x, y) = W(y) X_1(x)$ , напружень  $\varphi(x, y) = Z(y) X_2(x)$  й усі другі параметри елементів складової системи. Ефективність, простоту логіки, високу точність результатів, різноманітність типів задач алгоритму МПР показано при розв'язанні тестового прикладу розрахунку складової системи.

Розглянута процедура інтегрування рівнянь статки пологових оболонок

$$\begin{cases} D \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) - \nabla_k^2 \varphi(x, y) = q_z(x, y); \\ \nabla^2 \nabla^2 \varphi(x, y) + Eh \nabla_k^2 w(x, y) = q_{xy}(x, y). \end{cases} \quad (33)$$

Підстановами

$$w(x, y) = \nabla^2 \nabla^2 T(x, y) + \nabla_k^2 Z(x, y) / D; \quad \varphi(x, y) = \nabla^2 \nabla^2 Z(x, y) - Eh \nabla_k^2 T(x, y) \quad (34)$$

Рівняння (33) зводяться до двох віддільних рівнянь з однакою струм-

турою

$$\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 T(x, y) + E h \nabla_k^2 \nabla_k^2 T(x, y) / D = q_z(x, y) / D; \quad (35)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 Z(x, y) + E h \nabla_k^2 \nabla_k^2 Z(x, y) / D = q_{xy}(x, y).$$

Рівняння (35) розв'язувались методами розділення перемінних Фур'є й варіаційним методом Канторовича-Власова. Згідно з методом Фур'є невідомі функції представляються рядами

$$W(x, y) = \bar{W}(y) X_1(x); \quad T(x, y) = R(y) X_1(x); \quad \varphi(x, y) = P(y) X_2(x); \quad (36)$$

$$Z(x, y) = \Gamma(y) X_2(x); \quad u(x, y) = U(y) X_2'(x); \quad v(x, y) = V(y) X_2(x).$$

Ряди представлені  $K$ -ми членами, а індекси опущені. Безрозмірна функція  $X_1(x)$  описує поперечне розподілення згинів оболонки, а безрозмірна функція  $X_2(x)$  - розподілення функції напружень в напрямі вісі  $Ox$ . Процедура методу Канторовича-Власова приводить рівняння (35) до звичайних диференціальних рівнянь 8-го порядку. Їх рішення має вид

$$R(y) = \sum_{i=1}^8 C_i \Phi_i(y); \quad \Gamma(y) = \sum_{i=1}^8 C_i \chi_i(y), \quad (37)$$

де  $\Phi_i(y), \chi_i(y)$  - фундаментальні гіперболотригонометричні функції

$$\Phi_1 = ch \alpha_1 y \sin \beta_1 y; \quad \Phi_2 = ch \alpha_1 y \cos \beta_1 y; \quad (38)$$

$$\Phi_3 = sh \alpha_1 y \cos \beta_1 y; \quad \Phi_4 = sh \alpha_1 y \sin \beta_1 y \text{ і т. д.}$$

Визначені константи інтегрування  $C_i$  в (37), фундаментальні ортонормировані функції й вантажні члени рівнянь (33). Вісім рівнянь об'єднані в матричну форму. Інтегральне рівняння деформування пологої оболонки показано на стор. 27. В рівнянні (39) блоки функцій головної діагоналі описують власні моментний й безмоментний НДС оболонки в напрямі вісі  $Oy$ . Блоки функцій побічної діагоналі описують зв'язок моментного й безмоментного стану (для складової циліндричної оболонки ці блоки в (31) нульові). Практичне застосування рівнянь

DW(y)	$A_{11}$	$A_{12}$	$\frac{A_{31M}}{A_1}$	$\frac{A_{12Q}}{A_1}$	$A_{11N}$	$-A_{12S}$	$\frac{A_{11U}}{A_2}$	$\frac{A_{12V}}{A_2}$	DW(0)	$B_{11}$
DΘ(y)	$A_{21}$	$A_{22}$	$\frac{A_{21M}}{A_1}$	$\frac{A_{22Q}}{A_1}$	$A_{21N}$	$-A_{22S}$	$\frac{A_{21U}}{A_2}$	$\frac{A_{22V}}{A_2}$	DΘ(0)	$B_{21}$
M(y)	$-A_1 A_{31}$	$-A_1 A_{32}$	$A_{31M}$	$A_{32Q}$	$-A_1 A_{31N}$	$A_1 A_{32S}$	$\frac{A_1 A_{31U}}{A_2}$	$\frac{A_1 A_{32V}}{A_2}$	M(0)	$-B_{31}$
Q(y)	$-A_1 A_{41}$	$-A_1 A_{42}$	$A_{41M}$	$A_{42Q}$	$-A_1 A_{41N}$	$A_1 A_{42S}$	$\frac{A_1 A_{41U}}{A_2}$	$\frac{A_1 A_{42V}}{A_2}$	Q(0)	$-B_{41}$
DN(y)	$A_{51}$	$A_{52}$	$\frac{A_{51M}}{A_1}$	$\frac{A_{52Q}}{A_1}$	$A_{51N}$	$-A_{52S}$	$\frac{A_{51U}}{A_2}$	$\frac{A_{52V}}{A_2}$	DN(0)	$B_{51}$
DS(y)	$-A_{61}$	$-A_{62}$	$\frac{A_{61M}}{A_1}$	$\frac{A_{62Q}}{A_1}$	$-A_{61N}$	$A_{62S}$	$\frac{A_{61U}}{A_2}$	$\frac{A_{62V}}{A_2}$	DS(0)	$-B_{61}$
DEhU(y)	$A_2 A_{71}$	$A_2 A_{72}$	$\frac{A_2 A_{71M}}{A_1}$	$\frac{A_2 A_{72Q}}{A_1}$	$A_2 A_{71N}$	$-A_2 A_{72S}$	$A_{71U}$	$A_{72V}$	DEhU(0)	$B_{71}$
DEhV(y)	$A_2 A_{81}$	$A_2 A_{82}$	$\frac{A_2 A_{81M}}{A_1}$	$\frac{A_2 A_{82Q}}{A_1}$	$A_2 A_{81N}$	$-A_2 A_{82S}$	$A_{81U}$	$A_{82V}$	DEhV(0)	$B_{81}$

ня (39) показано на тестовому прикладі. результати МГПР й методу переміщень близькі між собою.

### ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Основними результатами роботи є наступні положення:

1. Запропонована й розроблена нова схема перетворень граничних інтегральних рівнянь, які описують крайові задачі лінійних систем стержнів, пластин й оболонок;
  2. Отримані нові рішення диференціальних рівнянь для
    - поперечних коливань прямолінійного стержня з врахуванням позадювньої сили;
    - площинного деформування круглого стержня з врахуванням деформації згину й розтягу;
    - поперечних коливань й стійкості прямокутних пластин;
    - статички, динаміки й стійкості тонких круглих пластин;
    - площинної задачі теорії пружності прямокутних пластин;
    - статички пологових оболонок;
  3. Розроблена й апробована ефективна метода розв'язання задач неконсервативної стійкості складних пружних систем;
  4. Запропонована й реалізована нова схема розділення перемінних диференціального рівняння згину круглих пластин;
  5. Розв'язані нові задачі статички, динаміки й стійкості пластин з круглим й комбінованим контурами;
  6. Отримані нові дані про поведінку пружних систем при дії неконсервативних навантажень й концентрації напружень в сингулярних точках тонких пластин;
  7. Сформовані рівняння загального випадку деформування елементів стержневих, пластинкових й оболонкових систем на базі одномірних інтегральних рівнянь;
  8. Виконана процедура аналітичного інтегрування рівнянь статички пологових оболонок для произвольних умов опірання.
  9. Розвинена область застосування варіаційного методу Канторовича-Власова, яка включає найбільш загальний випадок розрахунку просторових й площинних пластинкових систем з складною геометрією.
- Совокупність основних результатів дисертації дозволяє розглядати цей труд як роботу, де розроблені нові теоретичні положення, котрі можна кваліфікувати як нові значні досягнення в механіці деформованого твердого тіла.

основне утримання дисертації надруковано в наступних роботах.

1. Работягов Д.Д., Оробей В.Ф. Теория деформирования упругих стержневых систем.-Одесса, 1983.-178 с.-Деп. в УкрНИИТИ 14.07.1983.- № 748, Ук-ДВЗ.

2. Работягов Д.Д., Евстафьев А.Н., Оробей В.Ф. Аналитический метод определения напряженно-деформированного состояния стержня кусочно-постоянной жесткости в поле сил.-Одесса, 1984.-25 с.-Деп. в УкрНИИТИ 13.07.1984.-№ 1235, Ук-84Деп.

3. Работягов Д.Д., Оробей В.Ф. Проблема собственных значений на основе представления уравнений движения упругих систем с помощью матриц податливости и жесткости//Четвертое Республиканское совещание по проблемам динамики твердого тела. Тезисы докладов.-Донецк: Изд. Института прикладной математики и механики АН УССР, 1984.- с.43-44.

4. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Расчет стержневых систем методом граничных интегральных уравнений.-Одесса, 1987.-25 с.-Деп. в УкрНИИТИ 06.07.1987.-№ 1866, Ук-87.

5. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Расчет на кручение тонкостенных неразрезных балок и рам методом граничных интегральных уравнений.-Одесса, 1987.-35 с.-Деп. в УкрНИИТИ 15.09.1987.-№2520, Ук-87.

6. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Метод граничных интегральных уравнений в статике стержневых систем.-Одесса, 1988.-130 с.-Деп. в УкрНИИТИ 04.05.1988.-№ 1057, Ук-88.

7. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Метод граничных интегральных уравнений в динамике и устойчивости стержневых систем.-Одесса, 1988.-181 с.-Деп. в УкрНИИТИ 03.11.1988.-№ 2810, Ук-88.

8. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Математическое моделирование задач статики стержневых систем интегральными уравнениями//Республиканская научно-техническая конференция "Совершенствование железобетонных конструкций, работающих на сложные виды деформаций, и их внедрение в строительную практику". Тезисы докладов.-Полтава: Изд. Полтавского инженерно-строительного института, 1989.- с.247.

9. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Расчет ферм методом граничных интегральных уравнений//Изв. вузов. Строительство и архитектура.-1989.-№ 10. -с. 107-111.

10. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Статический расчет комбинированных арочных систем методом граничных интегральных уравнений//Изв. вузов. Строительство и архитектура.-1989.-№ 12.-с. 24-28.

11. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Решение задач статики стержневых систем методом граничных интегральных уравнений//Сопротивление материалов и теория сооружений.-Киев: Будивельник, 1989.-№54.-с.90-95.

12. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Решение задач статики тонкостенных стержневых систем методом граничных интегральных уравнений//Сопротивление материалов и теория сооружений.-Киев: Будивельник, 1989.-№ 55.-с.81-86.

13. Работягов Д.Д., Оробей В.Ф., Быкова З.В. Модификационные методы решения модельных задач статически неопределимых композитных стержней//Всесоюзная научно-методическая конференция "Проблемы подготовки и переподготовки специалистов в области создания изделий из композиционных материалов". Тезисы докладов.-Луганск: Изд. Луганского машиностроительного института, 1990.-с. 59-60.

14. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Метод граничных интегральных уравнений в механике стержневых систем. Тезисы доклада//Строительная механика и расчет сооружений.-1990.-№ 2.-с. 2; 97.

15. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Метод граничных интегральных уравнений в решении проблемы собственных значений динамики и устойчивости упругих систем//Республиканская конференция "Динамика твердого тела и устойчивость движения". Тезисы докладов.-Донецк: Изд. Института прикладной математики и механики АН УССР, 1990.-с.58-59.

16. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д., Масленников А.М., Работягова М.Д. Управление нерегулярностями сложных упругих систем//Там же.-с. 59-60.

17. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Решение задач динамики и устойчивости стержневых систем методом граничных интегральных уравнений//Изв. вузов. Строительство и архитектура.-1990.-№ 12.-с.27-31.

18. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д., Работягова М.Д. Метод граничных интегральных уравнений в неконсервативных задачах устойчивости стержневых и пластинчатых конструкций//Всесоюзная научно-техническая конференция "Методы потенциала и конечных элементов в автоматизированных исследованиях инженерных конструкций". Тезисы докладов.-Киев: Изд. Киевского института инженеров гражданской авиации, 1991.-с. 18-19.

19. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Метод граничных интегральных уравнений в устойчивости упругих стержневых систем от следящих сил

//Изв. вузов. Строительство.-1991.-№ II.-с. 22-28.

20. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Решение неконсервативных задач устойчивости упругих систем методом граничных интегральных уравнений//Материалы Всесоюзной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики".-Саратов: Изд. Саратовского университета, 1991.-Том 3.-с. 276-283.

21. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Неконсервативные комбинированные задачи устойчивости упругих систем//Изв. вузов. Строительство.-1992.-№ I.-с. 23-28.

22. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Расчет пластин на изгиб одномерным вариантом метода граничных интегральных уравнений//Изв. вузов. Строительство.-1993.-№ I.-с. 20-27.

23. Оробей В.Ф., Орлов С.А., Орлов Н.А. Метод граничных интегральных уравнений в динамике и устойчивости прямоугольных пластин//Изв. вузов. Строительство.-1994.-№ 3.-с. 25-31.

24. Оробей В.Ф. Расчет пластин с комбинированным контуром методом граничных интегральных уравнений//Изв. вузов. Строительство.-1994.-№ 4.-с. 9-16.

25. Оробей В.Ф. Расчет цилиндрических складчатых систем методом граничных интегральных уравнений//Изв. вузов. Строительство.-1995.-№ 2.-с. 31-38.

26. Оробей В.Ф. Применение метода Канторовича-Власова к определению собственных значений круглых пластин и решению уравнений статики цилиндрических складчатых и пологих оболочек//Теория и практика вузовской науки. Материалы 60-й научно-технической конференции Одесской государственной академии холода. Тезисы докладов.-Одесса: Изд. Одесской государственной академии холода, 1995.-с. 17.

27. Оробей В.Ф. Применение метода граничных интегральных уравнений к решению задач на собственные значения пластин с круглым и комбинированным контуром//Изв. вузов. Строительство.-1995.-№ 7-8.-с. 37-44.

28. Оробей В.Ф., Дашенко А.Ф. К вопросу об интегрировании уравнений статики пологих оболочек (Сообщение I)//Изв. вузов. Строительство.-1996.-№ 5.

Оробей В.Ф. Метод граничных интегральных уравнений в расчетах линейных систем. Диссертация в виде рукописи на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.02.07-Механика деформируемого твердого тела. Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт". Киев, 1996.

Захищається одномерний варіант методу граничних інтегральних рівнянь для розрахування різних лінійних систем. Розглянуті лінійно-пружні стержневі, пластинчасті та оболочечні конструкції, испытываються статичні, динамічні та біфуркаційні впливи консервативних та неконсервативних сил. Дані нові рішення диференціальних рівнянь лінійних задач та приклади, ілюструючі ефективність розробленого методу. Викладено питання теорії методу, дозволяють застосувати системи фундаментальних ортонормованих функцій та апарат обобщених- та сплайн-функцій, зменшити порядок розв'язуваних систем рівнянь, врахувати реальні умови експлуатації, використовувати системний підхід.

OROSBY V.F. Method of Boundary Integral Equations in Linear Systems Calculations. The thesis submitted for an academic Doctor of Science (Engineering) degree in the speciality 05.02.07 - Mechanics of Solid bodies Subjected to Deformation. The national technical university of the Ukraine "Kiev Polytechnical Institute". Kiev, 1996.

Defended is a one-dimensional method of boundary integral equations for calculating different linear systems. Considered are linear-elastic rod, plate and envelope structures subjected to static, dynamic and bifurcational action of conservative and non-conservative forces. New solutions are given for linear problems differential equations and examples illustrating the efficiency of the developed method. Treated are the method theory questions which permit to apply the systems of the fundamental orthonormalized functions and a body of generalized-and spline functions, to reduce the order of the resolving systems of the equations, estimate the actual operating conditions, make use of the system approach.

Ключові слова: метод, граничні інтегральні рівняння, стержні, пластини, оболонки, варіаційний метод Канторовича-Власова, системи статика, динаміка, стійкість.

Надійшло до друку 10.04.96. Формат 60x84/16. Папір газетний. Друк офсетний. І, 98 ум. друк. арк. 2, 13 обл.-вид. арк. Тираж 100 прим. Замовлення № 91

Видавничий державний політехнічний університет.  
270044, Одеса, пр. Шевченка, 1.



AB 34.505